

Chapter 3 泛函分析初步

- § 3.1 线性空间 PP2-5
- § 3.2 线性子空间 P6
- § 3.3 距离空间 PP7-13
- § 3.4 Banach空间 PP14-26
- § 3.5 Hilbert空间 PP27-35
- § 3.6 完备规范正交集上广义傅里叶展开 PP36-43

《现代应用数学手册——现代应用分析卷》，清华大学出版社

§ 3.1 线性空间

• **定义** (线性空间)：非空集合 $W \neq \emptyset$ ，若满足

(1) W 中元对 “+” 构成交换群，即对 $\forall X, Y, Z \in W$,

- 有 $X + Y \in W$ (加法封闭, +性)
- i. $(X + Y) + Z = X + (Y + Z)$ (结合律)
- ii. $\exists 0 \in W$, 使 $0 + X = X$ (存在零元)
- iii. $\exists -X \in W$, 使 $(-X) + X = 0$ (存在逆元)
- iv. $X + Y = Y + X$ (交换律)
- v.
- 半群**
- 群**
- 交换群**

(完整版，请访问www.kaoyancas.net 科大科院考研网，专注于中科大、中科院考研)

(接上页)

(2) 对 $\forall X, Y \in W, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}$ (复数域)，有：

vi. $\alpha(\beta X) = (\alpha\beta)X \in W$

vii. $\alpha X + \beta X = (\alpha + \beta)X$

viii. $\alpha(X + Y) = \alpha X + \alpha Y$

ix. $1 \cdot X = X$

即对数乘封闭，

则称 W 为线性空间； $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}$ ， W 为复线性空间； $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ， W 为实线性空间。

说明：

1) 加法封闭

2) 数乘封闭

$$\mathbb{X}_i \in W, \alpha_i \in \mathbb{C}, \text{ 有 } \sum_{i=1}^N \alpha_i \mathbb{X}_i \in W$$

举例：

(i) $C[a, b]$ 是线性空间。

$[a, b]$ 上连续函数的全体，记为 $C[a, b]$ 。

(ii) $\text{span}\{\mathbb{X}_1, \mathbb{X}_2, \dots, \mathbb{X}_n\}$ ，是由 $\mathbb{X}_1, \mathbb{X}_2, \dots, \mathbb{X}_n$ 张成的线性空间，其中 $\mathbb{X}_1, \mathbb{X}_2, \dots, \mathbb{X}_n$ 线性无关，

$$\text{span}\{\mathbb{X}_1, \mathbb{X}_2, \dots, \mathbb{X}_n\} = \{ \mathbb{X} = \sum_{i=1}^n \alpha_i \mathbb{X}_i \mid \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathbb{C} \}$$

线性算子：

- 线性空间 W 上的算子 L 为线性算子

$$\Leftrightarrow L \sum_{i=1}^N \alpha_i \mathbb{X}_i = \sum_{i=1}^N \alpha_i L \{ \mathbb{X}_i \}$$

(向 $\sum \alpha_i \mathbb{X}_i$ 和 $\mathbb{X}_i$ 施以 L 算子操作)

- 推论：

零状态线性系统 $\Leftrightarrow$ 系统算子为线性算子

§ 3.2 线性子空间

- 线性子空间：设 $\emptyset \neq V \subset W$ ， V 是 W 的线性子空间 $\Leftrightarrow \forall \mathbb{X}, \mathbb{Y} \in V, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}$ ，有 $\alpha\mathbb{X} + \beta\mathbb{Y} \in V$
(V 上加法、数乘封闭)
- 直和： $W_1, W_2, \dots, W_p$ 是 W 的子空间，若 $\forall \mathbb{X} \in W$ ， $\mathbb{X}$ 可唯一表示成 $\mathbb{X} = \mathbb{X}_1 + \dots + \mathbb{X}_p$ ，其中 $\mathbb{X}_i \in W_i$ ($i = 1, \dots, p$)，则称 W 是 $W_1, W_2, \dots, W_p$ 的直和，记为： $W = W_1 \oplus W_2 \oplus \dots \oplus W_p$ 。
(空间求和——直和)

返回

§ 3.3 距离空间

(度量空间, Metric Space)

- 定义：设 $W \neq \emptyset$ ，称 W 为距离空间，指在 W 中定义了映射： $\rho(\mathbb{X}, \mathbb{Y}): W \times W \rightarrow R_+$ (包括0元)，
 $\forall \mathbb{X}, \mathbb{Y} \in W$ 满足以下三条公理：[返回](#)

- $\rho(\mathbb{X}, \mathbb{Y}) \geq 0$, 且 $\rho(\mathbb{X}, \mathbb{Y}) = 0 \Leftrightarrow \mathbb{X} = \mathbb{Y}$ (正定性)
- $\rho(\mathbb{X}, \mathbb{Y}) = \rho(\mathbb{Y}, \mathbb{X})$ (可交换性)
- $\rho(\mathbb{X}, \mathbb{Z}) \leq \rho(\mathbb{X}, \mathbb{Y}) + \rho(\mathbb{Y}, \mathbb{Z})$ (三角不等式)

则 $\rho(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$ 称为 W 上的距离， (W, ρ) 为度量空间。

例子：

- 例1：数域

$\mathbb{R} / \mathbb{C}$ 域上（一维实数/复数空间）

$$\rho(X, Y) = |X - Y|$$

- 例2：函数空间

$C[a, b]$ （连续函数空间）

$$\rho(X(t), Y(t)) = \max_{\alpha \leq \tau \leq \beta} |X(\tau) - Y(\tau)|$$

• 例3：向量空间

$$\mathbb{R}^n, \forall \mathbb{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \mathbb{Y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

$$\rho(\mathbb{X}, \mathbb{Y}) = \sum_{i=1}^n |x_i - y_i|$$

$$\rho(\mathbb{X}, \mathbb{Y}) = \max_{\forall i} |x_i - y_i|$$

$$\rho(\mathbb{X}, \mathbb{Y}) = \left| \sum_{i=1}^n |x_i - y_i|^2 \right|^{1/2}$$

距离空间的收敛问题：

- **收敛**：度量空间 (W, ρ) 中的点列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 收敛于 x_0 ，

等价于： $\Leftrightarrow x_0$ 是 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 的极限

$$\Leftrightarrow \rho(x_n, x_0) \rightarrow 0, \text{ 当 } n \rightarrow \infty$$

$$\Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$$

注： $x_0 \in W$ ，才叫做收敛。

- 定理：在 (W, ρ) 中，每个收敛点列有唯一的极限点。（请同学自行证明）

研究点列的轨迹，点迹收敛情况

柯西序列：

- 柯西序列 (Cauchy Sequence)

设 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是 (W, ρ) 中的点列, 若对 $\forall \varepsilon > 0$,

$\exists N = N(\varepsilon)$, 使 $\rho(x_n, x_m) < \varepsilon, \forall n, m > N$,

则称 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是 (W, ρ) 中的柯西序列。

- 例子: $\rho(x_n, x_m) \triangleq |x_m - x_n|$
$$\lim_{m, n \rightarrow \infty} |x_m - x_n| = 0$$

点列越来越靠近，无限靠近，靠到哪里呢？

如果靠到 W 上，则可惜序列收敛于 W 。

关于柯西序列的说明：

例： $\left\{\frac{1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ ， $W = (0, 1]$ ， $\rho \triangleq |X - Y|$ ， $X, Y \in W$

$\left\{\frac{1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ 是柯西序列，但 $\frac{1}{n} \rightarrow 0$ ， $n \rightarrow \infty$ ， $0 \notin (0, 1]$

即： $\left\{\frac{1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ 在 W 上不收敛；它收敛，但不收敛于 W 。

- (W, ρ) 中任意收敛序列都是柯西序列
- (W, ρ) 中的柯西序列未必收敛到 (W, ρ) 上

距离空间的完备性：

- **完备度量空间**——Complete Metric Space
(W, ρ) 称为完备度量空间，指其中所有柯西序列都收敛于 W 。
- 欧氏空间 $\mathbb{R}^n$ 、 l^p 、 $C[a, b]$ 都是完备的距离空间。
- 说明：
 - 极限运算在完备时可行，不完备则不能求极限
 - 如何完备化？
 - 度量空间 (W, ρ) 不要求 W 是线性空间

§ 3.4 巴拿赫（**Banach**）空间

§ 3.4.1 赋范线性空间

• 定义（赋范线性空间）：设 $W \neq \emptyset$ 是线性空间，若对 $\forall \mathbb{X}, \mathbb{Y} \in W$, $\exists \|\mathbb{X}\|$ ，满足三条公理：

i. $\|\mathbb{X}\| \geq 0$, $\|\mathbb{X}\| = 0 \Leftrightarrow \mathbb{X} = \mathbf{0}$ （正定性）

ii. $\|\alpha \mathbb{X}\| = |\alpha| \|\mathbb{X}\|$, $\forall \alpha \in \mathbb{C}$ （正齐性）

iii. $\|\mathbb{X} + \mathbb{Y}\| \leq \|\mathbb{X}\| + \|\mathbb{Y}\|$ （三角不等式）

则称 $\|\mathbb{X}\|$ 为 $\mathbb{X}$ 的范数（Norm）。定义了范数的线性空间称为赋范线性空间，记为 $(W, \|\cdot\|)$ 。

赋范空间与度量空间的关系：

二者的差别只在于第(ii)条公理。

由 $(W, \|\bullet\|)$ ，必有 $\rho(\mathbb{X}, \mathbb{Y}) = \|\mathbb{X} - \mathbb{Y}\|$ ，则 $(W, \|\bullet\|) \Rightarrow (W, \rho)$ ；

由 (W, ρ) ，若 $\rho(\alpha\mathbb{X}, \mathbf{0}) = |\alpha|\rho(\mathbb{X}, \mathbf{0})$ ，则 $(W, \rho) \Rightarrow (W, \|\bullet\|)$ 。

反例： (W, ρ) 是度量空间，若取 $\rho(\mathbb{X}, \mathbb{Y}) = \begin{cases} 0, & \mathbb{X} = \mathbb{Y} \\ 1, & \mathbb{X} \neq \mathbb{Y} \end{cases}$ ，

$\rho(\alpha\mathbb{X}, \mathbf{0}) = 1, \mathbb{X} \neq \mathbf{0}$ ；而 $|\alpha|\rho(\mathbb{X}, \mathbf{0}) = |\alpha| \neq 1$ 。

即 $\rho(\alpha\mathbb{X}, \mathbf{0}) \neq |\alpha|\rho(\mathbb{X}, \mathbf{0})$ ，亦即： $\|\alpha\mathbb{X} - \mathbf{0}\| \neq |\alpha|\|\mathbb{X} - \mathbf{0}\|$

$(W, \rho) \not\Rightarrow (W, \|\bullet\|)$ ，不满足范数第(ii)条公理。

结论： 度量空间不一定是赋范空间！

完整版：请访问www.kaoyancas.net 科大科院考研网，专注于中科大、中科院考研

n 维实空间：

范数~广义长度

举例：

• 例1： n 维实数空间（有限维空间）

在 $\mathbb{R}^n$ 中， $\forall \mathbb{X} = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T \in \mathbb{R}^n$ ， n 维实数空间

赋范：
$$\|\mathbb{X}\|_p = \left\{ \sum_{i=1}^n |x_i|^p \right\}^{1/p}, \quad 1 \leq p < \infty$$

特别地：

$p = 2$ ， $\|\mathbb{X}\|_2 = \left\{ \sum |x_i|^2 \right\}^{1/2} = \langle \mathbb{X}, \mathbb{X} \rangle^{1/2}$ 称为**欧氏范数**；

$p = \infty$ ， $\|\mathbb{X}\|_\infty \triangleq \max |x_i|$ ， $\forall i$ ， 称为**无穷范数**。

- 例2：离散时间序列空间 l （无穷维空间）

定义： $l^p \triangleq \left\{ \mathbb{X} = \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \mid \sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p < \infty \right\}, 1 \leq p < \infty$

赋范： $\|\mathbb{X}\|_p = \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p \right\}^{1/p}, 1 \leq p < \infty, p \text{ 次方可和}$

当 $p = \infty$ 时， $\|\mathbb{X}\|_{\infty} = \sup |x_i|, \forall i$

注意： $\sup$ 为上确界； supp 为支撑。

• 例3：连续时间信号空间 $C[a, b]$ （无穷维）

$$\forall x(t) \in C[a, b], \text{ 若 } \int_a^b |x(t)|^p dt < \infty, \quad 1 \leq p < \infty$$

$$\text{令: } \tilde{L}^p[a, b] \triangleq \left\{ x(t) \mid \int_a^b |x(t)|^p dt < \infty \right\}, \quad p \text{次方可积}$$

$$\text{则: } \|x(t)\|_p = \left\{ \int_a^b |x(t)|^p dt \right\}^{1/p}, \quad 1 \leq p < \infty$$

$$p = \infty, \quad \|x(t)\|_\infty = \sup |x(t)|, \quad \forall t \in [a, b]$$

$$\text{也可取范数: } \|x(t)\|_\infty = \max_{a \leq t \leq b} |x(t)|$$

赋范线性空间 l^p 的包含定理：

定理： $l^1 \subset l^2 \subset \dots \subset l^\infty$ （**低**次可和 $\subset$ **高**次可和）

其中： $l^p \triangleq \left\{ \mathbb{X} = \{x_n\}_{n=1}^\infty \left| \sum_{i=1}^\infty |x_i|^p < \infty \right. \right\}, 1 \leq p < \infty$ 。

证明：由 $\forall \mathbb{X} \in l^p$ ，有 $\sum_{n=1}^\infty |x_n|^p < \infty$

$\therefore \exists N$ ，使得当 $n > N$ 时，恒有 $|x_n| < 1$

$$\therefore \sum_{n=N}^\infty |x_n|^q < \sum_{n=N}^\infty |x_n|^p < \infty, \quad q > p$$

$$\therefore \sum_{n=1}^\infty |x_n|^q < \sum_{n=1}^{N-1} |x_n|^q + \sum_{n=N}^\infty |x_n|^p < \infty \Rightarrow \mathbb{X} \in l^q \Rightarrow l^p \subset l^q$$

M氏不等式：

- 离散序列空间 l^p 的 **Minkovski** 不等式：

设：正定序列 $x_i, y_i \geq 0, \forall i, \sum_{i=1}^{\infty} x_i^p < \infty, \sum_{i=1}^{\infty} y_i^p < \infty,$

$$\text{则：} \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} (x_i + y_i)^p \right\}^{1/p} \leq \left(\sum_{i=1}^{\infty} x_i^p \right)^{1/p} + \left(\sum_{i=1}^{\infty} y_i^p \right)^{1/p}, \quad p \geq 1$$

等号成立条件： $\{y_i\}_{i=1}^{\infty} = \alpha \{x_i\}_{i=1}^{\infty}$

(二者线性相关，对应项成比例 α)

- 连续函数空间 $C[a, b]$ 的 **Minkovski** 不等式：

对 $\forall x(t) \in C[a, b]$

$\tilde{L}^p[a, b] \stackrel{\Delta}{=} \left\{ x(t) \mid \int_a^b |x(t)|^p dt < \infty \right\}$, p 方可积连续函数

赋范： $\|x(t)\|_p = \left(\int_a^b |x(t)|^p dt \right)^{1/p}$, $1 \leq p < \infty$,

则 Minkovski 不等式为 ($1 \leq p < \infty$) :

$$\left(\int_a^b |x(t) + y(t)|^p dt \right)^{1/p} \leq \left(\int_a^b |x(t)|^p dt \right)^{1/p} + \left(\int_a^b |y(t)|^p dt \right)^{1/p}$$

强收敛与弱收敛：

- 强收敛：

在 $(W, \|\bullet\|)$ 中， $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 收敛于 x ，指

$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x\| = 0$ ，即依范数收敛，称为**强收敛**。

(Convergence in Norm)

- 弱收敛：依泛函收敛，通常意义下的函数收敛是弱收敛。

- 例如，Ch1之广义极限，就是一种弱收敛；

- 强收敛 $\Rightarrow$ 弱收敛。

§ 3.4.2 Banach空间

- **Banach空间**：完备的 $(W, \|\bullet\|_p)$, $1 \leq p < \infty$
- $\mathbb{R}^n, \mathbb{C}^n, l^p$ 是**Banach空间**。
- 在 $C[a, b]$ 中，取 $\|x\|_\infty = \max_{a \leq t \leq b} |x(t)|$ ，则完备。
- $\tilde{L}^p[a, b]$, $1 \leq p < \infty$ 不完备。如果扩展到 *Lebesgue* 意义下则积分 $\|x(t)\|_p = \left(\int_{[a, b]} |x(t)|^p dt \right)^{1/p}$ 对任意 p 均存在，且完备，此时空间成为 Banach 空间，记为 $L^p[a, b]$ 。

Hölder不等式（连续函数空间）：

若 $f(x) \in L^p[a, b]$

$$g(x) \in L^q[a, b], \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

则有：

$$\begin{aligned} \int_a^b |f(x)g(x)| dx &\leq \left\{ \int_a^b |f(x)|^p dx \right\}^{1/p} \left\{ \int_a^b |g(x)|^q dx \right\}^{1/q} \\ &= \|f(x)\|_p \cdot \|g(x)\|_q \end{aligned}$$

[返回](#)

高次方可积



低次方可积

Banach空间的包含定理:

• **定理:** 若 $1 \leq p \leq q \leq \infty$, 则 $L^q[a, b] \subseteq L^p[a, b]$

证明: 令 $0 \leq p \leq q < r \leq +\infty$, 构造: $1/q + 1/r = 1/p$

对于 $\forall f(x) \in L^q[a, b]$, 只须证 $f(x) \in L^p[a, b]$

$$\int_a^b |f(x)|^p dx = \int_a^b |f(x)|^p \cdot |1|^p dx \leq \quad (\text{由Hölder不等式})$$

$$\left\{ \int_a^b \left[|f(x)|^p \right]^{q/p} dx \right\}^{p/q} \left\{ \int_a^b \left[1^p \right]^{r/p} dx \right\}^{p/r}, \quad p/q + p/r = 1$$

$$= \left[\int_a^b |f(x)|^q dx \right]^{p/q} (b-a)^{p/r}, \quad \text{两边取 } \frac{1}{p} \text{ 次方, 得}$$

$$\left[\int_a^b |f(x)|^p dx \right]^{\frac{1}{p}} \leq (b-a)^{\frac{1}{p} - \frac{1}{q}} \left[\int_a^b |f(x)|^q dx \right]^{\frac{1}{q}} < \infty$$

§ 3.5 Hilbert 空间

外两则：

Hilbert第六问题：任何物理学理论、物理定律、实验结论，都可以从一组数学公理出发演绎得到。追求统一观。

泛函分析：属于基于公理的分析体系，不在于计算，而着眼于概念演绎，更普适、更一般、更深刻地理解、解释数学物理问题。

§ 3.5.1 内积空间 $(W, \langle \cdot, \cdot \rangle)$

- **内积**：设 $W \neq \emptyset$ 为实或复线性空间，若对 $\forall X, Y, Z \in W, \lambda \in \mathbb{C}$ ，均有一个实数或复数与之对应，记为 $\langle X, Y \rangle$ ，满足：

i. $\langle X, X \rangle \geq 0$ ，且 $\langle X, X \rangle = 0 \Leftrightarrow X = 0$ （**正定性**）

ii. $\langle X, Y \rangle = \langle Y, X \rangle^*$ （**共轭交换性**）

iii. $\langle \lambda X, Y \rangle = \lambda \langle X, Y \rangle$ （**齐次性**）

iv. $\langle X + Y, Z \rangle = \langle X, Z \rangle + \langle Y, Z \rangle$ （**加法分配性**）

则称 $\langle X, Y \rangle$ 为 X 与 Y 的内积，定义了内积的空间为内积空间 (**ips**)，记为 $(W, \langle \cdot, \cdot \rangle)$

注：

$$1. \langle \mathbb{X}, \lambda \mathbb{Y} \rangle = \lambda^* \langle \mathbb{X}, \mathbb{Y} \rangle$$

2. $\langle \mathbb{X}, \mathbb{Y} \rangle: W \times W \rightarrow C$ ，若 W 为数的集合，
则 $\langle \mathbb{X}, \mathbb{Y} \rangle$ 为通常的二元函数。

$$3. \text{iii和iv可以合并: } \langle \alpha \mathbb{X} + \beta \mathbb{Y}, \mathbb{Z} \rangle = \alpha \langle \mathbb{X}, \mathbb{Z} \rangle + \beta \langle \mathbb{Y}, \mathbb{Z} \rangle$$

例子：

$$\textcolor{red}{D} \quad \mathbb{R}^n = \text{span} \{ \mathbb{X}_1, \mathbb{X}_2, \dots, \mathbb{X}_n \}, \quad \mathbb{X} = \sum_{i=1}^n \alpha_i \mathbb{X}_i \in \mathbb{R}^n$$

$$\mathbb{X} = [x_1, \dots, x_n]^T, \quad \mathbb{Y} = [y_1, \dots, y_n]^T \in \mathbb{R}^n,$$

$$\text{可有 } \langle \mathbb{X}, \mathbb{Y} \rangle = \mathbb{X}^T \mathbb{Y} = \sum_{i=1}^n x_i y_i$$

(注意：与教材定义形式有所不同)

2) U^n : 约定了内积的复线性空间，酉空间。

$$\langle \mathbb{X}, \mathbb{Y} \rangle = \mathbb{X}^H \mathbb{Y}, \quad H \text{表示共轭转置。}$$

3) $C[a, b]$: $\langle x(t), y(t) \rangle = \int_a^b x(t) y^*(t) dt$ 函数

4) $L_n^2[a, b] = \left\{ \mathbb{X}(t) \left| \int_a^b \mathbb{X}^H(t) \mathbb{X}(t) dt < \infty \right. \right\}$ 函数向量

$$\mathbb{X}(t) = [x_1(t), \dots, x_n(t)]^T \in L_n^2[a, b]$$

$$x_i(t) \in L^2[a, b], \quad i = 1, \dots, n$$

则 $\langle \mathbb{X}(t), \mathbb{Y}(t) \rangle = \int_a^b \mathbb{X}^H(t) \mathbb{Y}(t) dt$

§ 3.5.2 希尔伯特空间

- 若由内积导出的范数 $\|\mathbb{X}\|_2 = \langle \mathbb{X}, \mathbb{X} \rangle^{\frac{1}{2}}$ （欧氏范数）存在，则内积空间亦为赋范线性空间。
- 有限维内积空间必完备： $\mathbb{R}^n, \mathbb{U}^n$ 完备。
- $L^2[a, b]$ 完备，可定义内积 $\int_a^b x(t) y^*(t) dt$ 。
- **Hilbert空间**：依欧氏范数 $\|\mathbb{X}\|_2 = \langle \mathbb{X}, \mathbb{X} \rangle^{\frac{1}{2}}$ **完备**的内积空间称为Hilbert空间。
- Hilbert空间是特殊的Banach空间：**ipden**
- 举例：**能量有限信号、物理空间、** l^2

C-S不等式:

- **Cauchy-Schwarz**不等式: W 为内积空间,

$$\forall X, Y \in W, \text{ 有 } |\langle X, Y \rangle| \leq \|X\|_2 \|Y\|_2$$

- 说明: 在Hölder不等式中, 取 $p = q = 2$, 则成为**Cauchy-Schwarz**不等式。

- 注: 在 U^n 空间中, **C-S**不等式变为:

$$|\mathbb{X}^H \mathbb{Y}| \leq (\mathbb{X}^H \mathbb{X})^{1/2} (\mathbb{Y}^H \mathbb{Y})^{1/2}$$

- 注: 在 $L^2[a, b]$ 空间中, **C-S**不等式变为:

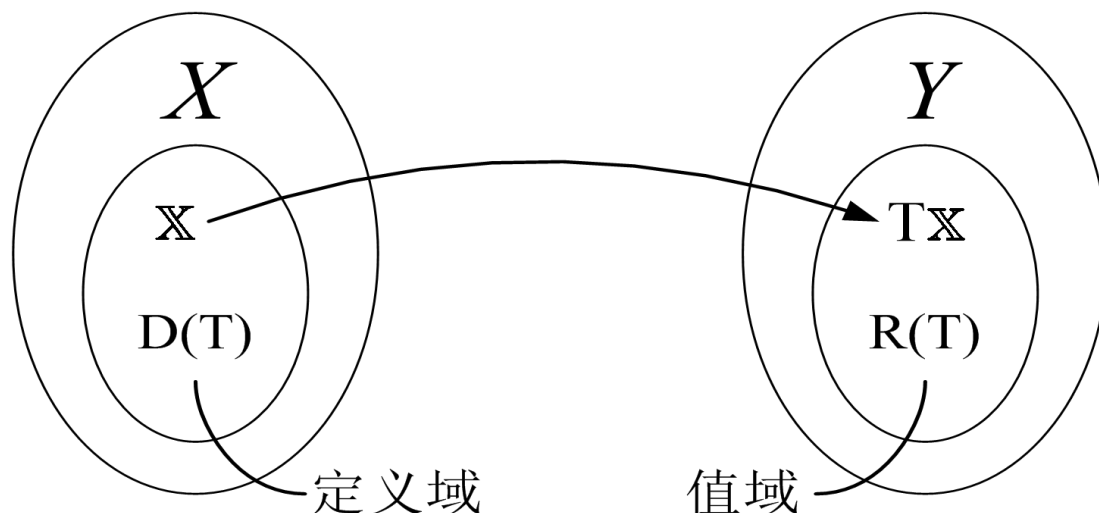
$$\left| \int_a^b x(t) y^*(t) dt \right| \leq \left\{ \int_a^b |x(t)|^2 dt \right\}^{1/2} \left\{ \int_a^b |y(t)|^2 dt \right\}^{1/2}$$

§ 3.5.3 线性泛函

- **算子**： X 、 Y 为线性空间，算子：

$$T: D(T) \subset X \rightarrow R(T) \subset Y, \text{ 或 } T: X \rightarrow Y$$

其中， $D(T)$ 为定义域， $R(T)$ 为值域。



- **数域 (Number Field)**：包括0、1且对四则运算封闭的集合。
- **泛函 (Functional)**：值域是实数域或复数域的算子称为泛函。是一般空间→数域空间的映射。
 - 例如：定积分、内积、 δ 函数（广义函数定义）、范数、距离、（普通）函数均为泛函。

- **线性算子**： X 、 Y 为线性空间， $T: X \rightarrow Y$ 若对

$$\forall \mathbb{X}_i \in X, \quad \forall \alpha_i \in C,$$

$$\text{有: } T \left\{ \sum_{i=1}^N \alpha_i \mathbb{X}_i \right\} = \sum_{i=1}^N \alpha_i T \{ \mathbb{X}_i \}$$

则 T 为线性算子。

- **线性泛函**：线性算子 T 的值域为实数集/复数集。

- 范数、距离、一般函数都是泛函，但不是线性泛函。

- **连续**线性算子 T （如图）

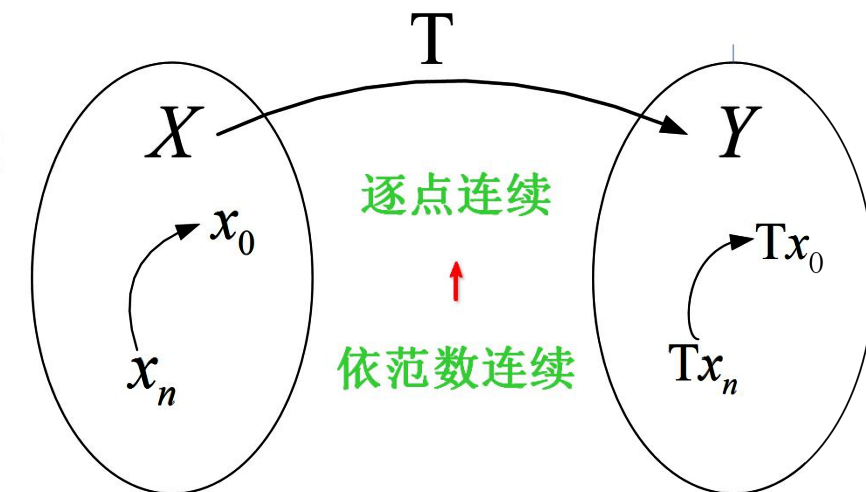
- 对线性算子：**有界** $\Leftrightarrow$ **连续**

- **算子界**： $T: X \rightarrow Y (L, S)$

$\exists M > 0$, 使 $\|TX\|_Y \leq M\|X\|_X$

则 T 为**有界算子**。

$\|TX\|/\|X\|$ 为**算子的范数**。



$$\|x_n - x_0\| \rightarrow 0, n \rightarrow \infty \Rightarrow \|Tx_n - Tx_0\| \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$$

- 内积为连续线性泛函

- 积分算子 $T: L^2[a, b] \rightarrow L^2[a, b]$

$$Tx(t) = \int_a^b h(t, \tau) x(\tau) d\tau, \quad h(t, \tau) \text{ 在 } [a, b] \times [a, b] \text{ 上连续}$$

§ 3.6 完备规范正交集上的 广义傅里叶展开

§ 3.6.1 正交 (Orthogonal)

- **定义**：在内积空间 W 中，若 $\mathbb{X}_i, \mathbb{X}_j \in W$ ，满足 $\langle \mathbb{X}_i, \mathbb{X}_j \rangle = k\delta_{ij}$ ，则称 $\mathbb{X}_i$ 与 $\mathbb{X}_j$ **正交**，记为 $\mathbb{X}_i \perp \mathbb{X}_j$ 。其中 k 为常数， δ_{ij} 为

Kronecker 符号：
$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

- **正交子集**： $V \subset W$ 中任意两个元正交。

集合正交：

- **集正交**：若 $X, Y \subset W$ ，对 $\forall \mathbb{X} \in X, \forall \mathbb{Y} \in Y$ ，有 $\mathbb{X} \perp \mathbb{Y}$ ，则称集 X 与集 Y 正交，记为： $X \perp Y$ 。
- **正交补**： $V \subset W$ ， V 的正交补 $V^\perp = \{\mathbb{X} \in W \mid \mathbb{X} \perp V\}$ ，显然 $V^\perp \perp V$ 。
- **规范正交完备集 V** ：

[返回](#)

 - ① $\forall \mathbb{X}_i, \mathbb{X}_j \in V, \langle \mathbb{X}_i, \mathbb{X}_j \rangle = k\delta_{ij}$ (正交)
 - ② $k = 1$ (规范)
 - ③ $V^\perp = \{\mathbf{0}\}$ (完备)

Hilbert空间性质：

- 定理：Hilbert空间存在规范正交完备集。
- 定理： W 是Hilbert空间， $W = V \oplus V^\perp$ ， V 是 W 的正交子集。

(直和)

§ 3.6.2 正交投影

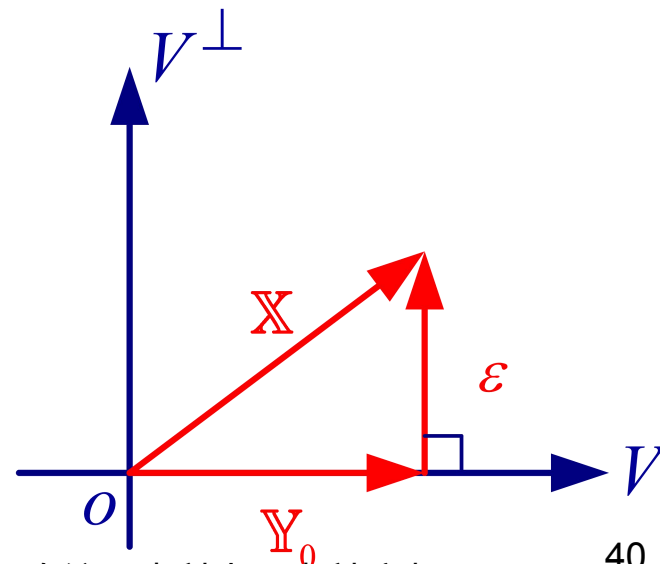
(Orthogonal Projection)

- **正交投影**： W 是 Hilbert - S, $V \subset W$, 对 $\forall \mathbb{X} \in W$, 若 $\exists \mathbb{Y}_0 \in V$, $\exists \varepsilon \perp V$, 使 $\mathbb{X} = \mathbb{Y}_0 + \varepsilon$, 则称 $\mathbb{Y}_0$ 是 $\mathbb{X}$ 在 V 上的正交投影（简称投影），记为 $\mathbb{Y}_0 = P_V \mathbb{X}$ 。

- **Motive:**

$\mathbb{Y}_0$ 与 $\mathbb{X}$ 的距离最小；

正交投影使均方误差最小化。



§ 3.6.3 广义傅里叶展开

- 广义傅里叶展开：设 $V = \{\phi_i\}_{i=1}^{\infty}$ 是Hilbert 空间 W 的规范正交完备集，则对 $\forall X \in W$ ，有

$$X = \sum_{i=1}^{\infty} c_i \phi_i = \sum_{i=1}^{\infty} \langle X, \phi_i \rangle \phi_i, \quad \text{是对向量} X \text{的分解}$$

其中： $c_i = \langle X, \phi_i \rangle$ 称为广义傅里叶系数。

- 注： $V = \{\phi_i\}_{i=1}^{\infty}$ 是Hilbert空间 W 的规范且完备的一组正交基。 c_i 是 X 在 ϕ_i 上的投影。

• Parseval 等式

$$\text{设: } X = \sum_{i=1}^{\infty} c_i \phi_i = \sum_{i=1}^{\infty} \langle X, \phi_i \rangle \phi_i$$

$$\text{则: } \|X\|_2^2 = \sum_{i=1}^{\infty} |\langle X, \phi_i \rangle|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} |c_i|^2$$

能量分解！

- 物理解释：信号总能量＝各分量的能量之和。
- 几何解释：广义勾股定理。

- 用 N 项广义傅里叶展开逼近 X :

设 $V = \{\phi_i\}_{i=1}^{\infty}$ 是 Hilbert 空间 W 的规范正交完备集:

$$V = \{\phi_i\}_{i=1}^{\infty} = \{\phi_i\}_{i=1}^N + \{\phi_i\}_{i=N+1}^{\infty} \cong V_N \oplus V_N^{\perp}$$

X 在 V_N 上的投影: $\hat{X} = \sum_{i=1}^N \langle X, \phi_i \rangle \phi_i$.

这里 V_N 规范正交，但不完备。

End of Chapter 3

Thx~ 4 Ur Attention.

A Big Bow ~

广义函数的定义

- **广义函数**——函数序列的某种极限。

若函数列 $\{f_m(x)\}_{m=1}^{\infty}$ 、函数 $f(x)$ 对 $\forall \phi(x) \in D(\Omega)$

均有 $\langle f(x), \phi(x) \rangle = \lim_{m \rightarrow \infty} \langle f_m(x), \phi(x) \rangle$

即： $\int_{\Omega} f(x) \phi(x) dx = \lim_{m \rightarrow \infty} \int_{\Omega} f_m(x) \phi(x) dx$

则称： $f(x)$ 是 $\{f_m(x)\}_{m=1}^{\infty}$ 的弱极限，一种广义极限；

亦称： $\{f_m(x)\}_{m=1}^{\infty}$ 弱收敛于 $f(x)$ ；

亦称： $f(x)$ 是 $D(\Omega)$ 上的广义函数。

完备性概念

对任意可测集 Ω ， $L^p(\Omega)$ 上的序列 $\{x_n\}$ ，满足

$$\lim_{m,n \rightarrow \infty} \|x_m - x_n\|_p = 0,$$

则 $\exists x \in L^p(\Omega)$ ，有 $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x\|_p = 0$

此时，称可测集 Ω 上的勒贝格函数空间 $L^p(\Omega)$ 具有完备性。

亦即： $L^p(\Omega)$ 上的序列收敛到 $L^p(\Omega)$ 上。