

# 第17章 非线性电路

## 本章重点

17.1 非线性电阻

17.3 非线性电路的方程

17.4 小信号分析法

## ● 重点：

1. 非线性元件的特性
2. 非线性电路方程
3. 小信号分析法

# 引言

## 1. 非线性电路

电路元件的参数随着电压或电流而变化，即电路元件的参数与电压或电流有关，就称为非线性元件，含有非线性元件的电路称为非线性电路。

## 2. 研究非线性电路的意义

①严格说，一切实际电路都是非线性电路。

②许多非线性元件的非线性特征不容忽略，

否则就将无法解释电路中发生的物理现象

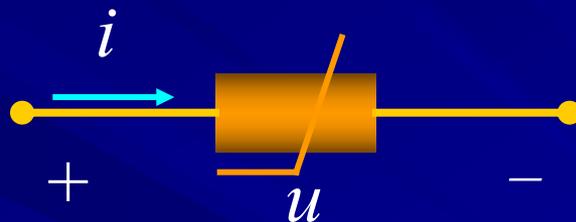
## 3. 研究非线性电路的依据

分析非线性电路基本依据仍然是KCL、KVL和元件的伏安特性。

# 17.1 非线性电阻

## 1. 非线性电阻

### ①符号



### ①伏安特性

非线性电阻元件的伏安特性不满足欧姆定律，而遵循某种特定的非线性函数关系。

$$\begin{cases} u = f(i) \\ i = g(u) \end{cases}$$

## 2. 非线性电阻的分类

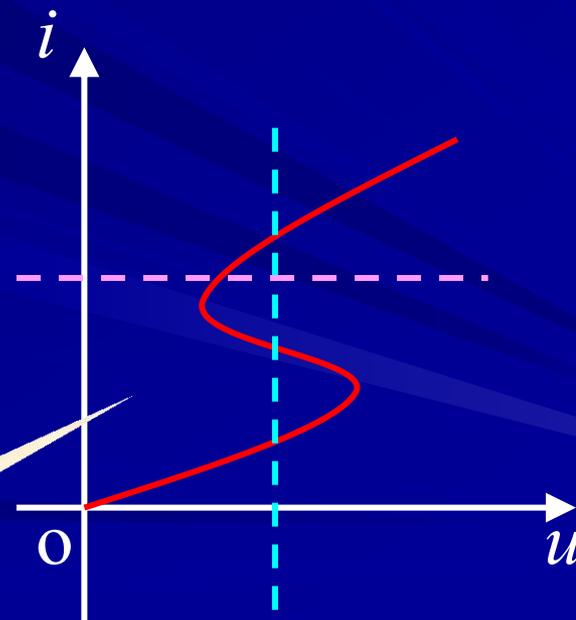
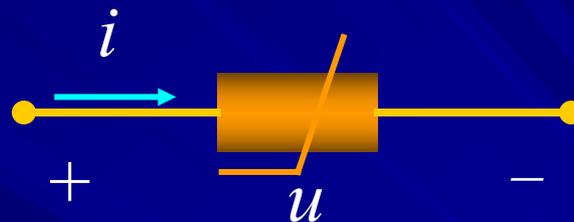
①流控型电阻 → 电阻两端电压是其电流的单值函数。

$$u = f(i)$$



特点

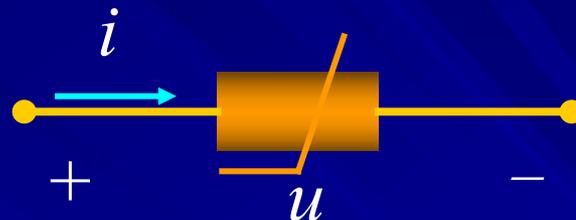
- a) 对每一电流值有唯一的电压与之对应。
- b) 对任一电压值则可能有多个电流与之对应。



S形

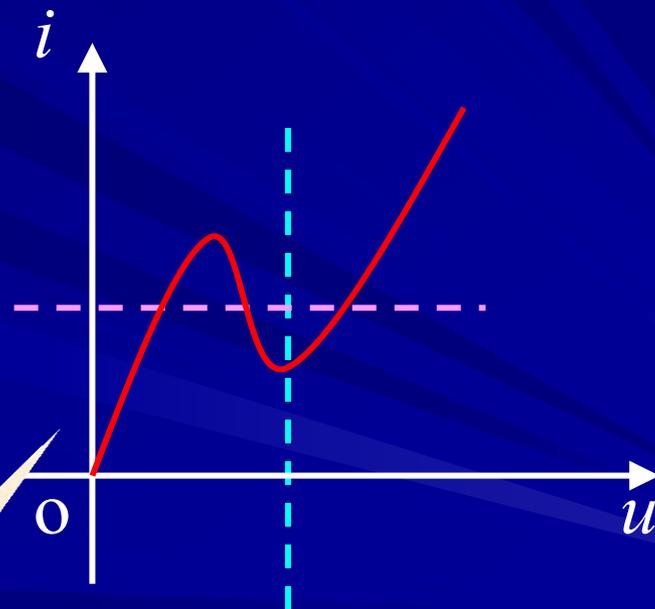
②压控型电阻  $\rightarrow$  通过电阻的电流是其两端电压的单值函数。

$$i = g(u)$$



特点

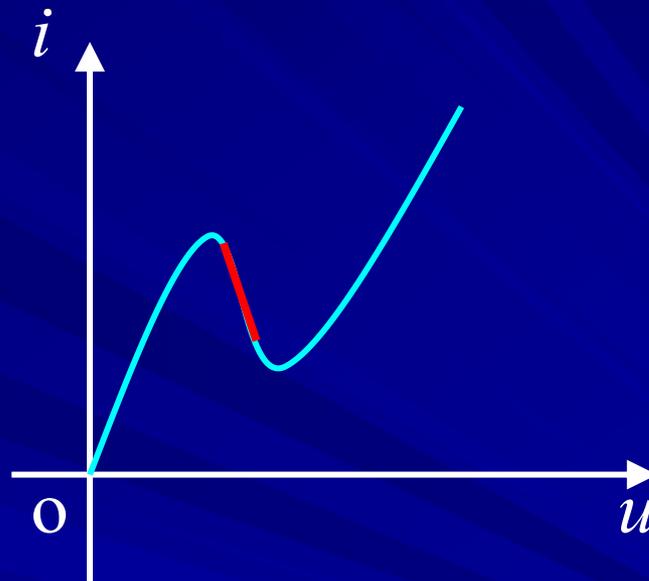
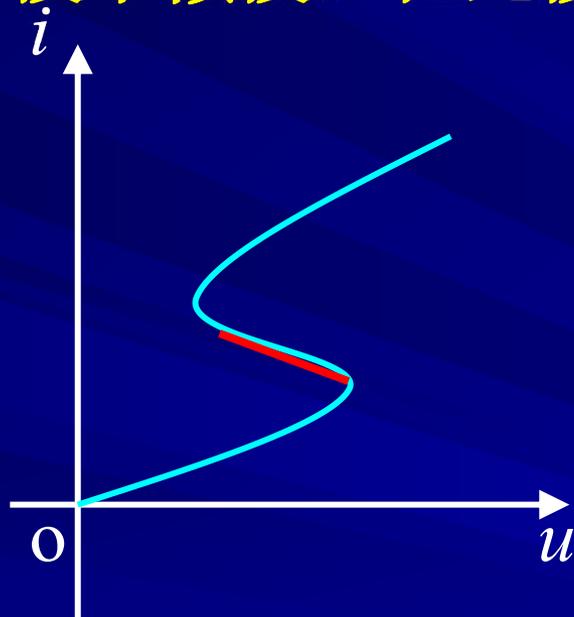
- a) 对每一电压值有唯一的电流与之对应。
- b) 对任一电流值则可能有多个电压与之对应。



N形

**注意**

流控型和压控型电阻的伏安特性均有一段下倾段，在此段内电流随电压增大而减小。



③单调型电阻 → 电阻的伏安特性单调增长或单调下降。

例 p—n结二极管的伏安特性。

其伏安特性为：

$$i = I_s \left( e^{\frac{qu}{kT}} - 1 \right)$$

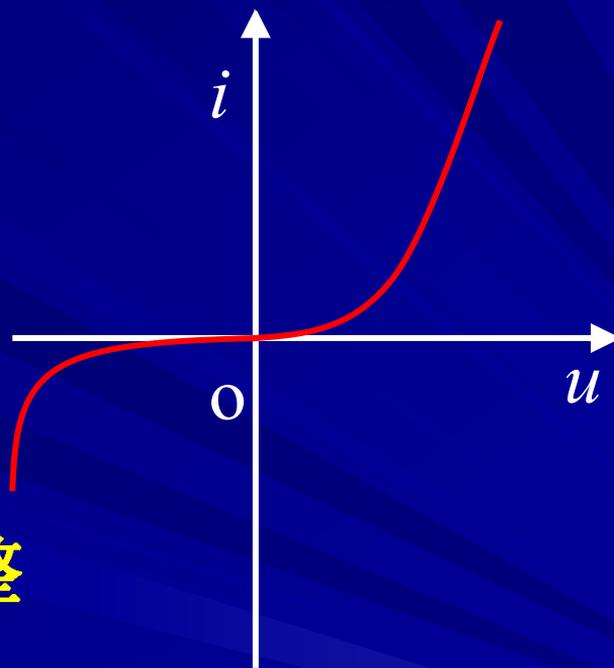
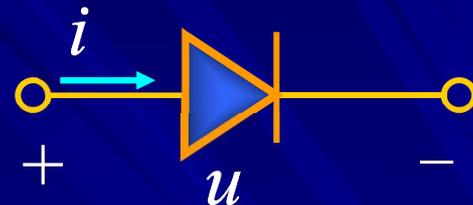
or 
$$u = \frac{kT}{q} \ln\left(\frac{i}{I_s} + 1\right)$$



特点

①具有单向导电性，可用于整流用。

②  $u$ 、 $i$  一一对应，既是压控型又是流控型。



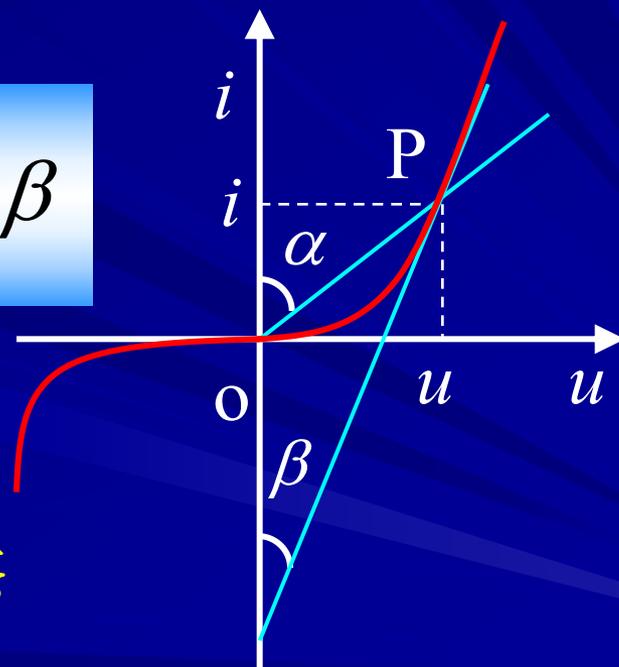
### 3. 非线性电阻的静态电阻 $R$ 和动态电阻 $R_d$

#### ① 静态电阻 $R$ →

非线性电阻在某一工作状态下(如P点)的电压值与电流值之比。

$$R = \frac{u}{i} = \operatorname{tg} \alpha$$

$$R_d = \frac{du}{di} = \operatorname{tg} \beta$$



#### ① 动态电阻 $R_d$ →

非线性电阻在某一工作状态下(如P点)的电压对电流的导数。



## 注意

- ①静态电阻与动态电阻都与工作点有关。当P点位置不同时， $R$  与  $R_d$  均变化。
- ②对压控型和流控型非线性电阻，伏安特性曲线的下倾段  $R_d$  为负，因此，动态电阻具有“负电阻”性质。

例 一非线性电阻的伏安特性  $u = 100i + i^3$

(1) 求  $i_1 = 2\text{A}$ ， $i_2 = 10\text{A}$ 时对应的电压  $u_1$ ， $u_2$ ；

解  $u_1 = 100i_1 + i_1^3 = 208\text{V}$

$$u_2 = 100i_2 + i_2^3 = 2000\text{V}$$

(2) 求  $i = 2\cos(314t)2\text{A}$  时对应的电压  $u$ ;

解

$$u = 100i + i^3 = 200\cos 314t + 8\cos^3 314t$$

$$\because -\cos 3\theta = 3\cos\theta - 4\cos^3\theta$$

$$\begin{aligned} u &= 200\cos 314t + 6\cos 314t + 2\cos 942t \\ &= 206\sin 314t + 2\sin 942t\text{V} \end{aligned}$$



**注意** 电压  $u$  中含有3倍频分量, 因此利用非线性电阻可以产生频率不同于输入频率的输出。

(3) 设  $u_{12} = f(i_1 + i_2)$ , 问是否有  $u_{12} = u_1 + u_2$ ?

解

$$u_{12} = 100(i_1 + i_2) + (i_1 + i_2)^3$$

$$\begin{aligned}u_{12} &= 100(i_1 + i_2) + (i_1^3 + i_2^3) + 3i_1i_2(i_1 + i_2) \\ &= u_1 + u_2 + 3i_1i_2(i_1 + i_2)\end{aligned}$$



$$u_{12} \neq u_1 + u_2$$



**表明 叠加定理不适用于非线性电路。**

(4) 若忽略高次项，当  $i = 10\text{mA}$  时，由此产生多大误差？

**解**

$$u = 100i + i^3 = 100 \times 0.01 + 0.01^3 = 1 + 10^{-6} \text{ V}$$

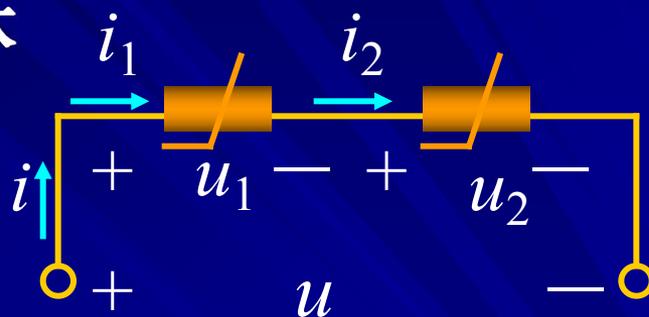
$$\text{忽略高次项, } u' = 100 \times 0.01 = 1$$



**表明 当输入信号很小时，把非线性问题线性化引起的误差很小。**

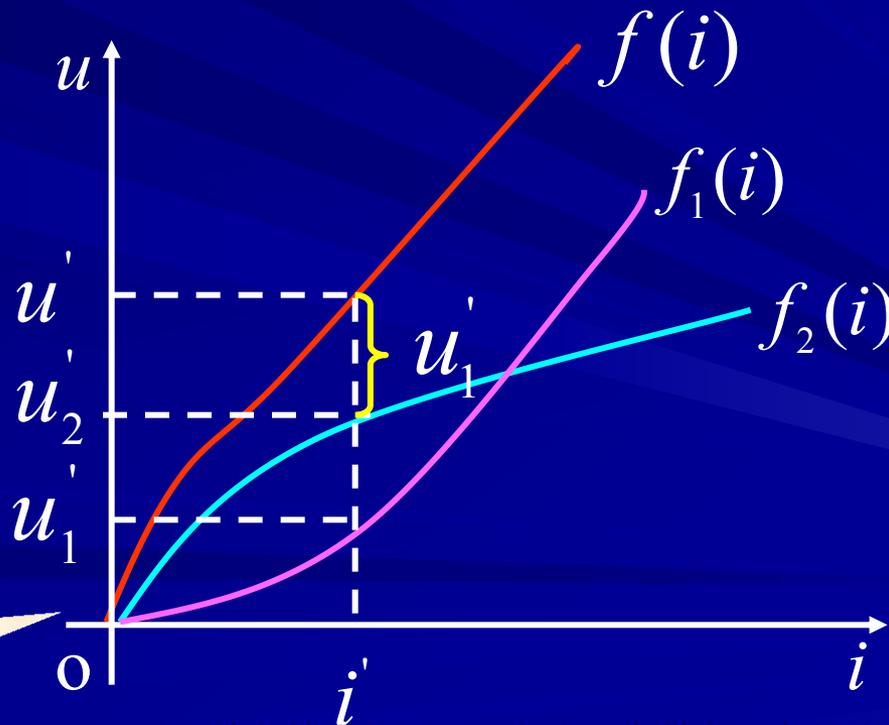
### 3. 非线性电阻的串联和并联

#### ① 非线性电阻的串联



$$\begin{cases} i = i_1 = i_2 \\ u = u_1 + u_2 \end{cases} \longrightarrow u = f(i) = f_1(i) + f_2(i)$$

图解法

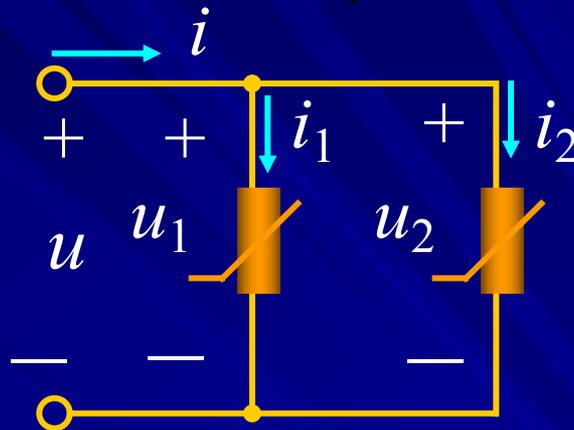


同一电流下  
将电压相加

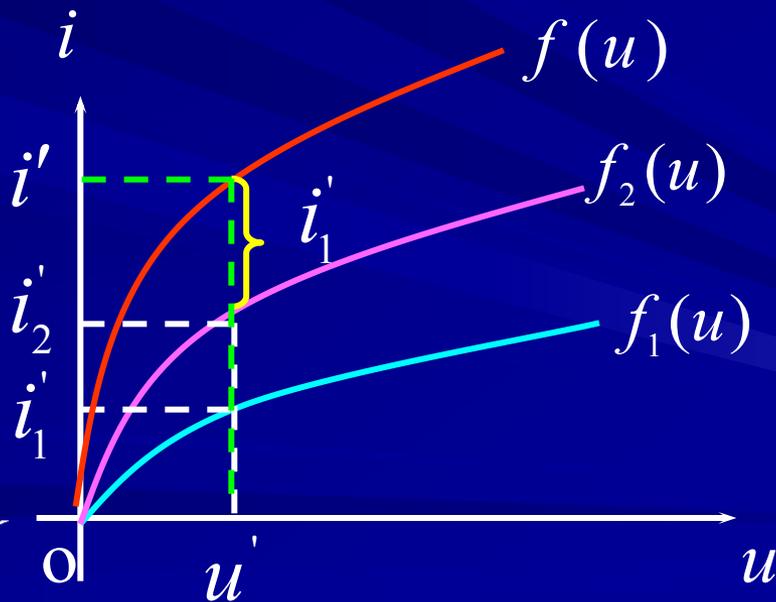
## ②非线性电阻的并联

$$\begin{cases} i = i_1 + i_2 \\ u = u_1 = u_2 \end{cases}$$

→  $i = f_1(u) + f_2(u)$



### 图解法



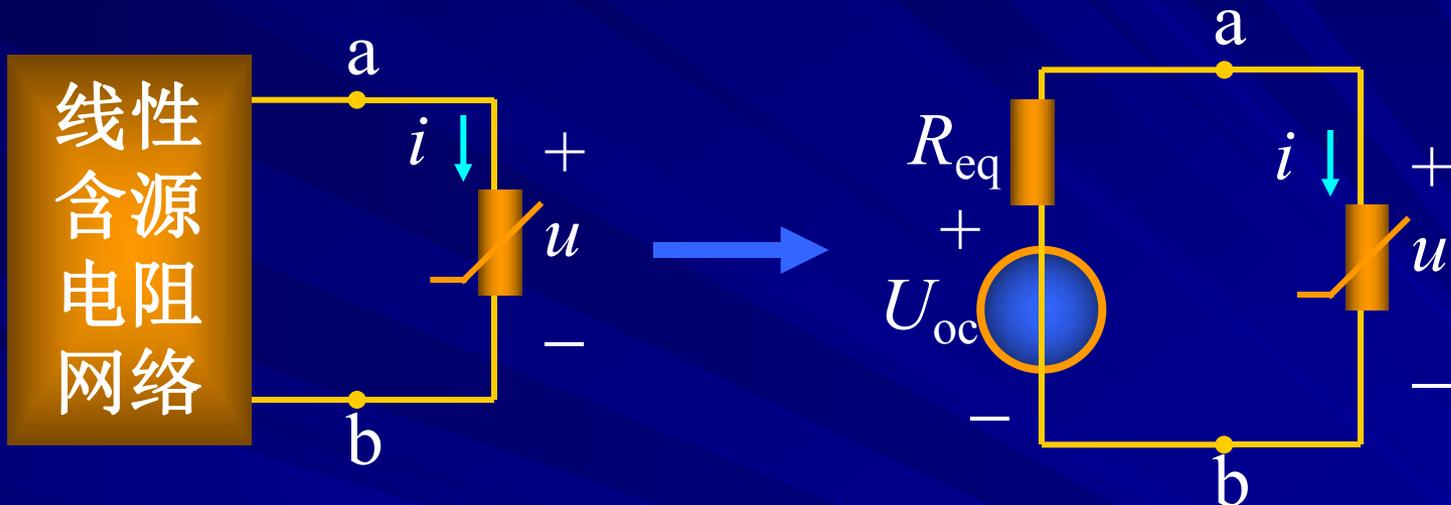
同一电压下  
将电流相加



## 注意

- ①只有所有非线性电阻元件的控制类型相同，才能得出其串联或并联等效电阻伏安特性的解析表达式。
- ②流控型非线性电阻串联组合的等效电阻还是一个流控型的非线性电阻；压控型非线性电阻并联组合的等效电阻还是一个压控型的非线性电阻。
- ③压控型和流控型非线性电阻串联或并联，用图解方法可以获得等效非线性电阻的伏安特性。

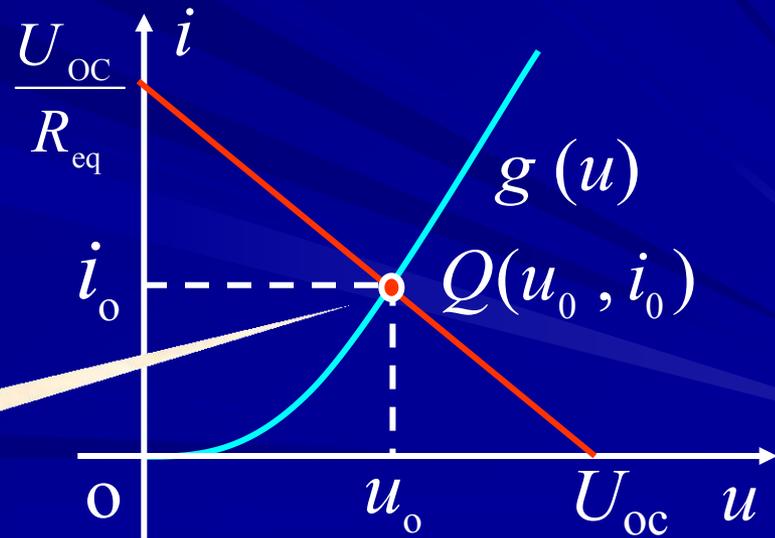
# 4. 含有一个非线性电阻元件电路的求解



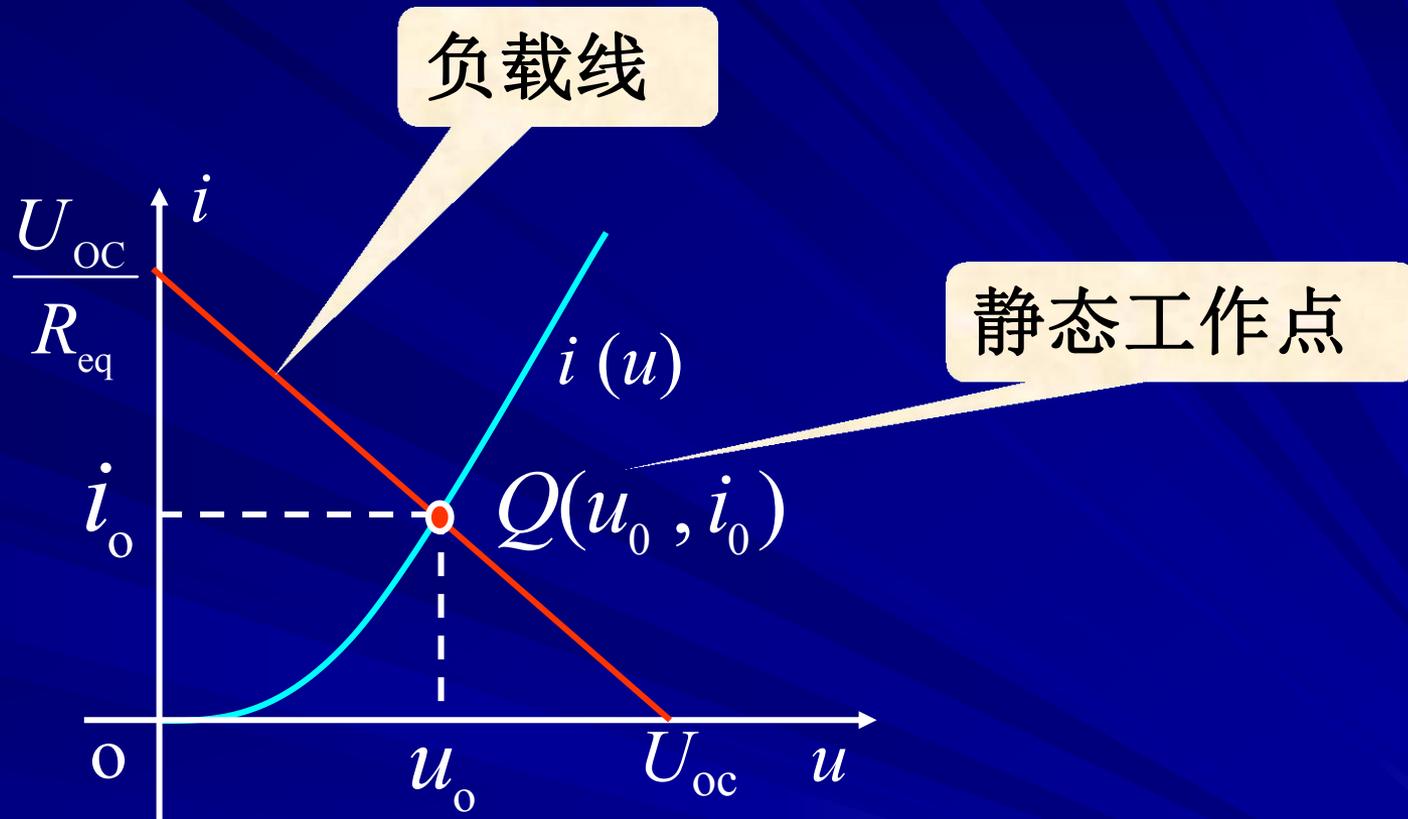
应用KVL得： $u = U_{OC} - R_{eq}i$

设非线性电阻的伏安特性为：

$$i = g(u)$$



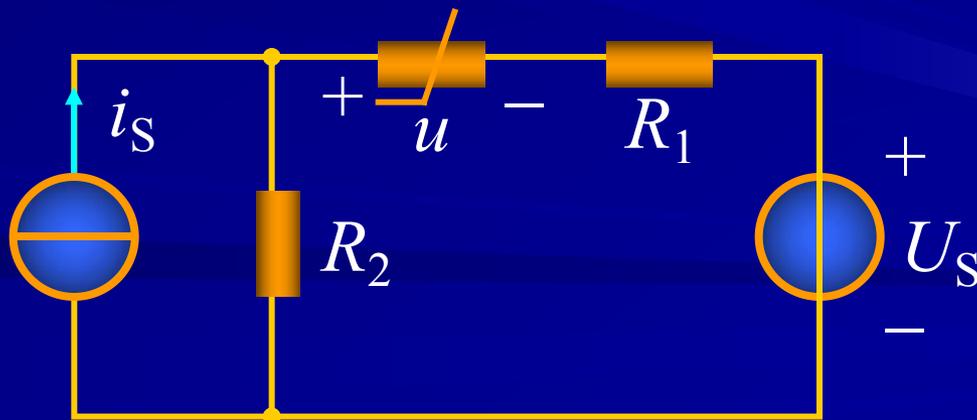
解答

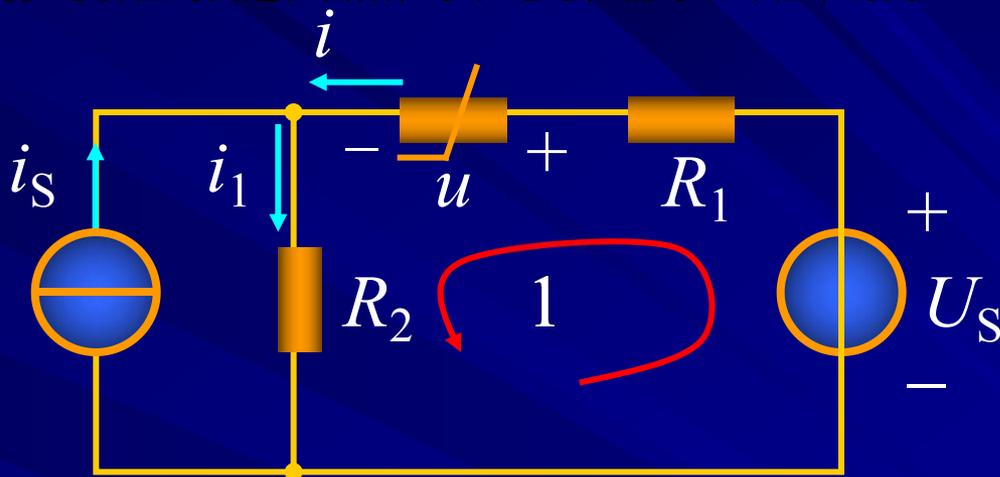


## 17.3 非线性电路的方程

列写非线性电路方程的依据仍然是KCL、KVL和元件伏安特性。对于非线性电阻电路列出的方程是一组非线性代数方程,而对于含有非线性储能元件的动态电路列出的方程是一组非线性微分方程。

例1 电路中非线性电阻的特性为： $i = u^2 + u$ ，求 $u$ 。





**解**

应用KCL得：

对回路1应用KVL有：

非线性电阻特性：

→  $5u^2 + 6u - 8 = 0$

$$\begin{cases} i_1 = i_s + i \\ R_1 i + R_2 i_1 + u = u_s \\ i = u^2 + u \end{cases}$$

$$\begin{cases} u' = 0.8V \\ u'' = -2V \end{cases}$$

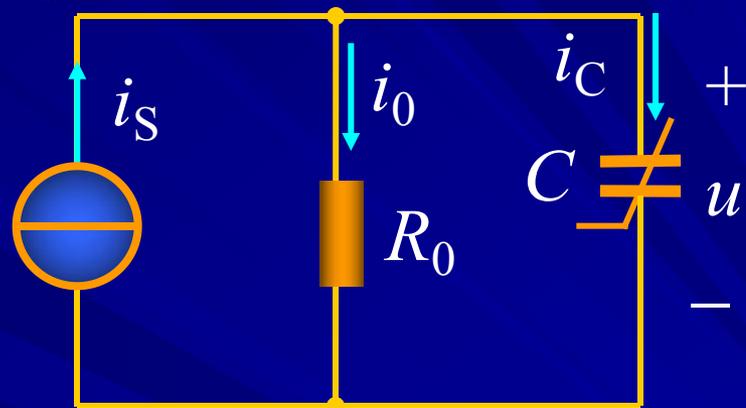


**注意** 非线性电路的解可能不是唯一的。

例2 电路中非线性电容的库伏特性为： $u = 0.5kq^2$   
试以 $q$ 为变量写出微分方程。

解

$$\begin{cases} i_C = \frac{dq}{dt} \\ i_0 = \frac{u}{R_0} = \frac{0.5kq^2}{R_0} \end{cases}$$



应用KCL得： $i_C + i_0 = i_S$

$$\rightarrow \frac{dq}{dt} = -\frac{0.5kq^2}{R_0} + i_S$$

 **注意** 非线性代数方程和非线性微分方程的解析解一般难以求得,但可以利用计算机求得数值解。

## 17.4 小信号分析法

小信号分析方法是电子工程中分析非线性电路的一个重要方法。

小信号分析法



当电路的信号变化幅度很小，可以围绕任何工作点建立一个局部线性模型，运用线性电路分析方法进行研究。

### 1. 小信号分析法的基本概念

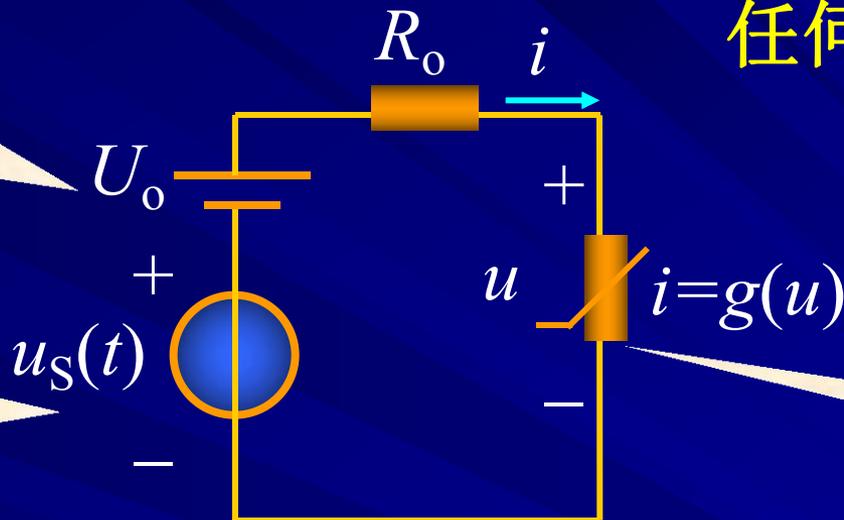
#### ① 分析的前提

任何时刻满足：

$$U_0 \gg u_s(t)$$

直流偏置电压

时变小信号

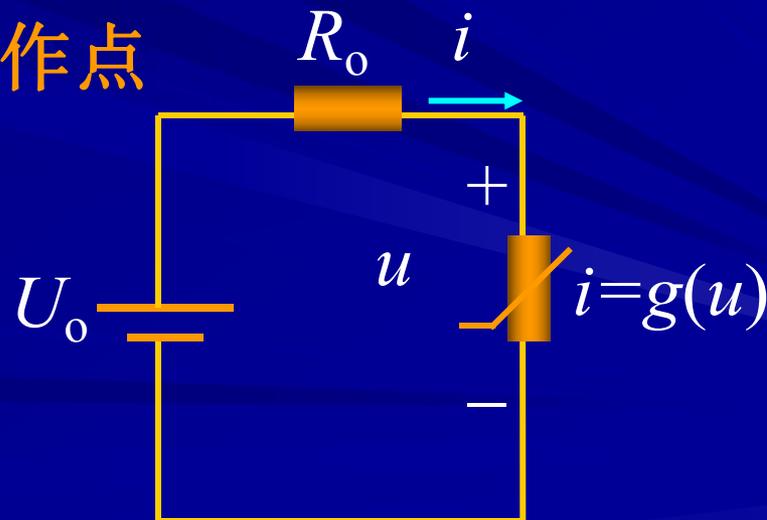


压控电阻

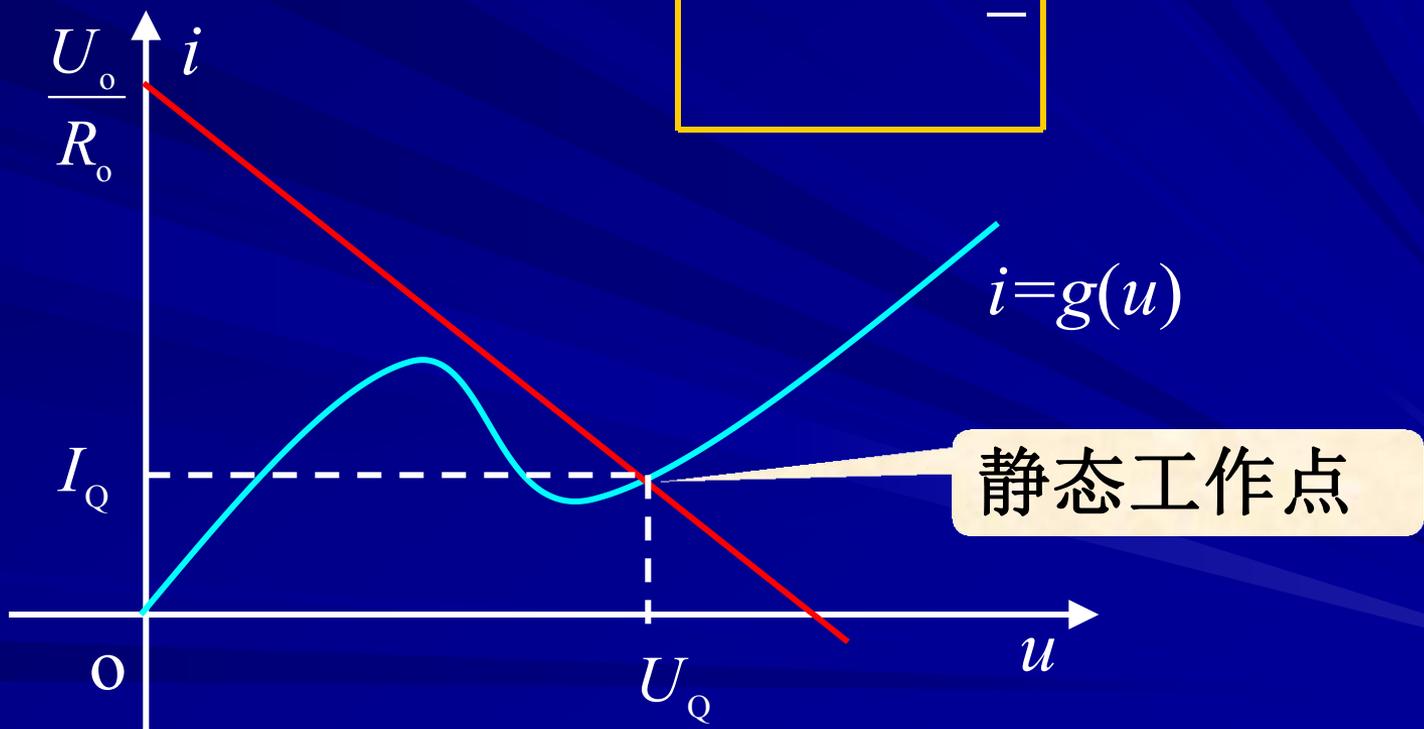
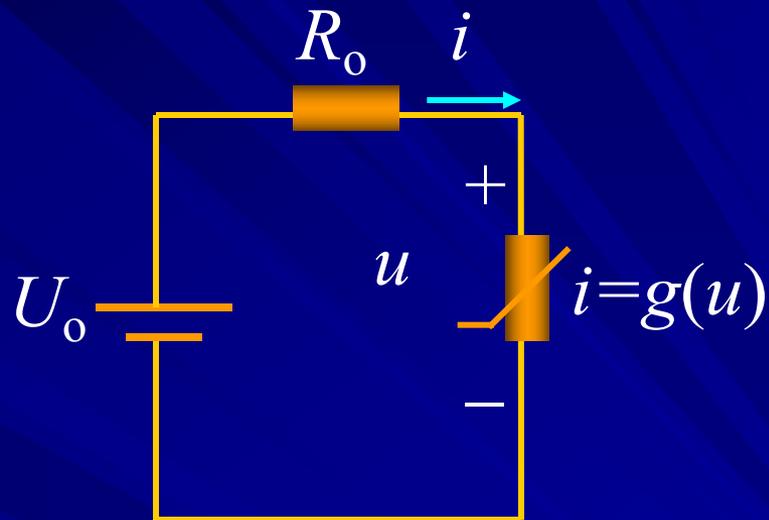
电路方程：
$$U_0 + u_s(t) = R_0 i(t) + u(t)$$

② 令  $u_s(t)=0$ ，求出静态工作点

$$\begin{cases} U_0 = R_0 i + u \\ i = g(u) \end{cases}$$



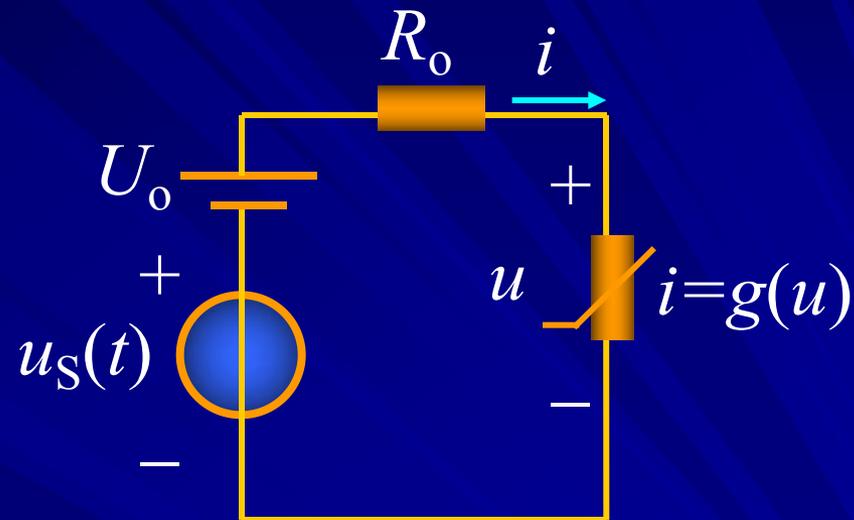
$$\begin{cases} U_o = R_o i + u \\ i = g(u) \end{cases}$$



### ③考虑 $u_s(t)$ 存在

$$\because U_0 \gg u_s(t)$$

$$\rightarrow \begin{cases} u(t) = U_Q + u_1(t) \\ i(t) = I_Q + i_1(t) \end{cases}$$



$$\begin{cases} U_Q \gg u_1(t) \\ I_Q \gg i_1(t) \end{cases}$$

工作点附近的扰动

### ④非线性元件线性化

非线性电阻特性  $i = g(u)$  可写为

$$I_Q + i_1(t) = g[U_Q + u_1(t)]$$

$$I_Q + i_1(t) = g[U_Q + u_1(t)] \quad \because \quad u_1(t) \ll U_Q$$

按泰勒级数展开

$$I_Q + i_1(t) \approx g(U_Q) + \left. \frac{dg}{du} \right|_{U_Q} u_1(t)$$

忽略高次项

$$\rightarrow \begin{cases} I_Q = g(U_Q) \\ i_1(t) = \left. \frac{dg}{du} \right|_{U_Q} u_1(t) = \frac{1}{R_d} u_1(t) \end{cases}$$

线性关系

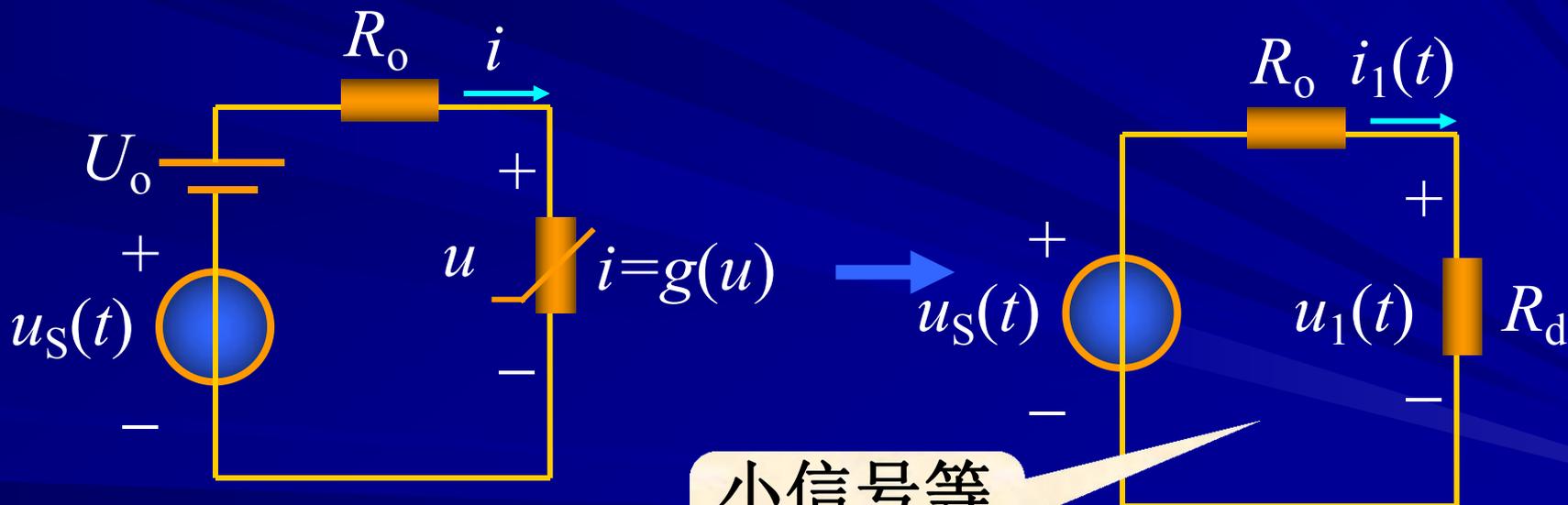
## ⑤小信号等效电路

$$U_o + u_s(t) = R_o i + u = R_o [I_Q + i_1(t)] + [U_Q + u_1(t)]$$

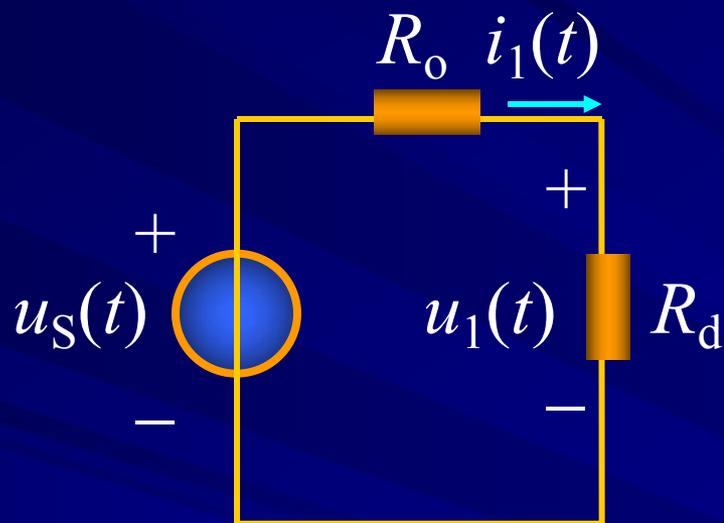
$$= R_o I_Q + U_Q + R_o i_1(t) + u_1(t)$$

→  $u_s(t) = (R_o + R_d) i_1(t)$

$$\therefore \begin{cases} U_o = R_o I_Q + U_Q \\ u_1(t) = R_d i_1(t) \end{cases}$$



小信号等效电路



根据小信号等效电路解得：

$$i_1(t) = \frac{u_S(t)}{R_0 + R_d}$$

$$u_1(t) = R_d i_1(t) = \frac{R_d u_S(t)}{R_0 + R_d}$$



**小结** 小信号分析法的步骤为：

- ①求解非线性电路的静态工作点；
- ②求解非线性电路的动态电导或动态电阻；
- ③作出静态工作点处的小信号等效电路；
- ④根据小信号等效电路进行求解。

## 2. 典型例题

例1 求电路在静态工作点处由小信号所产生的 $u(t)$ 和 $i(t)$ 。已知 $i_S(t)=0.5\cos\omega t$ ，非线性电阻的伏安特性为：

$$i = g(u) = \begin{cases} u^2 & (u > 0) \\ 0 & (u < 0) \end{cases}$$

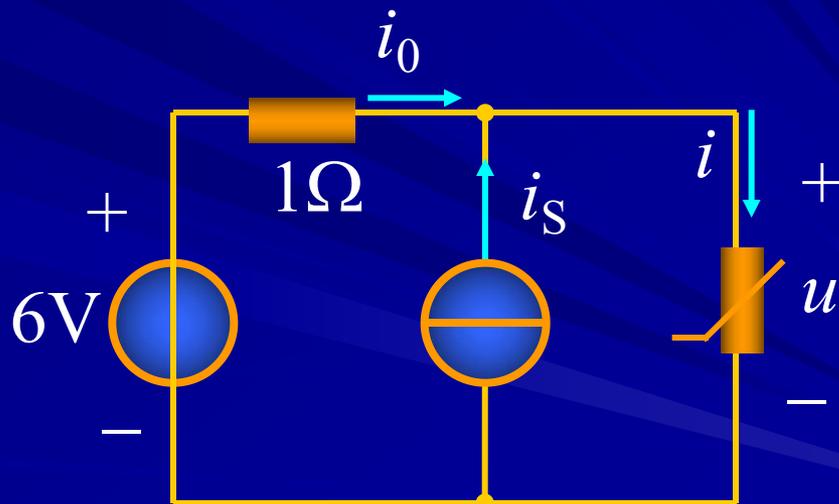
**解** 应用KCL和KVL：

$$i = i_0 + i_S$$

$$u = U_s - Ri_0 = 6 - 1 \times i_0$$

整理得：

$$\frac{u}{R} + g(u) = 6 + 0.5\cos\omega t$$



$$\frac{u}{R} + g(u) = 6 + 0.5 \cos \omega t$$

①求电路的静态工作点，令  $i_s(t) = 0$

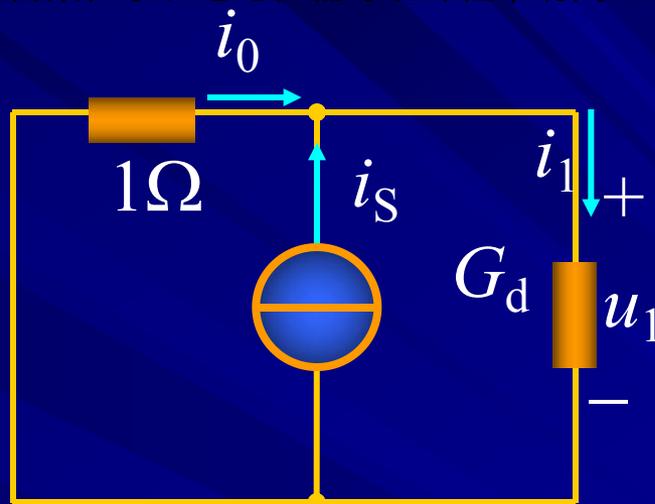
$$u^2 + u - 6 = 0 \quad \rightarrow \quad \begin{cases} u = 2 \\ u = -3 \end{cases} \quad \text{不符题意}$$

得静态工作点：  $U_Q = 2\text{V}$ ，  $I_Q = U_Q^2 = 4\text{A}$

②求动态电导

$$G_d = \left. \frac{dg(u)}{du} \right|_{U_Q} = 2u \Big|_{U_Q} = 4\text{S}$$

③作出静态工作点处的小信号等效电路



解得：

$$u_1(t) = \frac{i_s}{G + G_d} = \frac{0.5 \cos \omega t}{1 + 4} = 0.1 \cos \omega t \text{ V}$$

$$i_1(t) = u_1(t) \times G_d = 4 \times 0.1 \cos \omega t = 0.4 \cos \omega t \text{ A}$$

$$u(t) = U_Q + u_1(t) = (2 + 0.1 \cos \omega t) \text{ V}$$

$$i(t) = I_Q + i_1(t) = (4 + 0.4 \cos \omega t) \text{ A}$$

例2 求通过电压源的稳态电流*i*(*t*)。已知：

$u_S(t) = 10 + 0.1 \sin t$  V，非线性电阻的伏安特性为：

$$i = g(u) = 0.7u + 0.001u^3$$

**解**

电源的直流量远大于交流量，可用小信号分析。

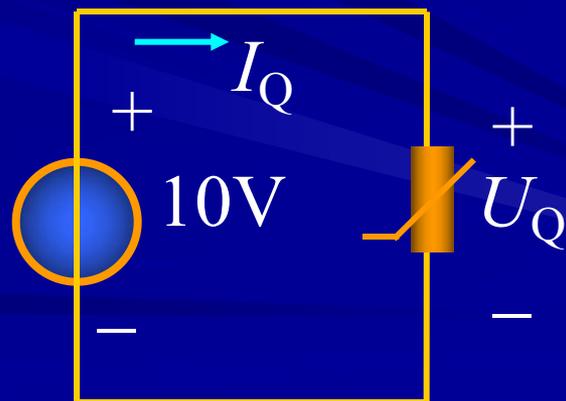
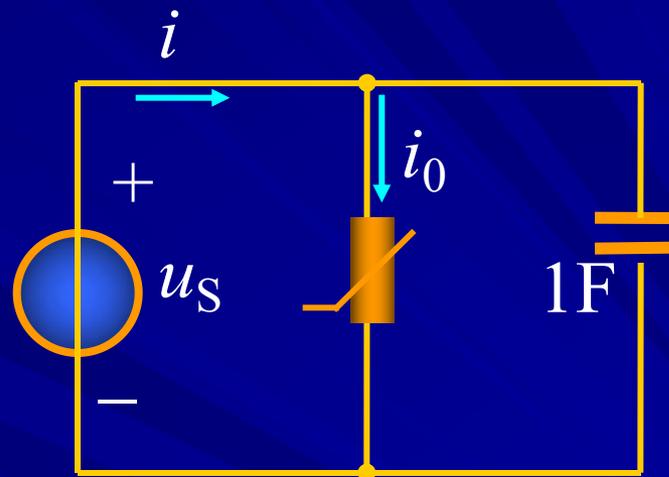
①作直流电路，求工作点

$$U_Q = 10V$$

$$I_Q = 0.7U_Q + 0.001U_Q^3 = 8A$$

②求动态电导

$$G_d = \left. \frac{dg(u)}{du} \right|_{U_Q} = 0.7 + 0.3 = 1S$$



### ③作出静态工作点处的小信号等效电路

应用相量法：

$$\begin{aligned} \dot{I}_1 &= (G_d + j\omega C)\dot{U}_{S1} \\ &= (1 + j1) \times 0.1 \angle 0^\circ \\ &= 0.1414 \angle 45^\circ \text{ A} \end{aligned}$$

$$\rightarrow i_1 = 0.1414 \sin(t + 45^\circ) \text{ A}$$

$$i(t) = I_Q + i_1 = 8 + 0.1414 \sin(t + 45^\circ) \text{ A}$$

