

第二章 电阻电路的等效变换

本章重点

2-1	引言
2-2	电路的等效变换
2-3	电阻的串联和并联
2-4	电阻的Y形联结和 Δ 形联结的等效变换
2-5	电压源、电流源的串联和并联
2-6	实际电源的两种模型及其等效变换
2-7	输入电阻

● 重点：

1. 电路等效的概念
2. 电阻的串、并联
3. 电阻的 $Y-\Delta$ 变换
4. 电压源和电流源的等效变换

2-1 引言

●电阻电路

→ 仅由电源和线性电阻构成的电路。

●分析方法

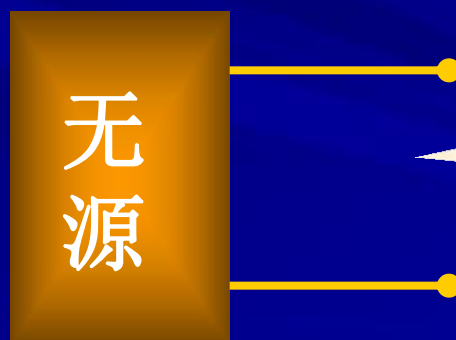
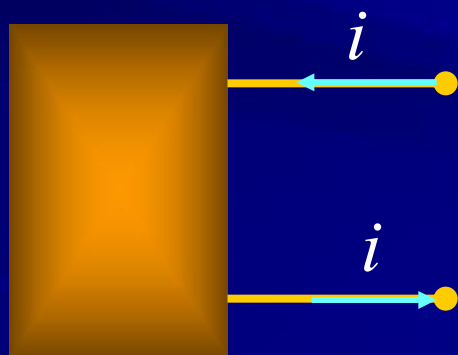
→ ①欧姆定律和基尔霍夫定律是分析电阻电路的依据。

②等效变换的方法，也称化简的方法。

2-2 电路的等效变换

1. 二端电路（网络）

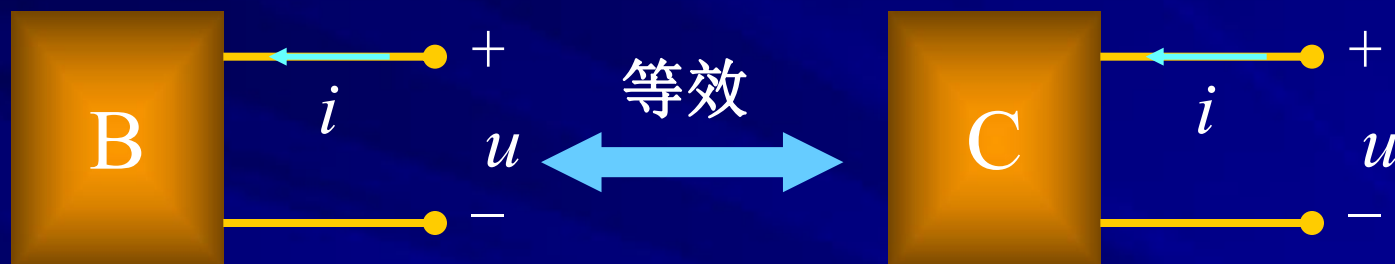
任何一个复杂的电路，向外引出两个端钮，且从一个端子流入的电流等于从另一个端子流出的电流，则称这一电路为二端网络（或一端口网络）。



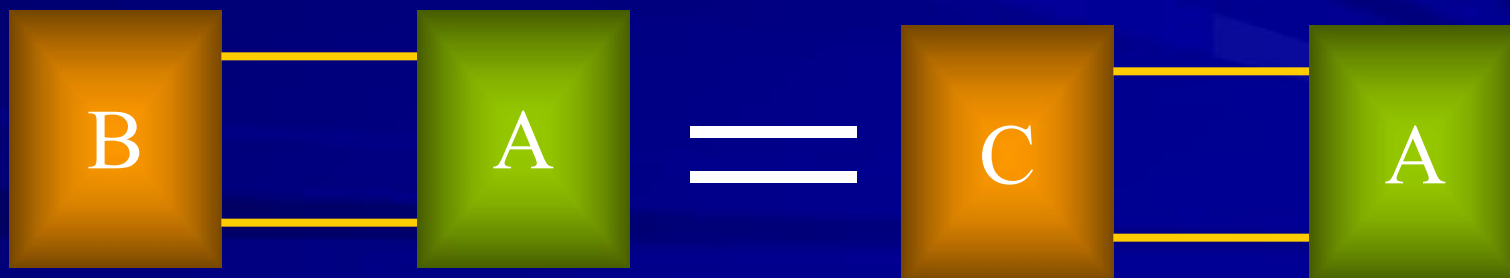
无源一端口网络

2. 二端电路等效的概念

两个二端电路，端口具有相同的电压、电流关系，则称它们是等效的电路。



对A电路中的电流、电压和功率而言，满足：





明确

①电路等效变换的条件：

→ 两电路端口处具有相同的VCR。

②电路等效变换的对象：

→ 未改变的外电路A中的电压、电流和功率。
(即对外等效，对内不等效)

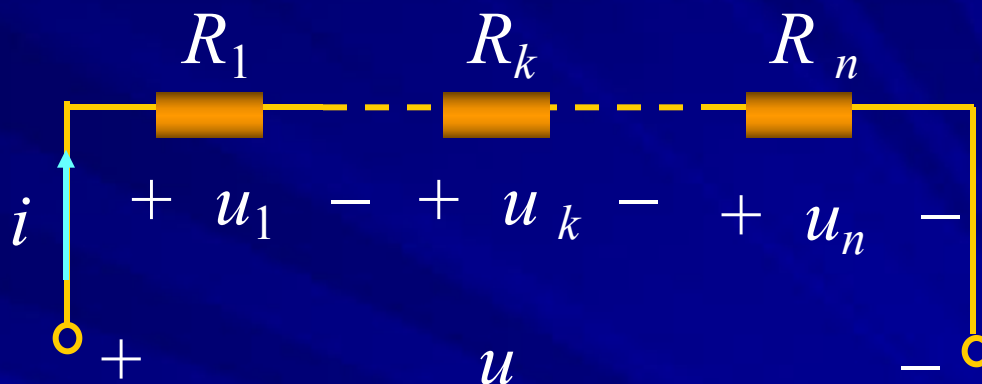
③电路等效变换的目的：

→ 化简电路，方便计算。

2-3 电阻的串联和并联

1. 电阻串联

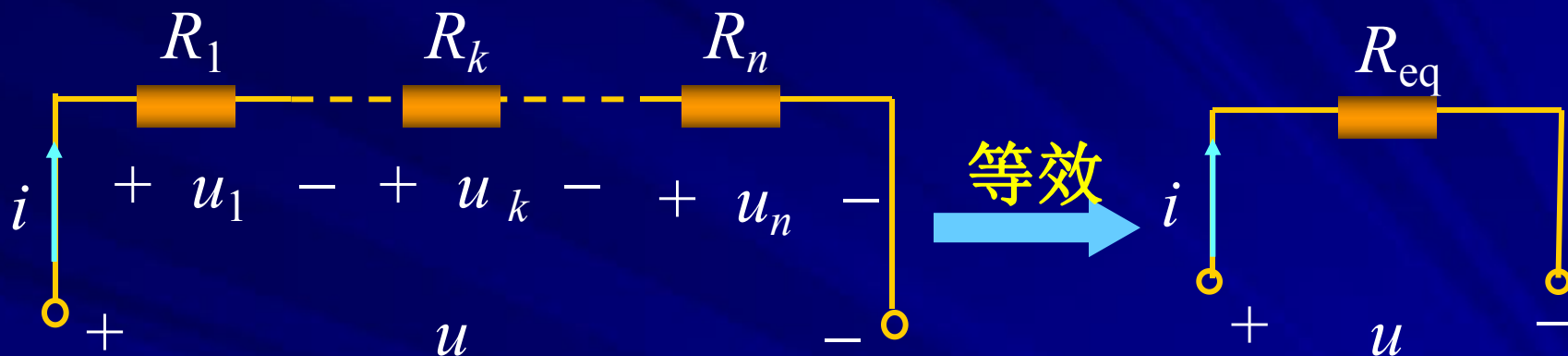
① 电路特点



- (a) 各电阻顺序连接，流过同一电流 (KCL)。
- (b) 总电压等于各串联电阻的电压之和 (KVL)。

$$u = u_1 + \cdots + u_k + \cdots + u_n$$

②等效电阻



由欧姆定律

$$u = R_1 i + \cdots + R_k i + \cdots + R_n i = (R_1 + \cdots + R_n) i = R_{eq} i$$

$$R_{eq} = R_1 + \cdots + R_k + \cdots + R_n = \sum_{k=1}^n R_k > R_k$$



结论 串联电路的总电阻等于各分电阻之和。

③串联电阻的分压

$$u_k = R_k i = R_k \frac{u}{R_{\text{eq}}} = \frac{R_k}{R_{\text{eq}}} u < u$$

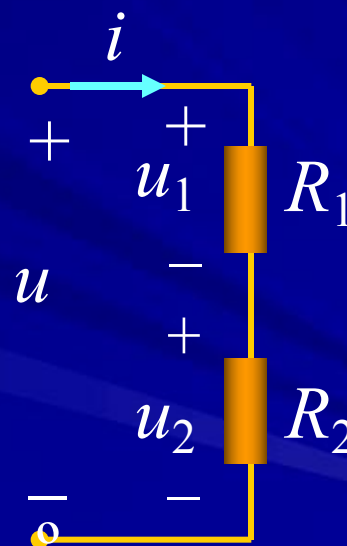


表明

电压与电阻成正比，因此串联电阻电路可作分压电路。

例3-1 两个电阻的分压。

$$u_1 = \frac{R_1}{R_1 + R_2} u \quad u_2 = \frac{R_2}{R_1 + R_2} u$$



④功率

$$p_1 = R_1 i^2, \quad p_2 = R_2 i^2, \quad \dots, \quad p_n = R_n i^2$$

$$p_1 : p_2 : \dots : p_n = R_1 : R_2 : \dots : R_n$$

总功率

$$p = R_{\text{eq}} i^2 = (R_1 + R_2 + \dots + R_n) i^2$$

$$= R_1 i^2 + R_2 i^2 + \dots + R_n i^2$$



表明

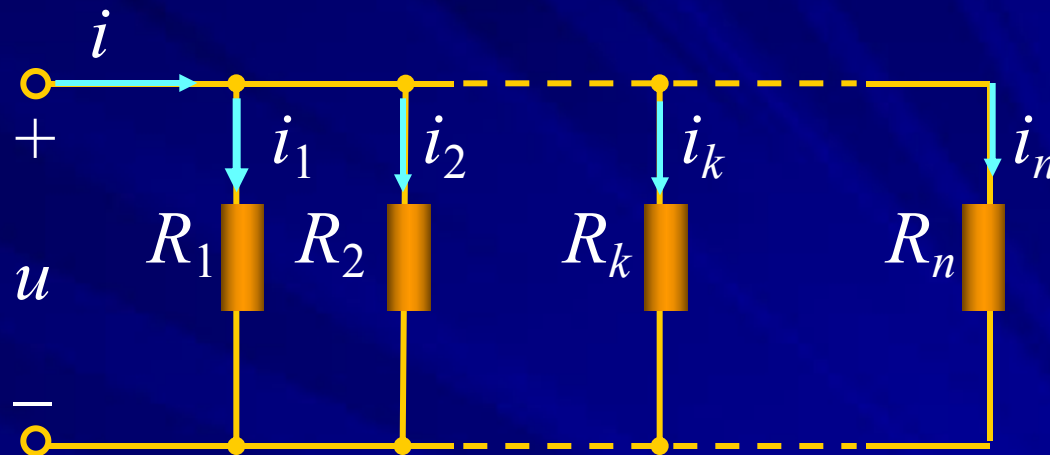
$$= p_1 + p_2 + \dots + p_n$$

①电阻串联时，各电阻消耗的功率与电阻大小成正比。

②等效电阻消耗的功率等于各串联电阻消耗功率的总和。

2. 电阻并联

① 电路特点

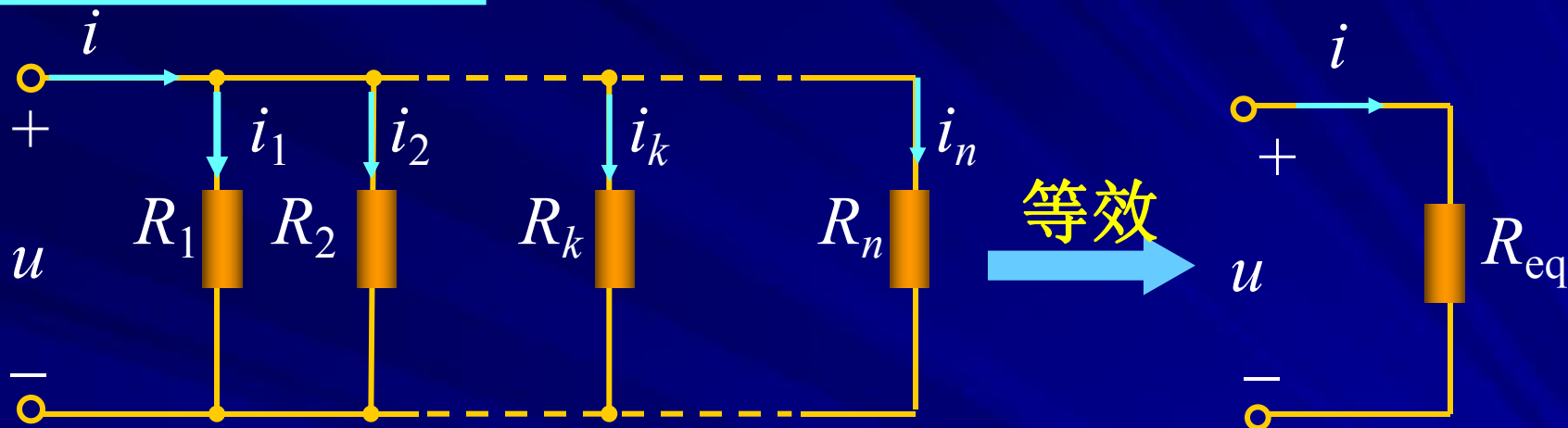


(a) 各电阻两端为同一电压 (KVL)。

(b) 总电流等于流过各并联电阻的电流之和(KCL)。

$$i = i_1 + i_2 + \dots + i_k + \dots + i_n$$

②等效电阻



由KCL:
$$i = i_1 + i_2 + \dots + i_k + \dots + i_n$$
$$= u/R_1 + u/R_2 + \dots + u/R_n$$
$$= u(1/R_1 + 1/R_2 + \dots + 1/R_n) = uG_{eq}$$
$$G_{eq} = G_1 + G_2 + \dots + G_n = \sum_{k=1}^n G_k > G_k$$



结论 等效电导等于并联的各电导之和。

$$\frac{1}{R_{\text{eq}}} = G_{\text{eq}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \cdots + \frac{1}{R_n} \quad \text{即} \quad R_{\text{eq}} < R_k$$

③并联电阻的分流

电流分配与
电导成正比

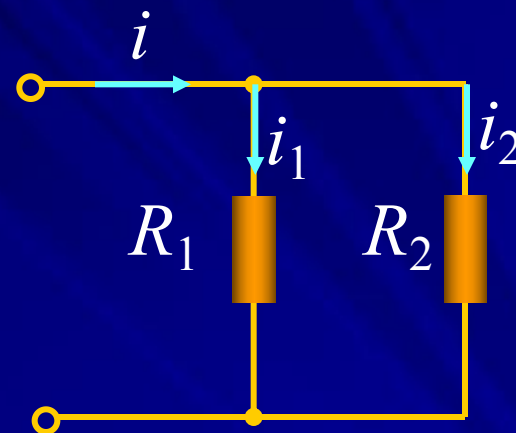
$$\frac{i_k}{i} = \frac{u / R_k}{u / R_{\text{eq}}} = \frac{G_k}{G_{\text{eq}}} \quad \longrightarrow \quad i_k = \frac{G_k}{G_{\text{eq}}} i$$

例3-2 两电阻的分流。

$$R_{\text{eq}} = \frac{1/R_1 \cdot 1/R_2}{1/R_1 + 1/R_2} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$

$$i_1 = \frac{1/R_1}{1/R_1 + 1/R_2} i = \frac{R_2 i}{R_1 + R_2}$$

$$i_2 = \frac{1/R_2}{1/R_1 + 1/R_2} i = \frac{R_1 i}{R_1 + R_2} = i - i_1$$



④功率

$$p_1 = G_1 u^2, \quad p_2 = G_2 u^2, \quad \dots, \quad p_n = G_n u^2$$

$$p_1 : p_2 : \dots : p_n = G_1 : G_2 : \dots : G_n$$

总功率

$$\begin{aligned} p &= G_{\text{eq}} u^2 = (G_1 + G_2 + \dots + G_n) u^2 \\ &= G_1 u^2 + G_2 u^2 + \dots + G_n u^2 \\ &= p_1 + p_2 + \dots + p_n \end{aligned}$$



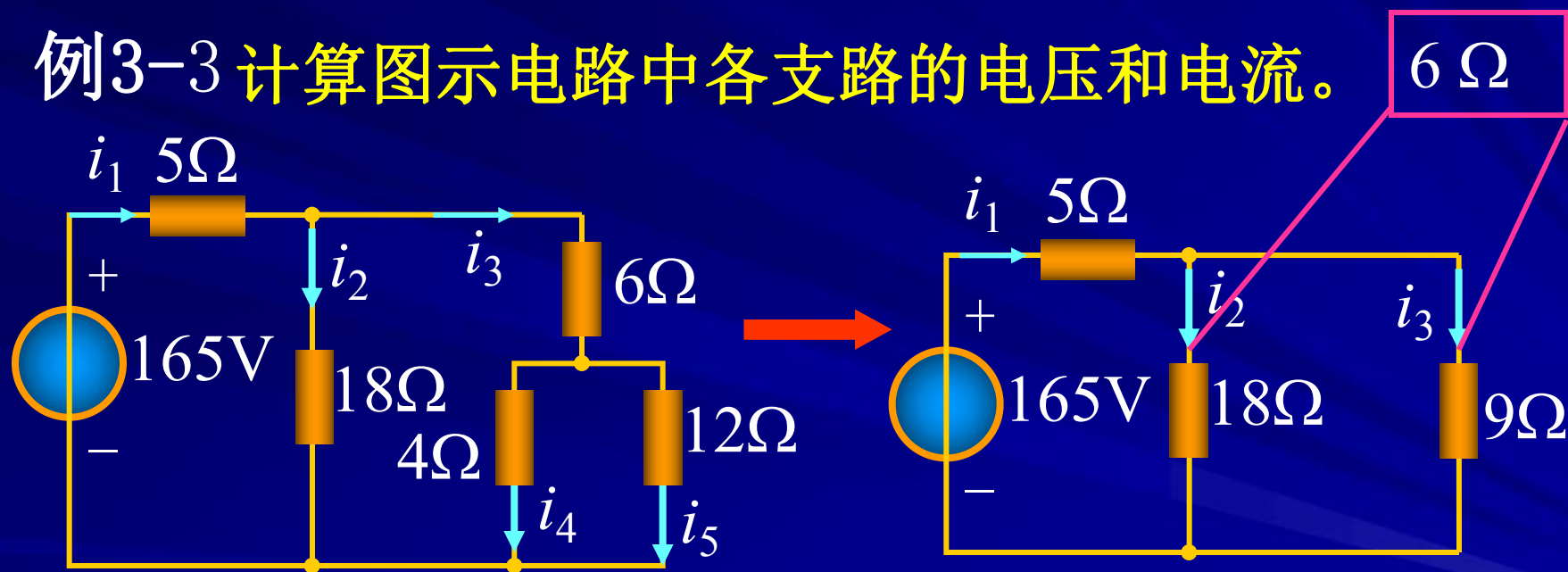
表明 ①电阻并联时，各电阻消耗的功率与电阻大小成反比。

②等效电阻消耗的功率等于各并联电阻消耗功率的总和。

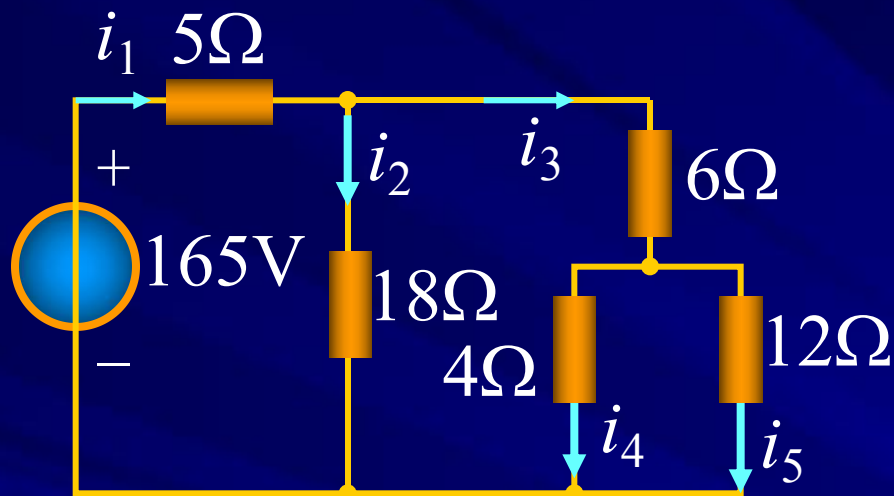
3. 电阻的串并联

电路中有电阻的串联，又有电阻的并联，这种连接方式称为电阻的串并联。

例3-3 计算图示电路中各支路的电压和电流。



解 $i_1 = 165/11\text{A} = 15\text{A}$ $u_2 = 6i_1 = 6 \times 15\text{V} = 90\text{V}$

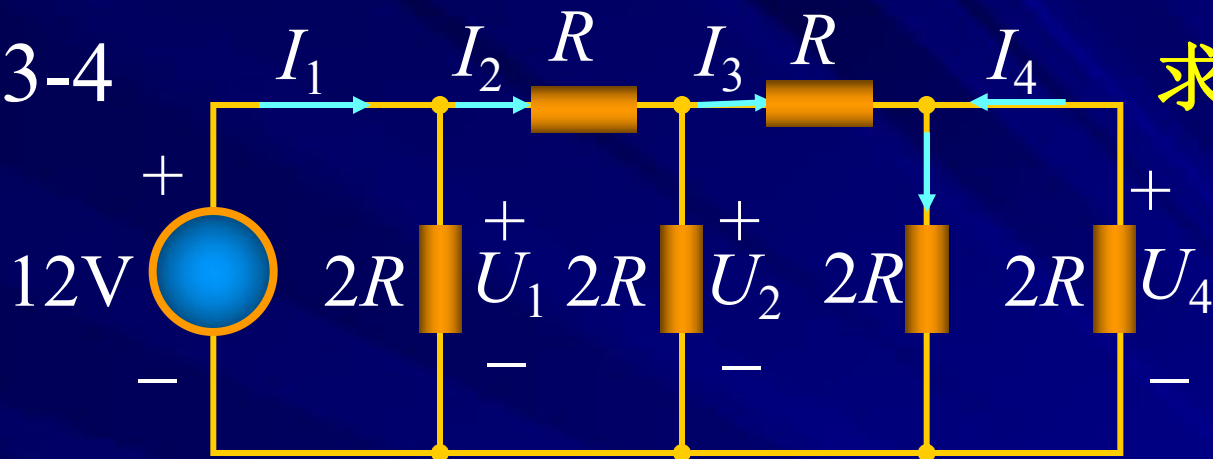


$$i_2 = 90/18\text{A} = 5\text{A} \quad u_3 = 6i_3 = 6 \times 10\text{V} = 60\text{V}$$

$$i_3 = (15 - 5)\text{A} = 10\text{A} \quad u_4 = 3i_3 = 30\text{V}$$

$$i_4 = 30/4\text{A} = 7.5\text{A} \quad i_5 = (10 - 7.5)\text{A} = 2.5\text{A}$$

例3-4

求： I_1, I_4, U_4 。

解

①用分流方法做

$$I_4 = -\frac{1}{2}I_3 = -\frac{1}{4}I_2 = -\frac{1}{8}I_1 = -\frac{1}{8}\frac{12}{R} = -\frac{3}{2R}$$

$$U_4 = -I_4 \times 2R = 3V$$

$$I_1 = \frac{12}{R}$$

②用分压方法做

$$U_4 = \frac{U_2}{2} = \frac{1}{4}U_1 = 3V$$

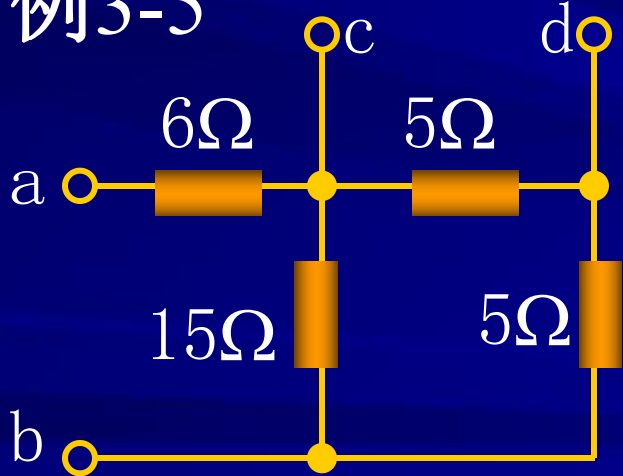
$$I_4 = -\frac{3}{2R}$$

从以上例题可得求解串、并联电路的一般步骤：

- ① 求出等效电阻或等效电导。
- ② 应用欧姆定律求出总电压或总电流。
- ③ 应用欧姆定律或分压、分流公式求各电阻上的电流和电压。

以上的关键在于识别各电阻的串联、并联关系！

例3-5



求： R_{ab} , R_{cd} 。

解

$$R_{ab} = \left[\frac{(5+5) \times 15}{(5+5) + 15} + 6 \right] \Omega = 12\Omega$$

$$R_{cd} = \frac{(15+5) \times 5}{(15+5) \times 5} \Omega = 4\Omega$$

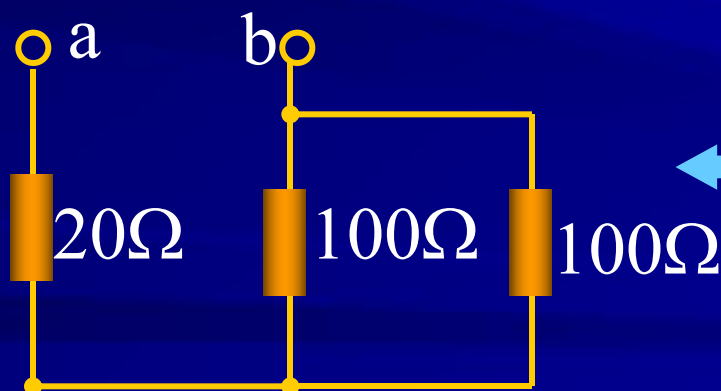
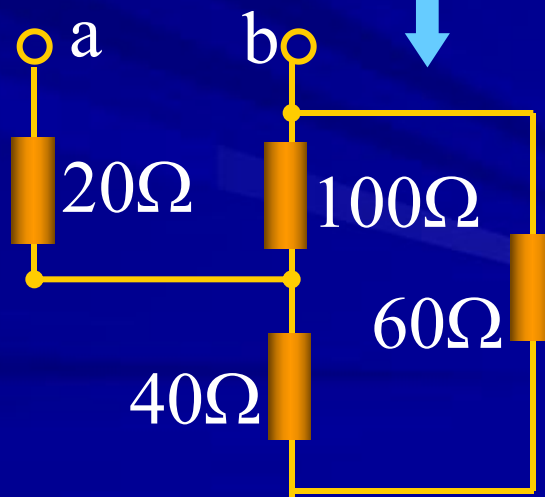
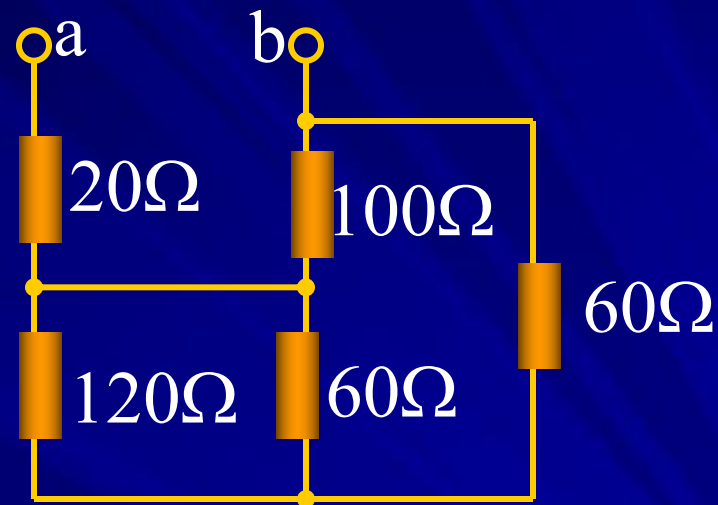
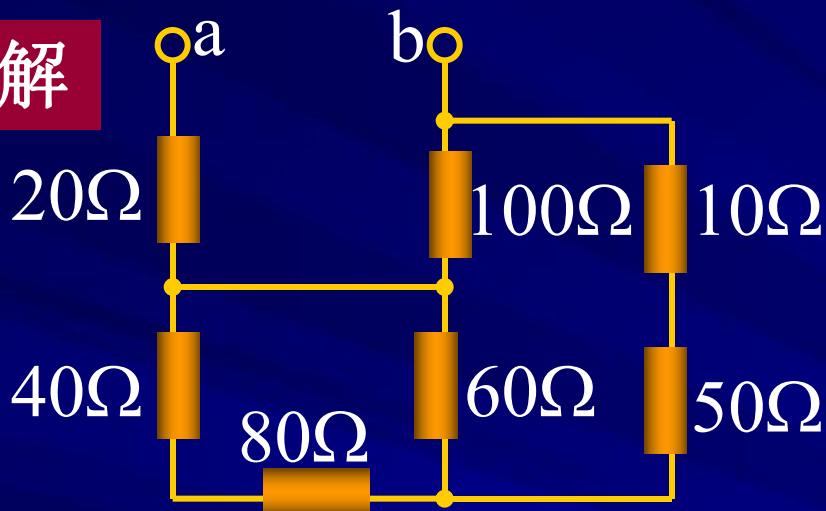


注意 等效电阻针对端口而言

例3-6 求: R_{ab} 。

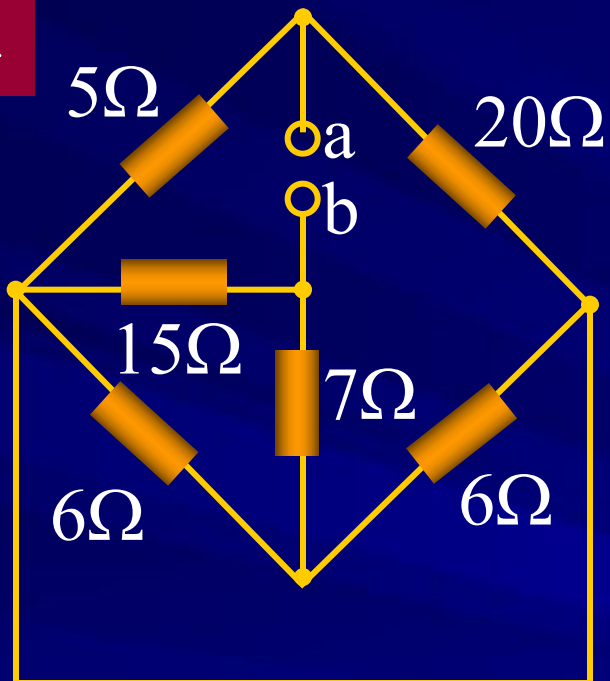
$$R_{ab} = 70\Omega$$

解

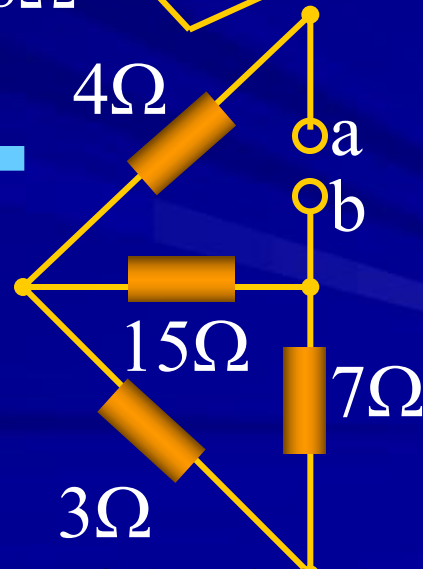
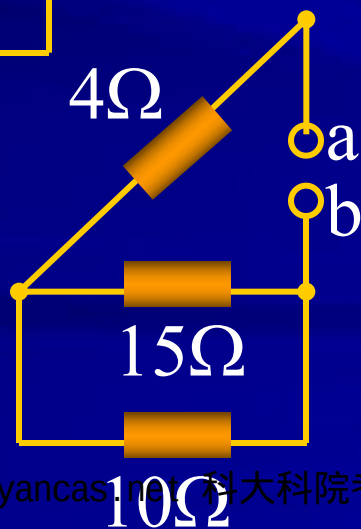
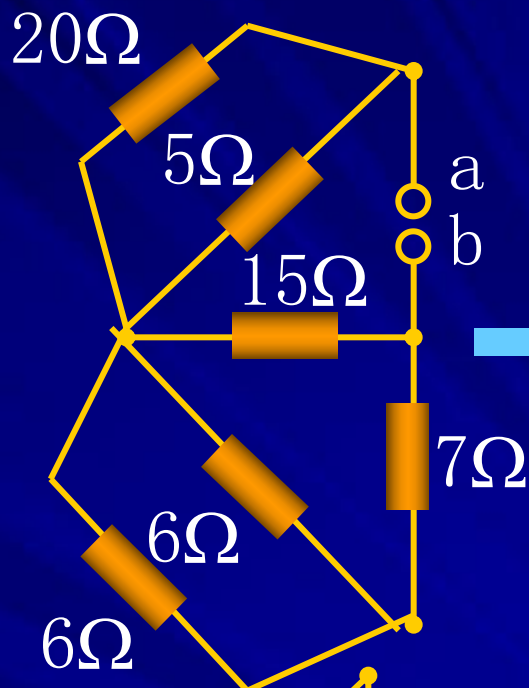


例3-7 求： R_{ab} 。

解



缩短无
电阻支路

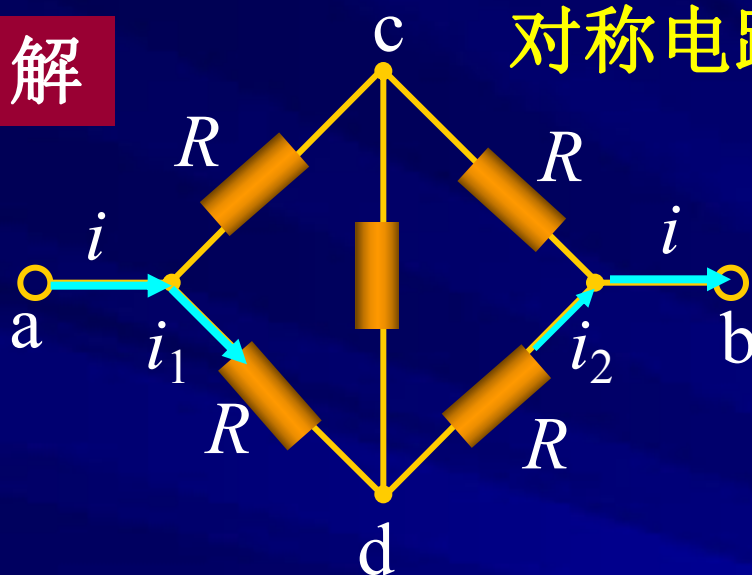


$$R_{ab} = 10\Omega$$

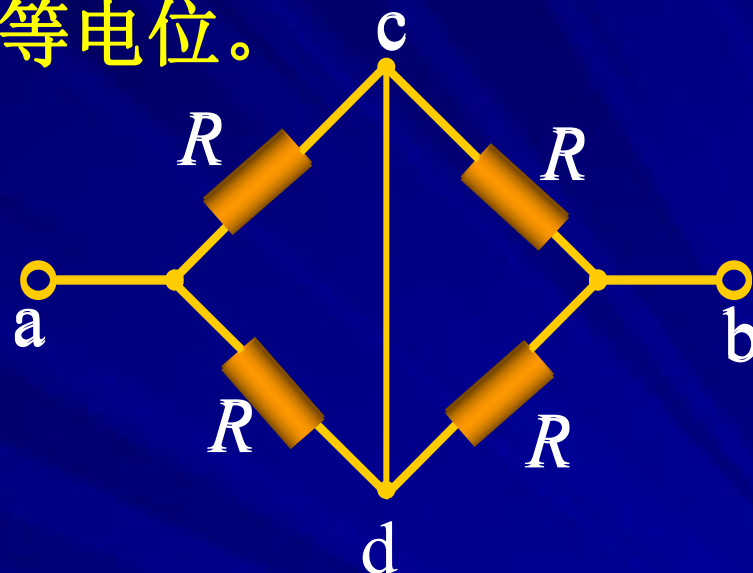
例3-8 求： R_{ab} 。

解

对称电路 c 、 d 等电位。



短路



根据电流分配

$$i_1 = \frac{1}{2}i = i_2$$

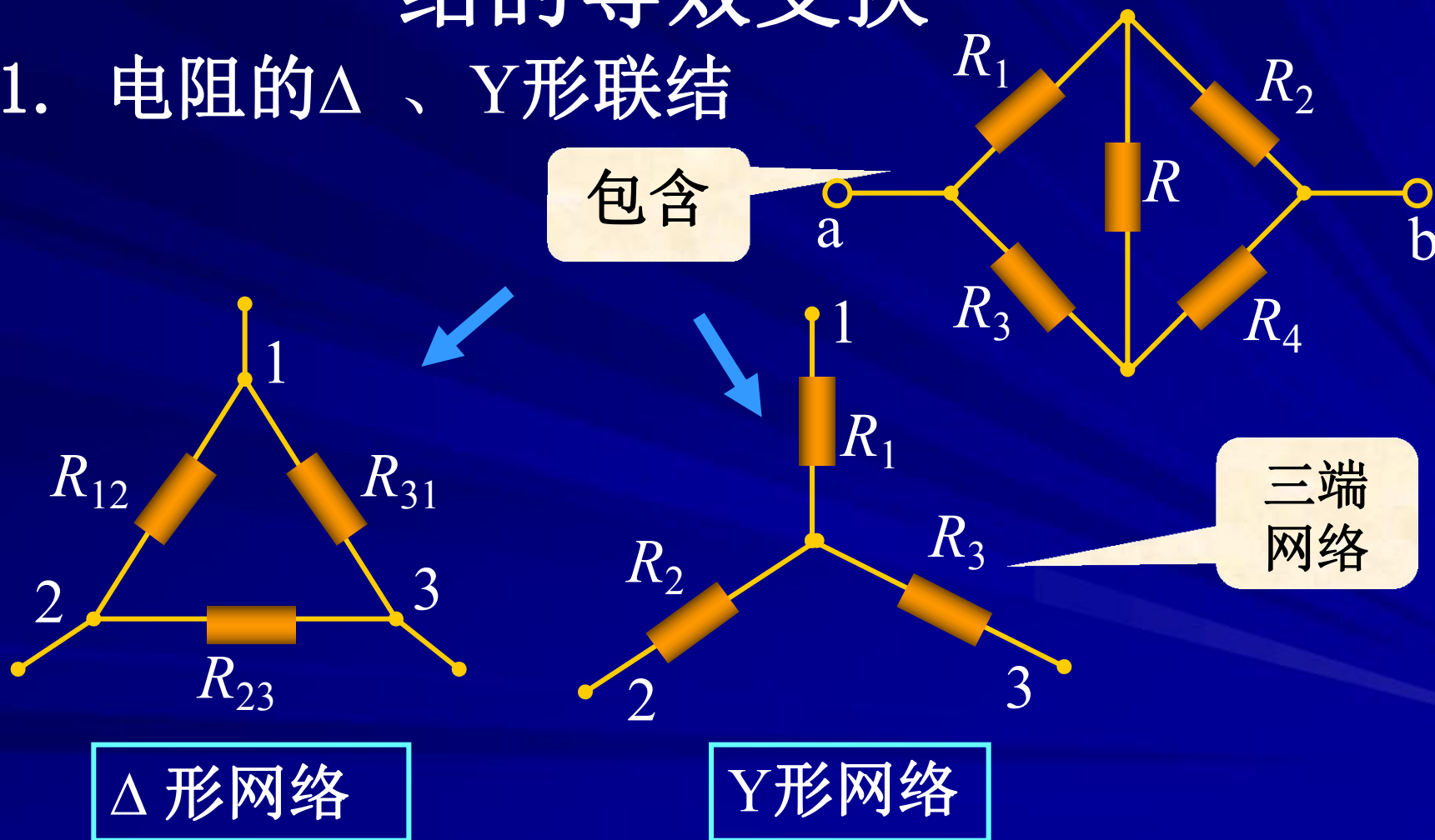
$$R_{ab} = R$$

$$u_{ab} = i_1 R + i_2 R = \left(\frac{1}{2}i + \frac{1}{2}i\right)R = iR$$

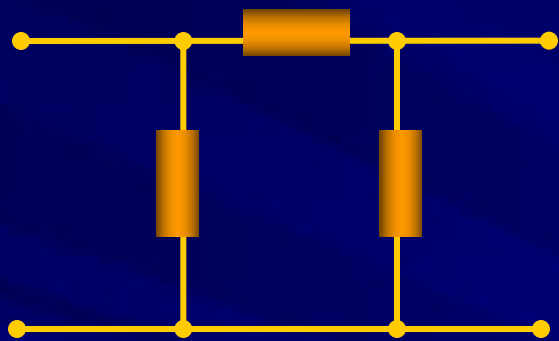
$$R_{ab} = \frac{u_{ab}}{i} = R$$

2-4 电阻的Y形联结和 Δ 形联结的等效变换

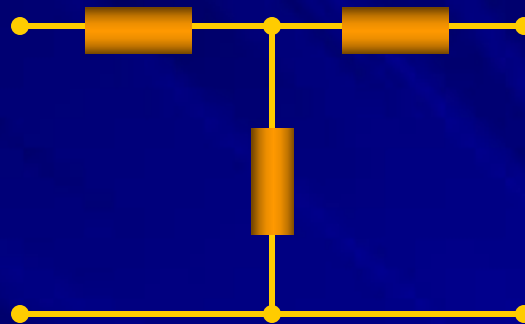
1. 电阻的 Δ 、Y形联结



Δ , Y 形网络的变形:



π 形电路 (Δ 形)

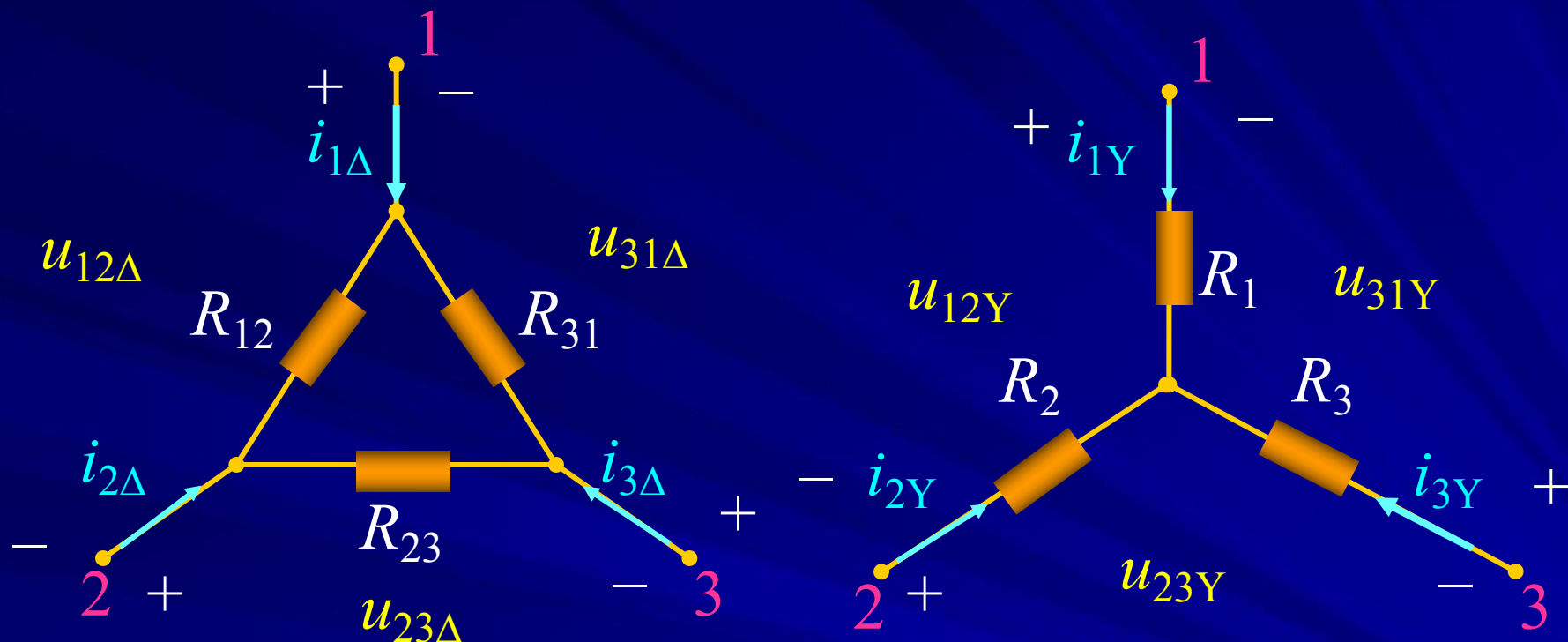


T 形电路 (Y 形)



注意 这两个电路当它们的电阻满足一定的关系时，能够相互等效。

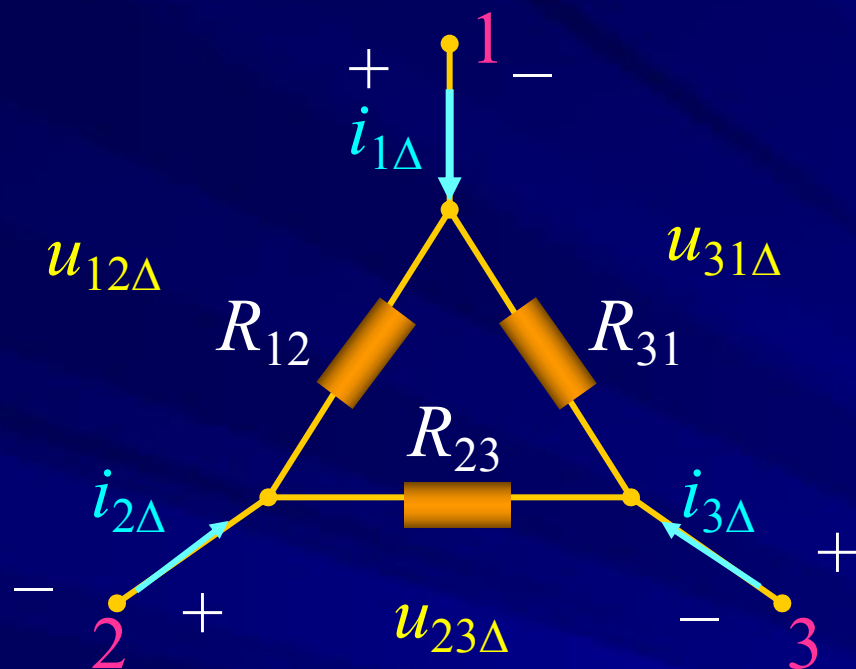
2. Δ -Y变换的等效条件



等效条件:

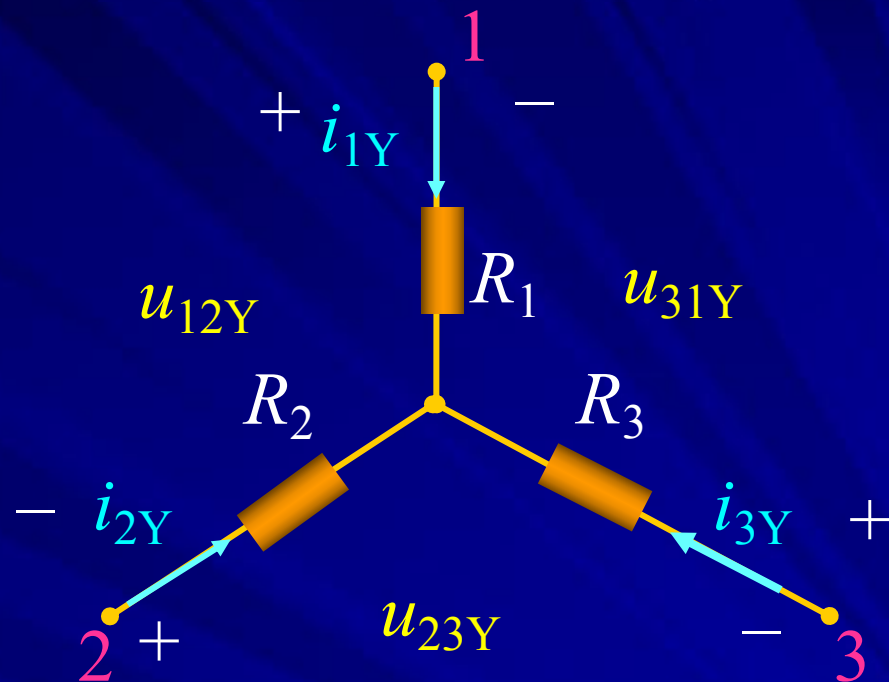
$$i_{1\Delta} = i_{1Y}, \quad i_{2\Delta} = i_{2Y}, \quad i_{3\Delta} = i_{3Y},$$

$$u_{12\Delta} = u_{12Y}, \quad u_{23\Delta} = u_{23Y}, \quad u_{31\Delta} = u_{31Y}$$



Δ形联结：用电压表示电流

$$\left. \begin{aligned} i_{1\Delta} &= u_{12\Delta} / R_{12} - u_{31\Delta} / R_{31} \\ i_{2\Delta} &= u_{23\Delta} / R_{23} - u_{12\Delta} / R_{12} \\ i_{3\Delta} &= u_{31\Delta} / R_{31} - u_{23\Delta} / R_{23} \end{aligned} \right\} (1)$$



Y形联结：用电流表示电压

$$\left. \begin{aligned} u_{12Y} &= R_1 i_{1Y} - R_2 i_{2Y} \\ u_{23Y} &= R_2 i_{2Y} - R_3 i_{3Y} \\ u_{31Y} &= R_3 i_{3Y} - R_1 i_{1Y} \\ i_{1Y} + i_{2Y} + i_{3Y} &= 0 \end{aligned} \right\} (2)$$

由式(2)解得：

$$\left. \begin{aligned} i_{1Y} &= \frac{u_{12Y}R_3 - u_{31Y}R_2}{R_1R_2 + R_2R_3 + R_3R_1} \\ i_{2Y} &= \frac{u_{23Y}R_1 - u_{12Y}R_3}{R_1R_2 + R_2R_3 + R_3R_1} \\ i_{3Y} &= \frac{u_{31Y}R_2 - u_{23Y}R_1}{R_1R_2 + R_2R_3 + R_3R_1} \end{aligned} \right\} (3)$$

$$\left. \begin{aligned} i_{1\Delta} &= u_{12\Delta}/R_{12} - u_{31\Delta}/R_{31} \\ i_{2\Delta} &= u_{23\Delta}/R_{23} - u_{12\Delta}/R_{12} \\ i_{3\Delta} &= u_{31\Delta}/R_{31} - u_{23\Delta}/R_{23} \end{aligned} \right\} (1)$$

根据等效条件，比较式(3)与式(1)，得
Y→Δ的变换条件为

$$\left. \begin{aligned} R_{12} &= R_1 + R_2 + \frac{R_1 R_2}{R_3} \\ R_{23} &= R_2 + R_3 + \frac{R_2 R_3}{R_1} \\ R_{31} &= R_3 + R_1 + \frac{R_3 R_1}{R_2} \end{aligned} \right\} \text{或} \left\{ \begin{aligned} G_{12} &= \frac{G_1 G_2}{G_1 + G_2 + G_3} \\ G_{23} &= \frac{G_2 G_3}{G_1 + G_2 + G_3} \\ G_{31} &= \frac{G_3 G_1}{G_1 + G_2 + G_3} \end{aligned} \right.$$

类似可得到由 $\Delta \rightarrow Y$ 的变换条件为

$$\left\{ \begin{aligned} G_1 &= G_{12} + G_{31} + \frac{G_{12} G_{31}}{G_{23}} \\ G_2 &= G_{23} + G_{12} + \frac{G_{23} G_{12}}{G_{31}} \\ G_3 &= G_{31} + G_{23} + \frac{G_{31} G_{23}}{G_{12}} \end{aligned} \right\} \text{或} \left\{ \begin{aligned} R_1 &= \frac{R_{12} R_{31}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}} \\ R_2 &= \frac{R_{23} R_{12}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}} \\ R_3 &= \frac{R_{31} R_{23}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}} \end{aligned} \right.$$

简记方法：

$$R_Y = \frac{\Delta \text{相邻电阻乘积}}{\sum R_\Delta}$$

Δ变Y

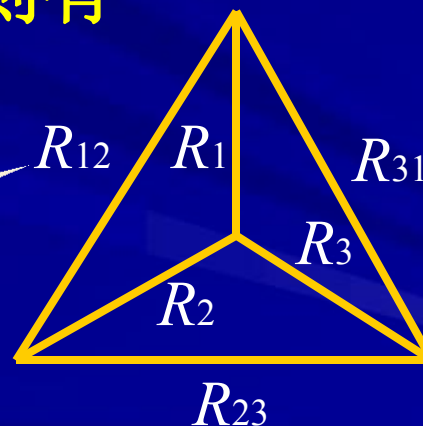
$$G_\Delta = \frac{Y \text{相邻电导乘积}}{\sum G_Y}$$

Y变Δ

特例：若三个电阻相等(对称)，则有

$$R_\Delta = 3R_Y$$

外大内小

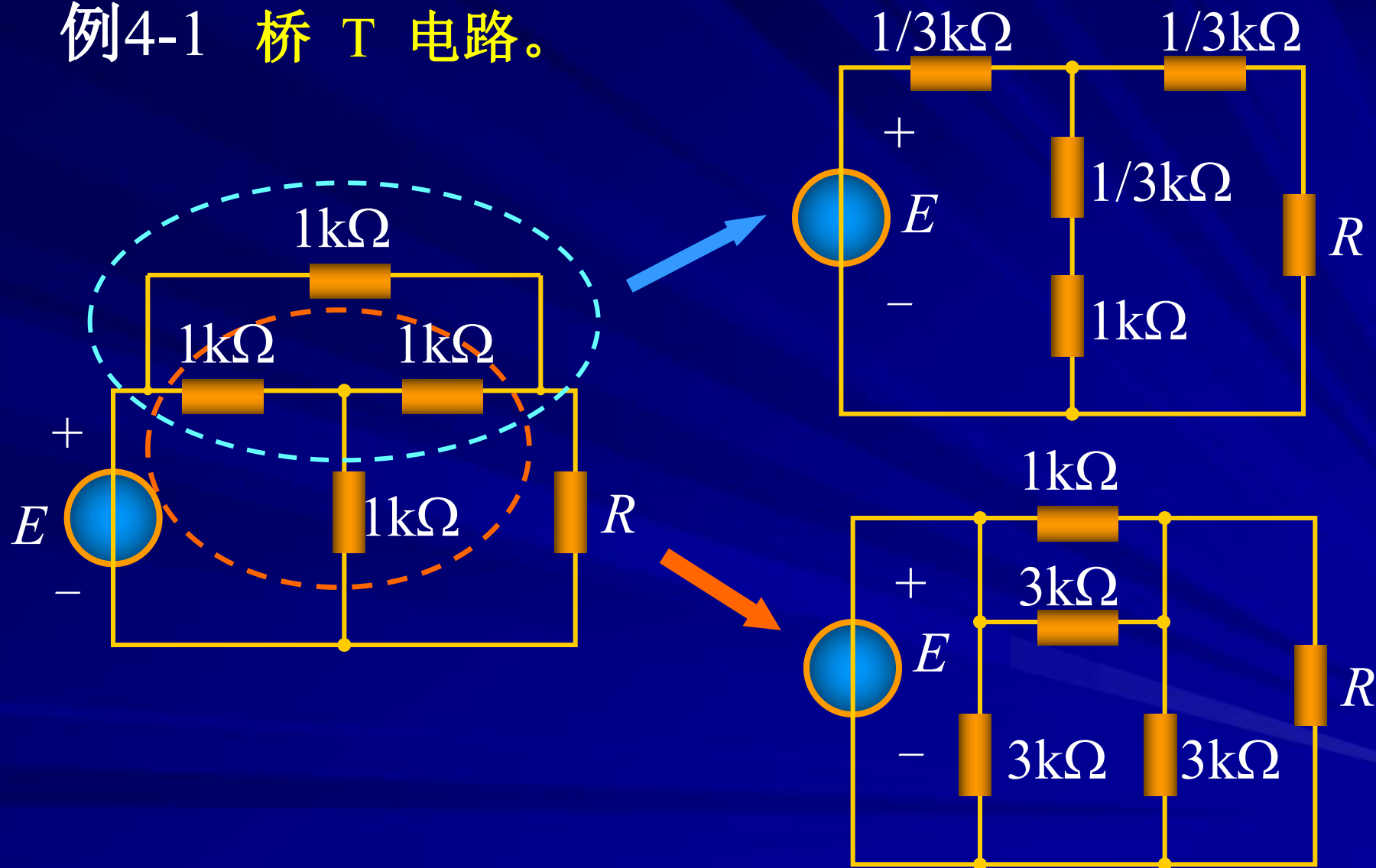


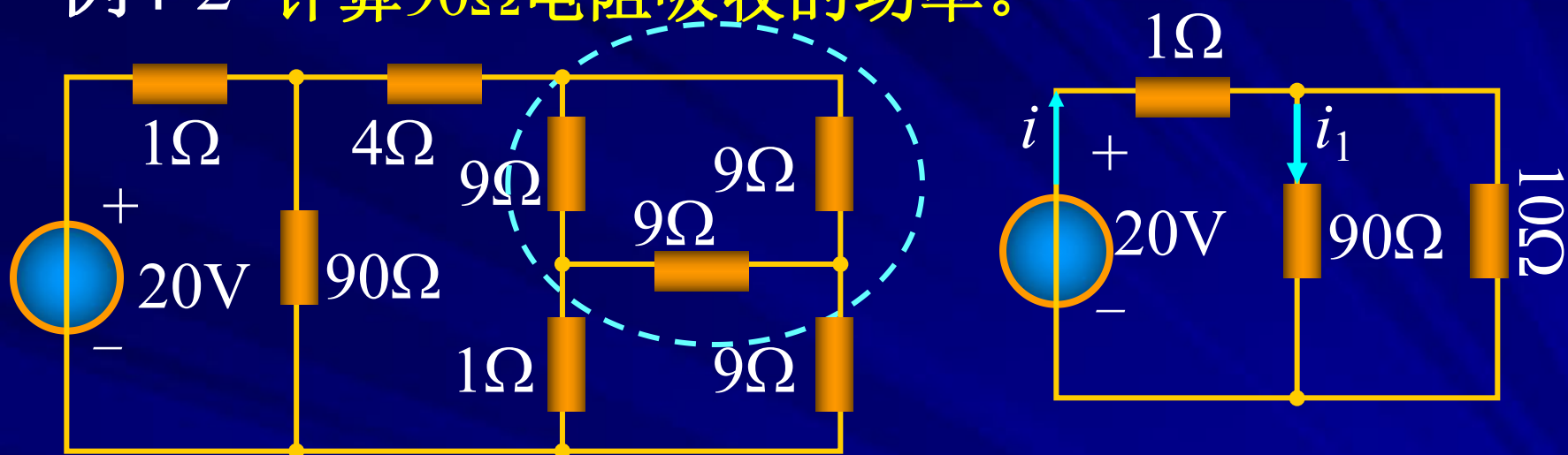


注意

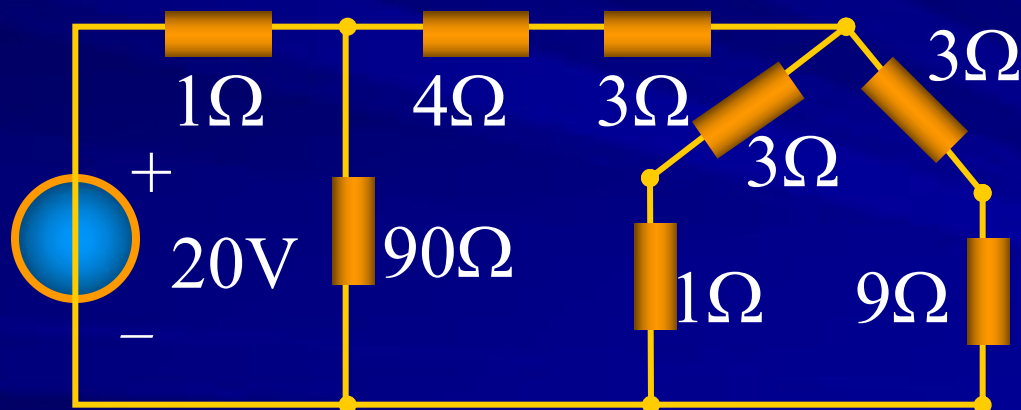
- ①等效对外部(端钮以外)有效，对内不成立。
- ②等效电路与外部电路无关。
- ③用于简化电路。

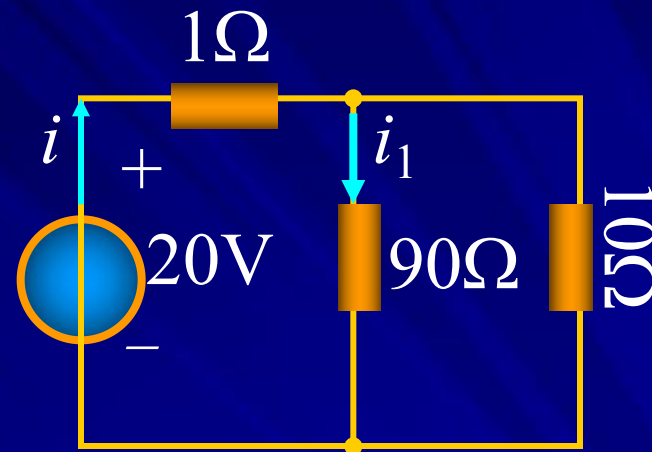
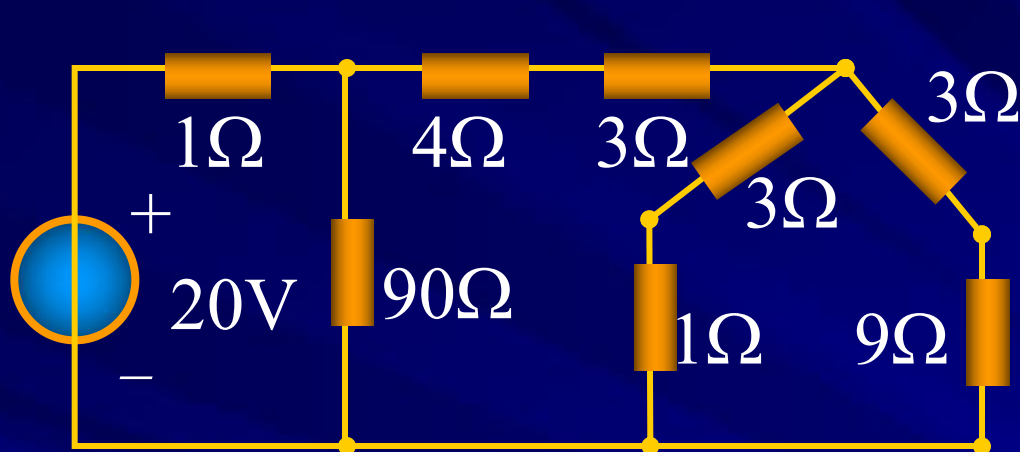
例4-1 桥 T 电路。



例4-2 计算 90Ω 电阻吸收的功率。

解





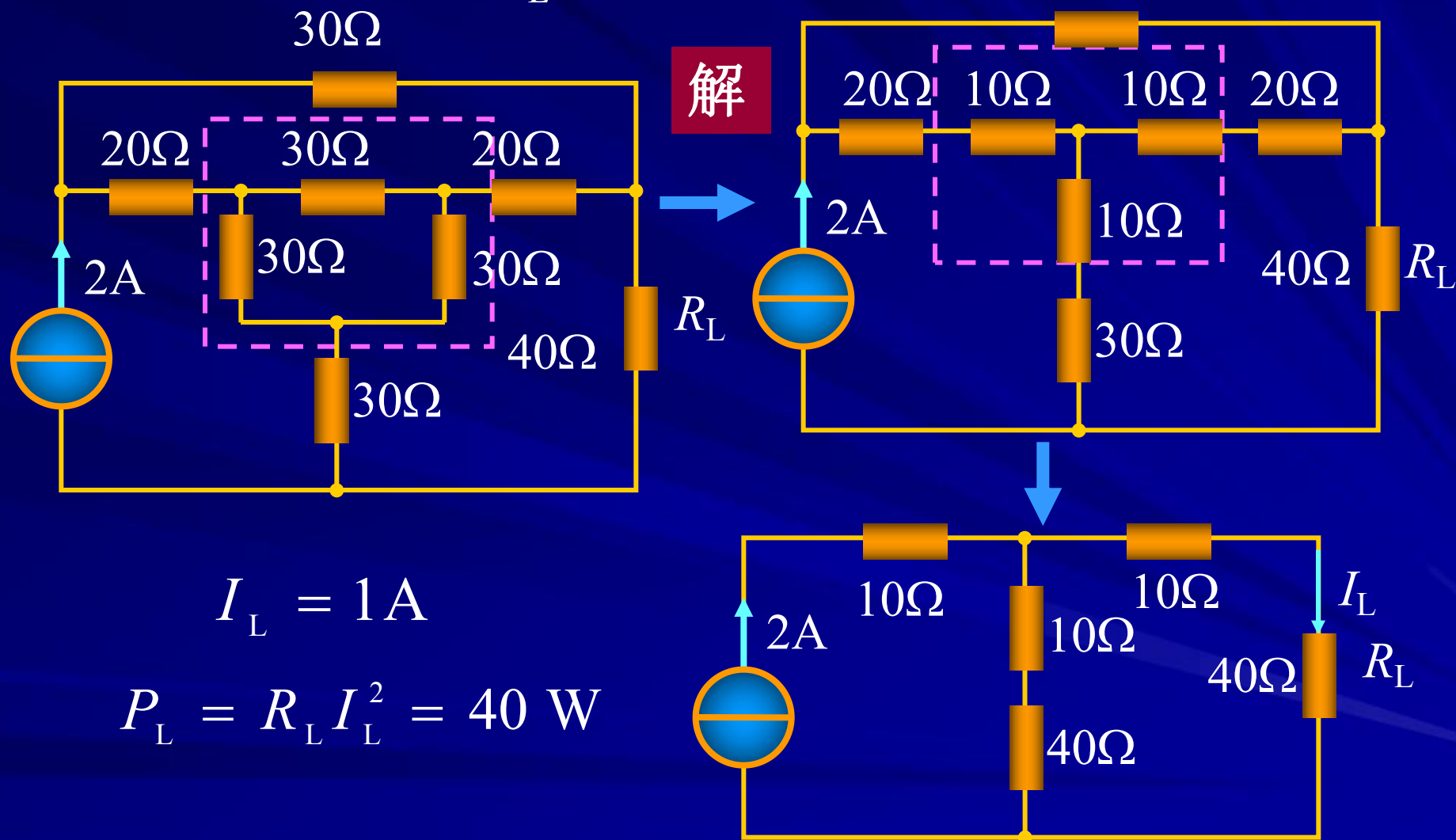
$$R_{eq} = (1 + \frac{10 \times 90}{10 + 90}) \Omega = 10 \Omega$$

$$i = 20 / 10 \text{ A} = 2 \text{ A}$$

$$i_1 = \frac{10 \times 2}{10 + 90} \text{ A} = 0.2 \text{ A}$$

$$p = 90 i_1^2 = 90 \times (0.2)^2 \text{ W} = 3.6 \text{ W}$$

例4-3 求负载电阻 R_L 消耗的功率。



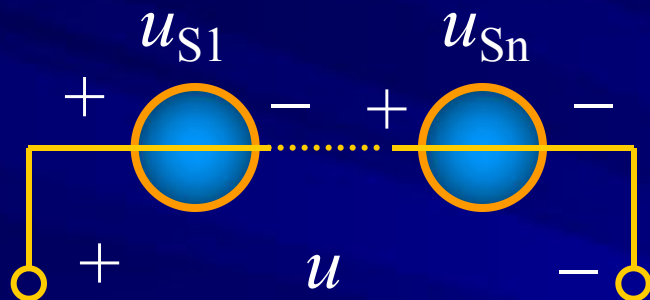
2-5 电压源、电流源的串联和并联

1. 理想电压源的串联和并联

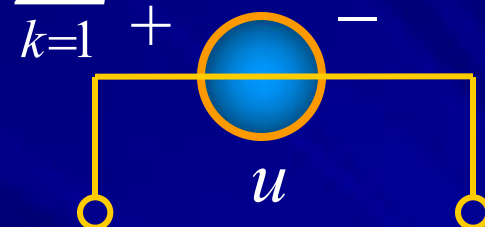
注意参考方向

① 串联

$$u = u_{S1} + u_{S2} + \cdots + u_{Sn} = \sum_{k=1}^n u_{Sk}$$



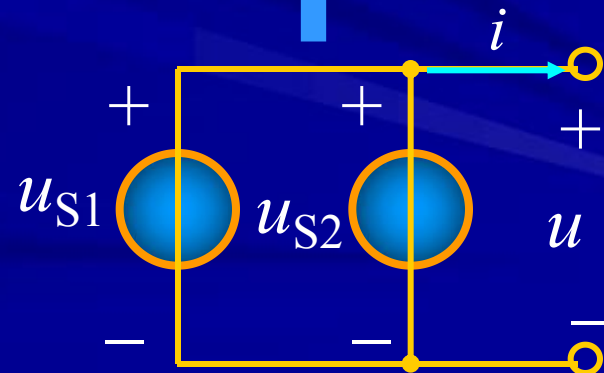
等效电路



② 并联

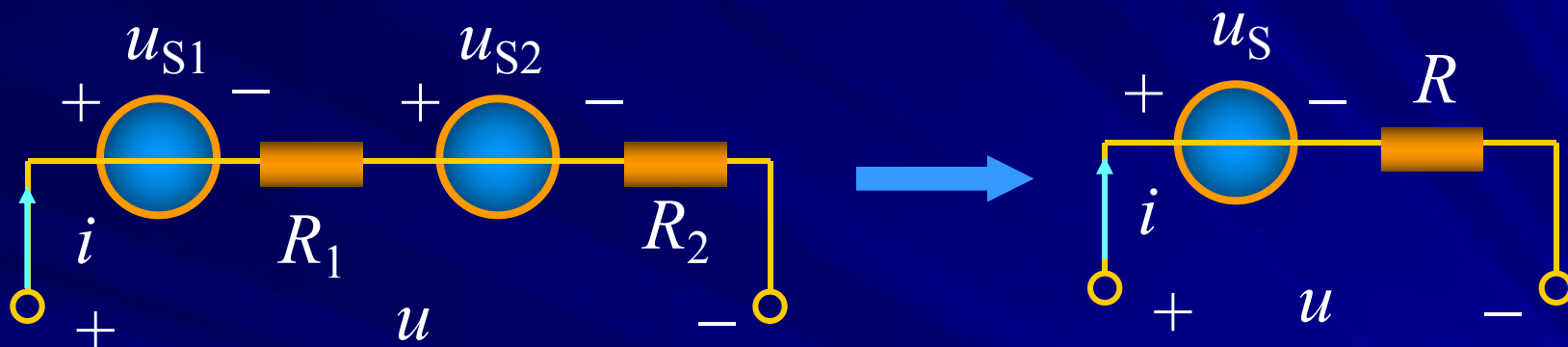
$$u = u_{S1} = u_{S2}$$

等效电路

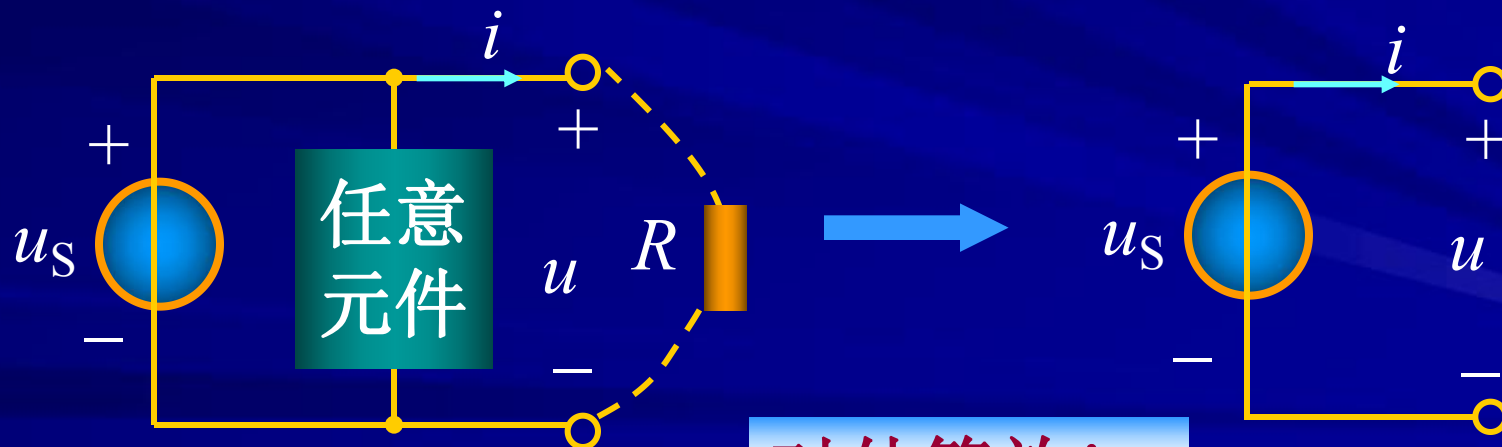


注意 相同的理想电压源才能并联, 电源中的电流不确定。

③电压源与支路的串、并联等效



$$u = u_{S1} + R_1 i + u_{S2} + R_2 i = (u_{S1} + u_{S2}) + (R_1 + R_2) i = u_S + R i$$



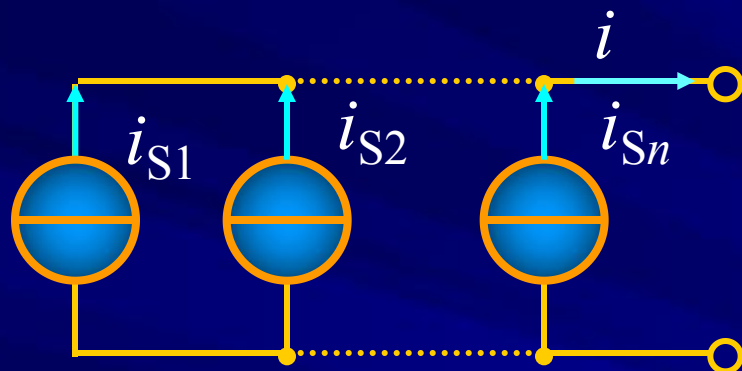
对外等效！

2. 理想电流源的串联和并联

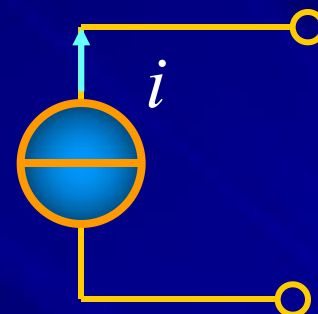
注意参考方向

① 并联

$$i = i_{S1} + i_{S2} + \cdots + i_{Sn} = \sum i_{Sk}$$



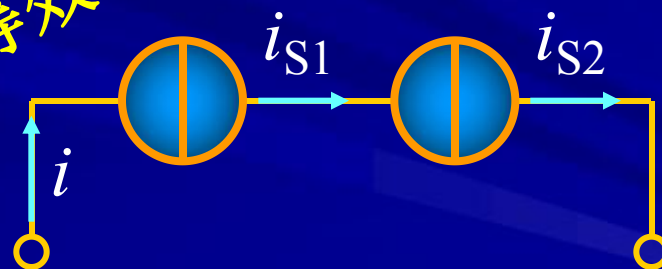
等效电路



等效电路

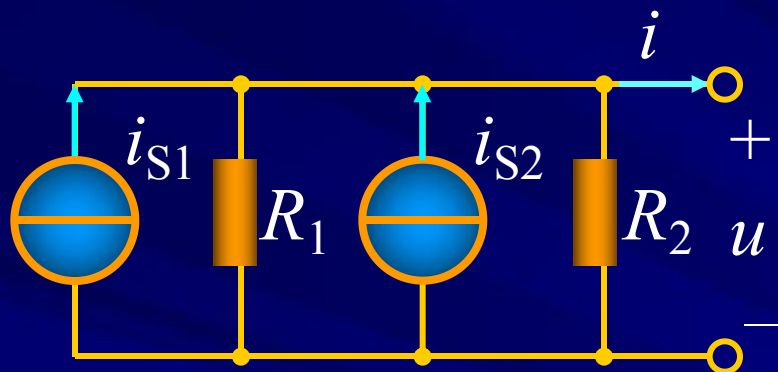
② 串联

$$i = i_{S1} = i_{S2}$$

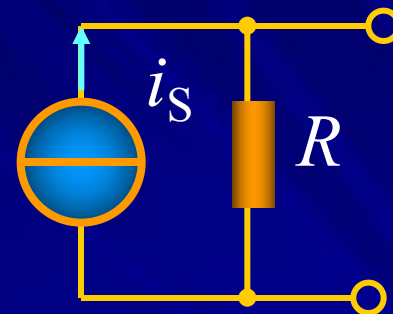


注意 相同的理想电流源才能串联，每个电流源的端电压不能确定。

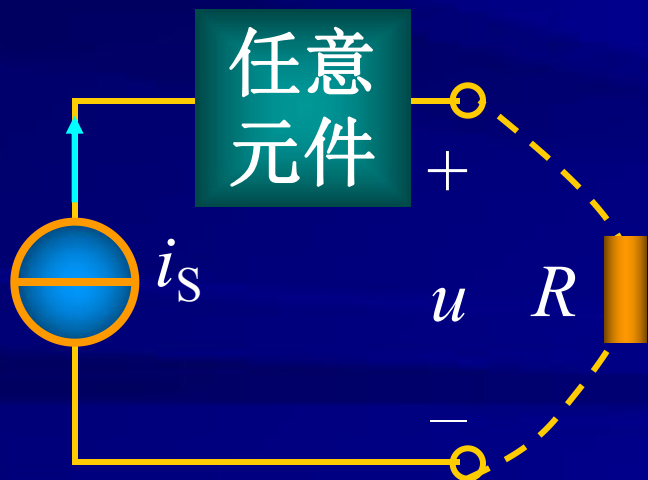
3. 电流源与支路的串、并联等效



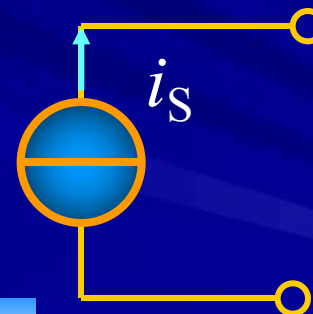
等效电路



$$i = i_{S1} - u/R_1 + i_{S2} - u/R_2 = i_{S1} + i_{S2} - (1/R_1 + 1/R_2)u = i_S - u/R$$



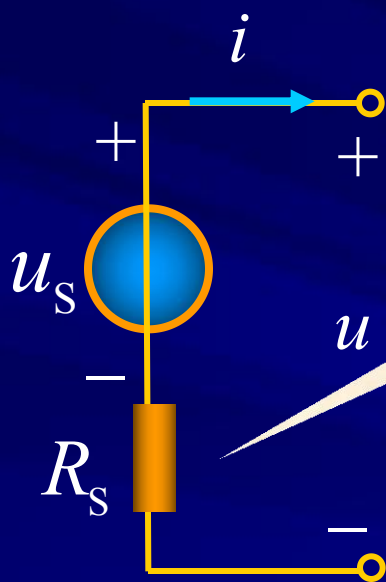
等效电路



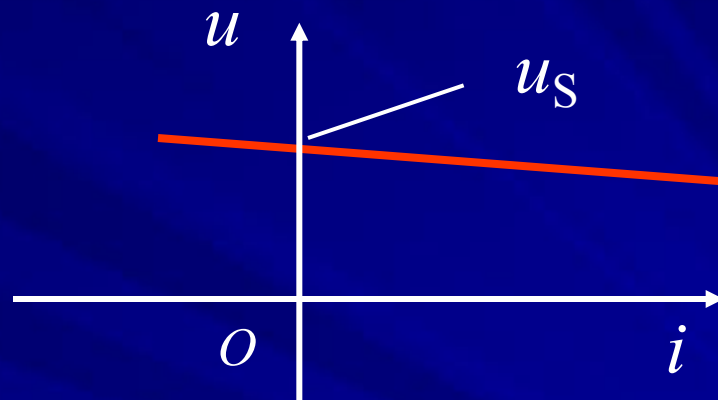
对外等效！

2-6 实际电源的两种模型及其等效变换

1. 实际电压源 伏安特性： $u = u_S - R_S i$



考虑内阻



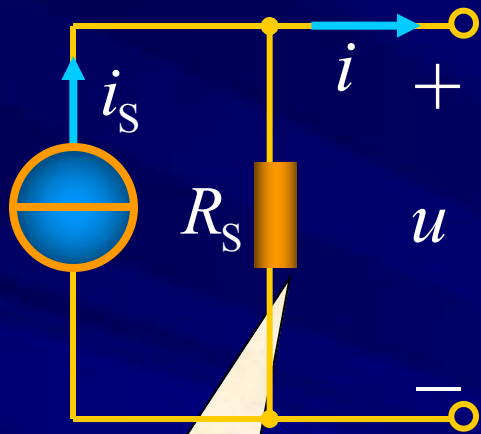
一个好的电压源要求： $R_S \rightarrow 0$



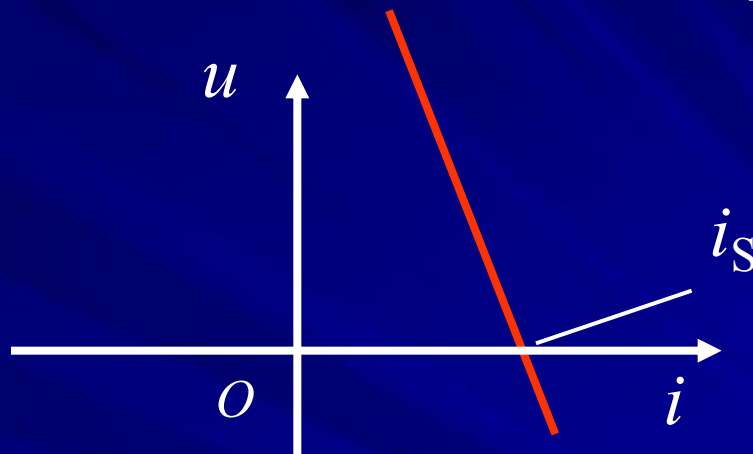
注意 实际电压源也不允许短路。因其内阻小，若短路，电流很大，可能烧毁电源。

2. 实际电流源

伏安特性：
$$i = i_S - \frac{u}{R_S}$$



考虑内阻



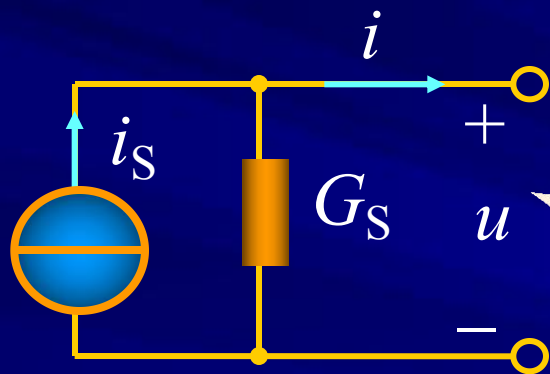
一个好的电流源要求： $R_S \rightarrow \infty$



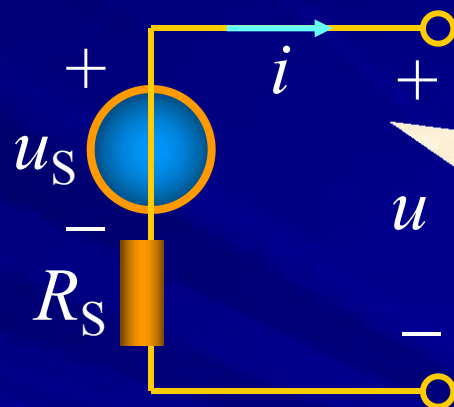
注意 实际电流源也不允许开路。因其内阻大，若开路，电压很高，可能烧毁电源。

3. 实际电压源和实际电流源的等效变换

实际电压源、实际电流源两种模型可以进行等效变换，所谓的等效是指端口的电压、电流关系在转换过程中保持不变。



实际
电流
源



实际
电压
源

端口特性 $i = i_S - G_S u$

$$u = u_S - R_S i$$

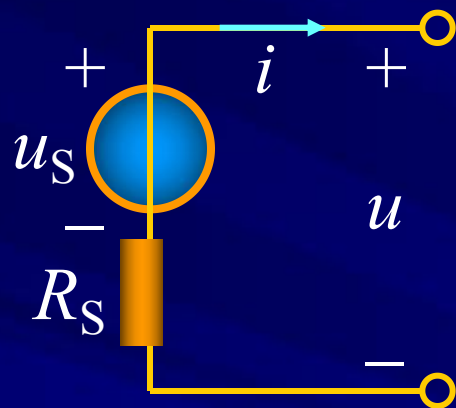
$$i = u_S / R_S - u / R_S$$

$$\begin{aligned} i_S &= u_S / R_S \\ G_S &= 1 / R_S \end{aligned}$$

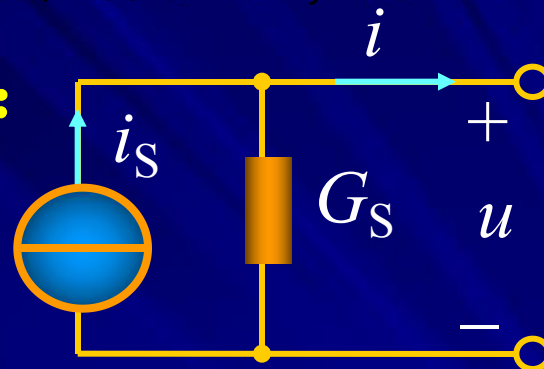
比较可得等效条件



小结 电压源变换为电流源：

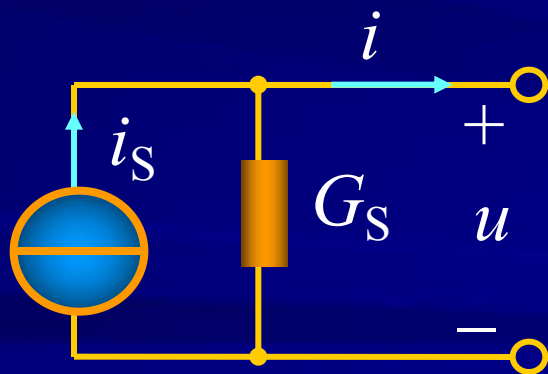


变换

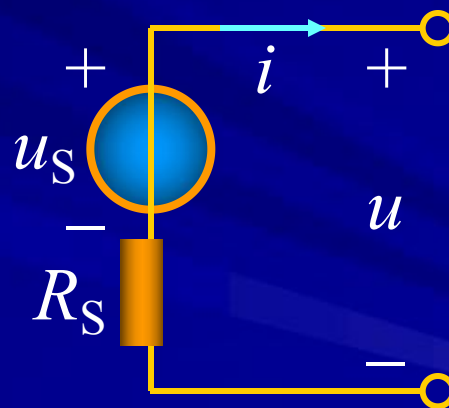


$$i_S = u_S / R_S, \quad G_S = 1 / R_S$$

电流源变换为电压源：



变换



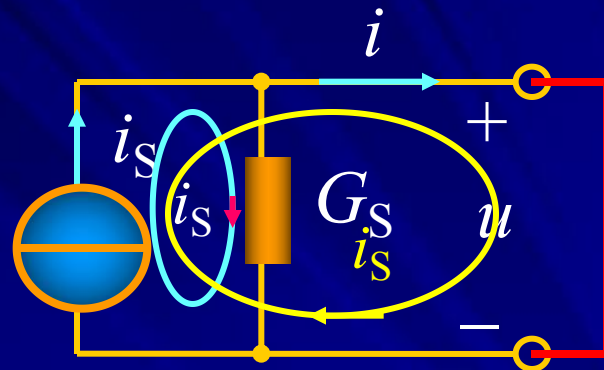
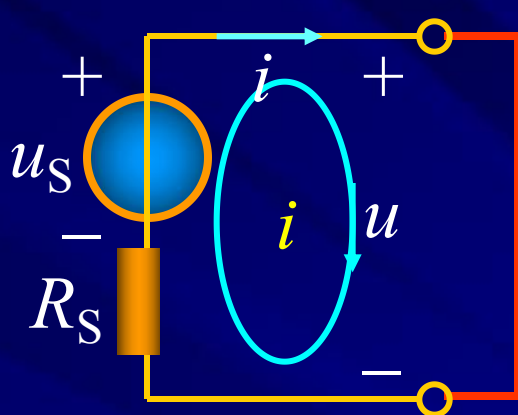
$$u_S = i_S / G_S, \quad R_S = 1 / G_S$$

**注意**

①变换关系

数值关系

方向：电流源电流方向与电压源电压方向相反。



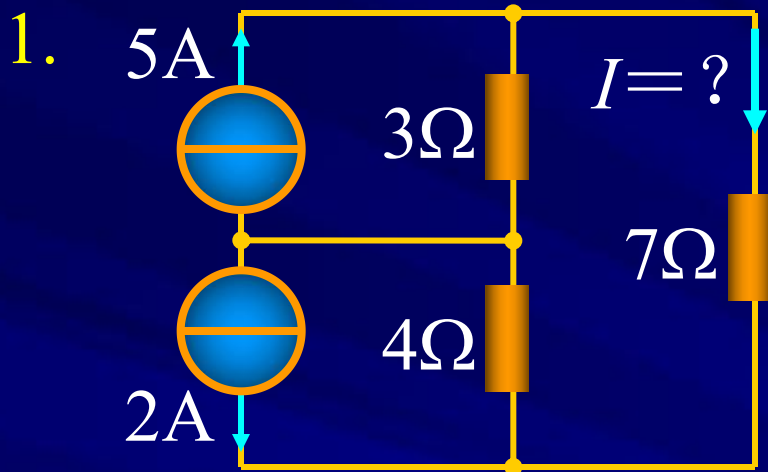
②等效是对外部电路等效，对内部电路是不等效的。

表现在

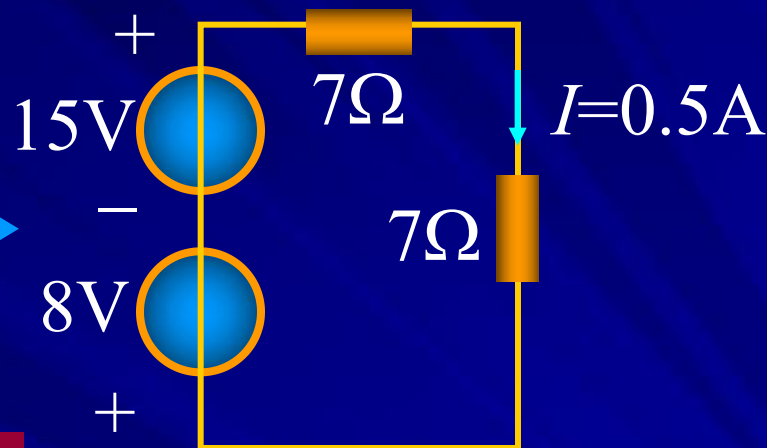
- 电压源开路， R_S 上无电流流过；
电流源开路， G_S 上有电流流过。
- 电压源短路， R_S 上有电流；
电流源短路， G_S 上无电流。

③理想电压源与理想电流源不能相互转换。

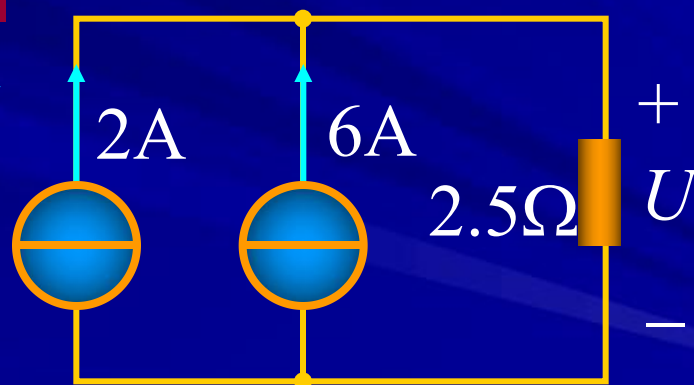
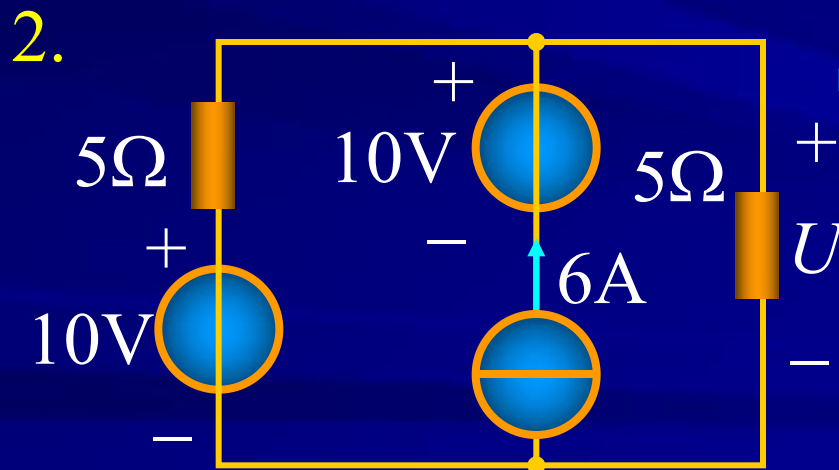
例6-1 利用电源转换简化电路计算。



解



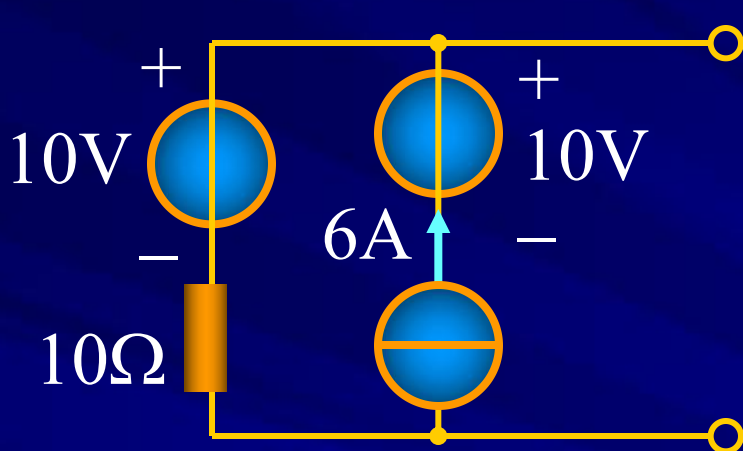
解



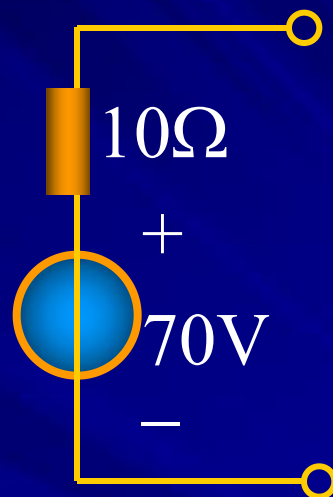
$$U=20V$$

例6-2 把电路转换成一个电压源和一个电阻的串联。

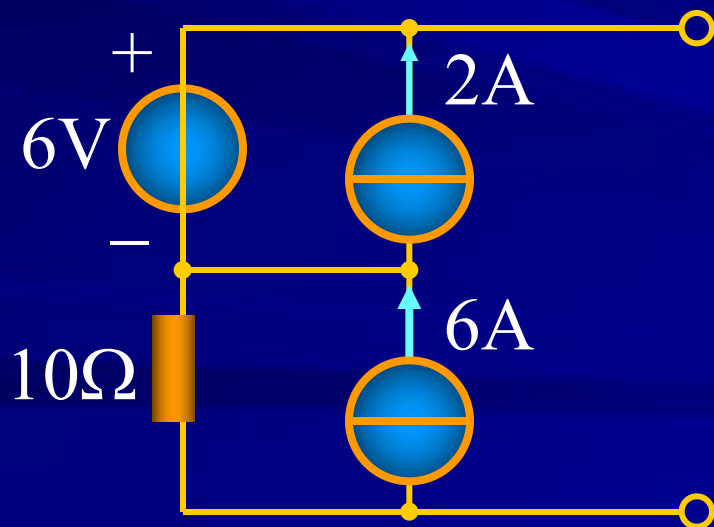
1.



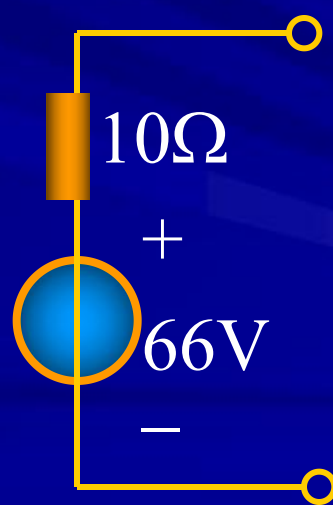
解

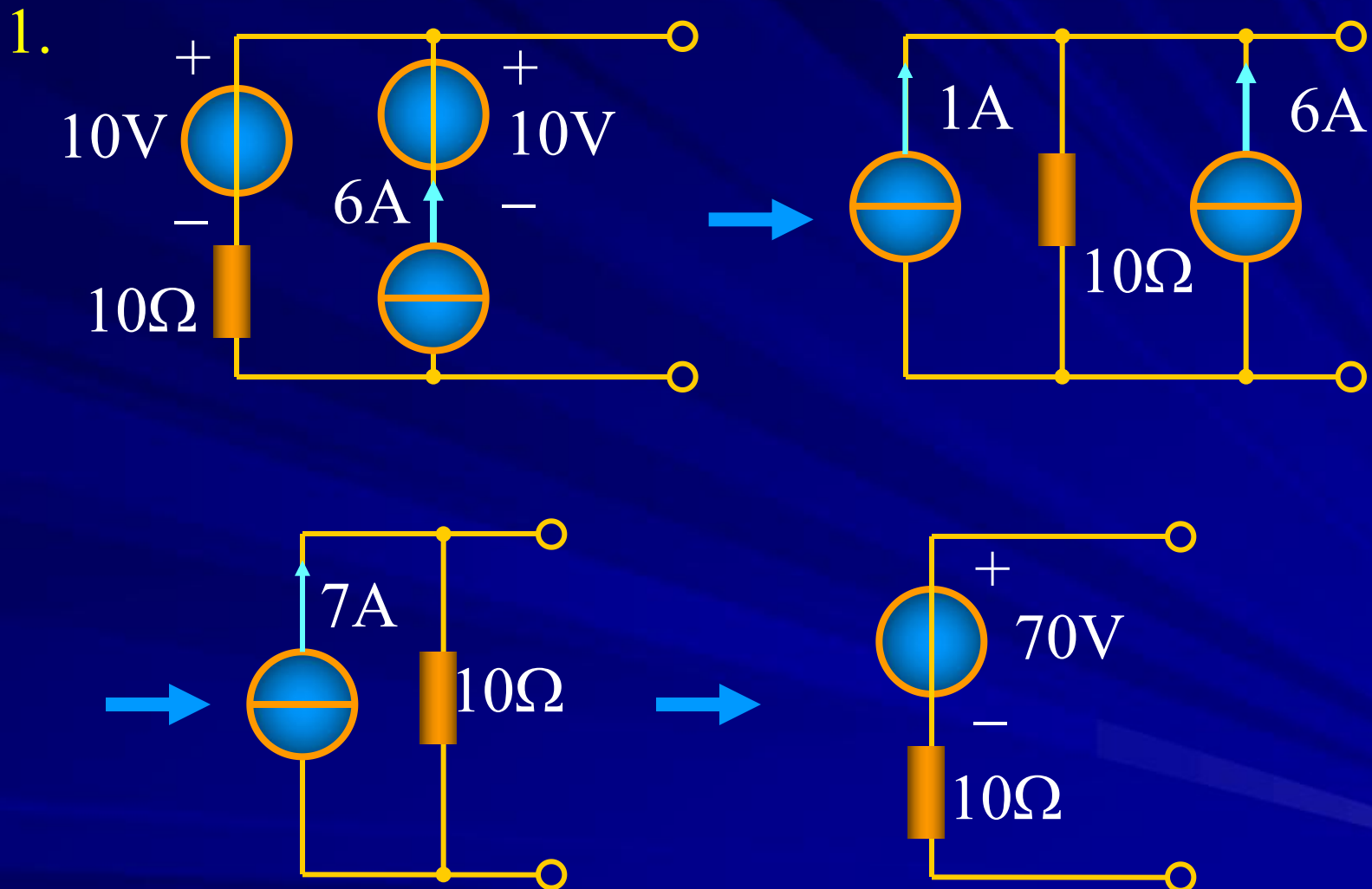


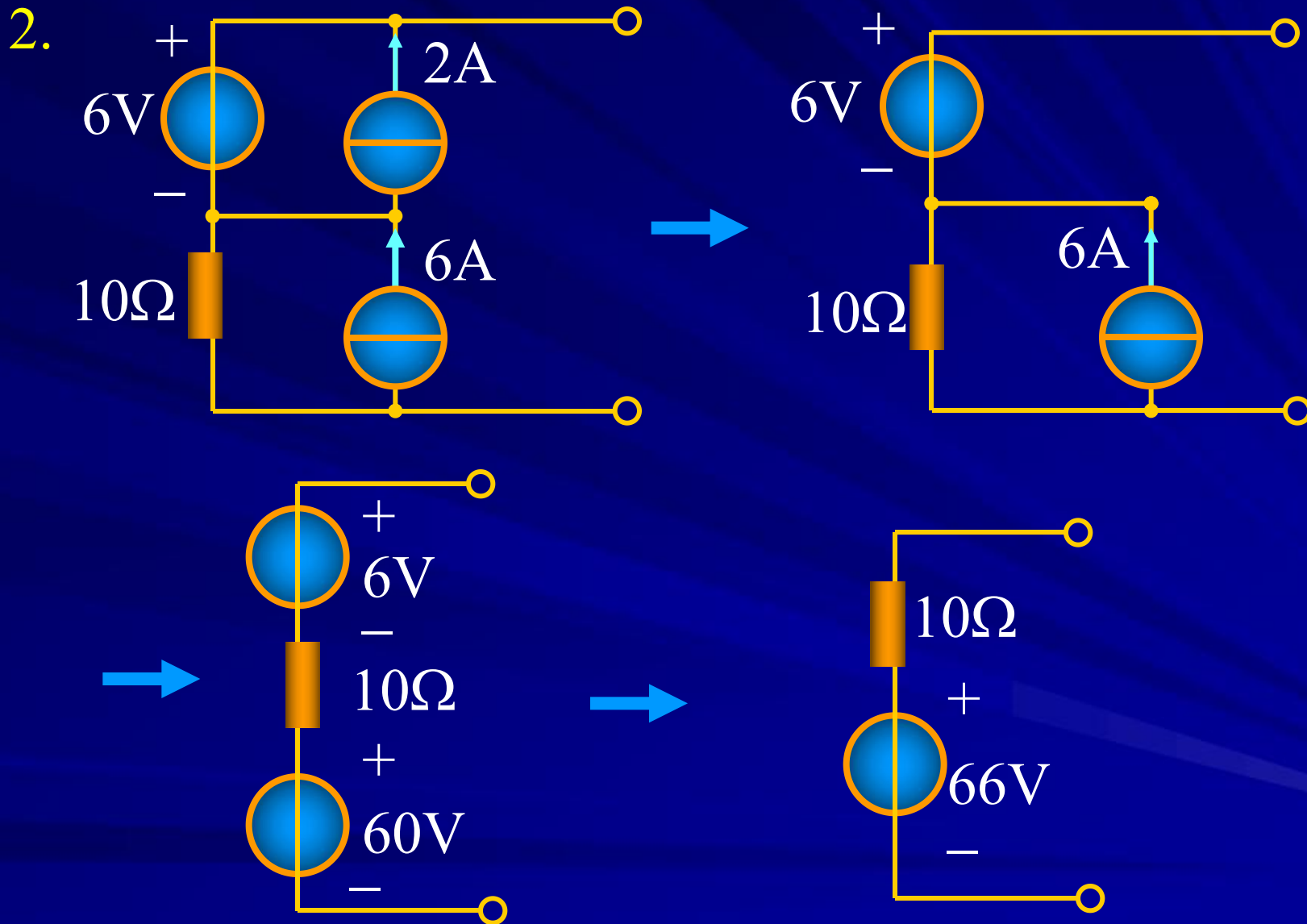
2.

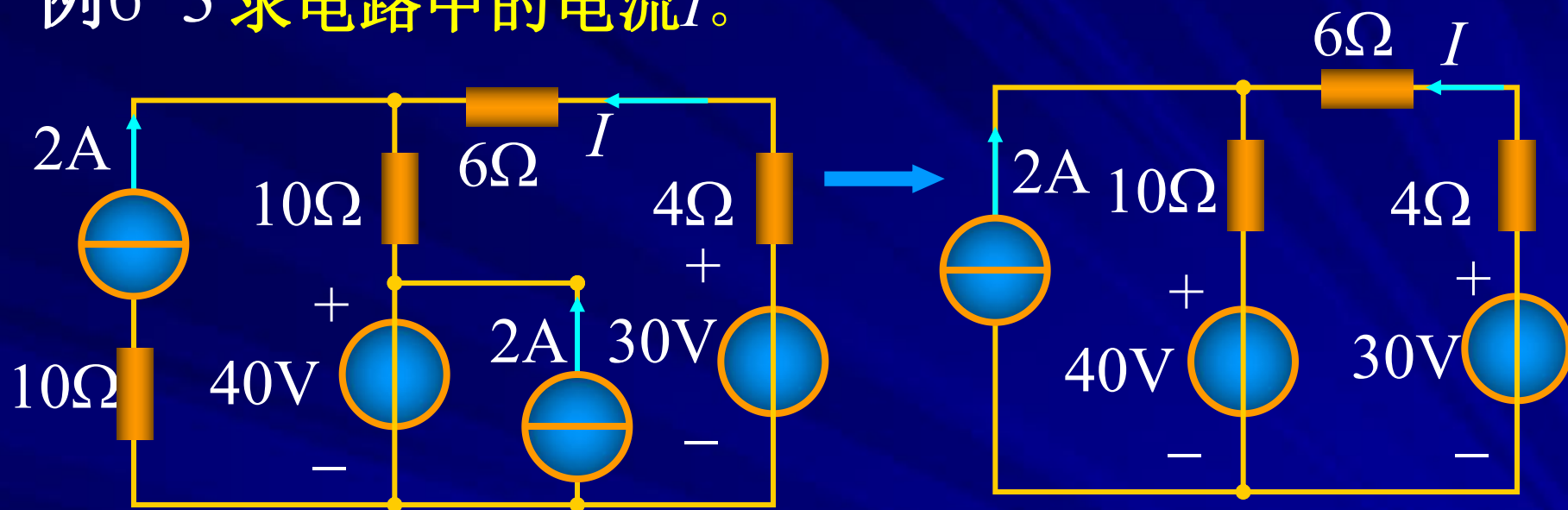


解



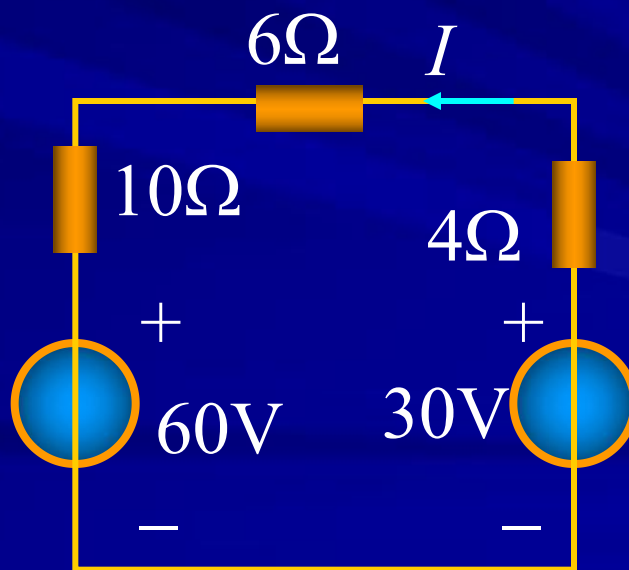




例6-3 求电路中的电流 I 。

解

$$I = \frac{30 - 60}{20} \text{ A} = -1.5 \text{ A}$$



例6-4 求电流 i_1 。

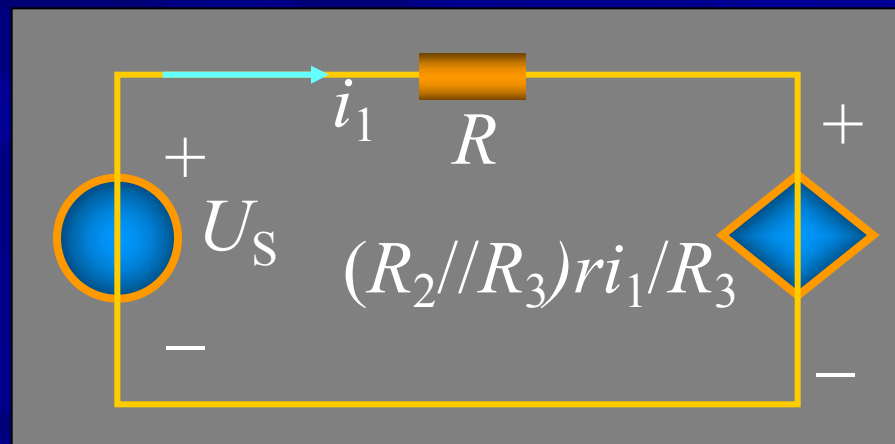
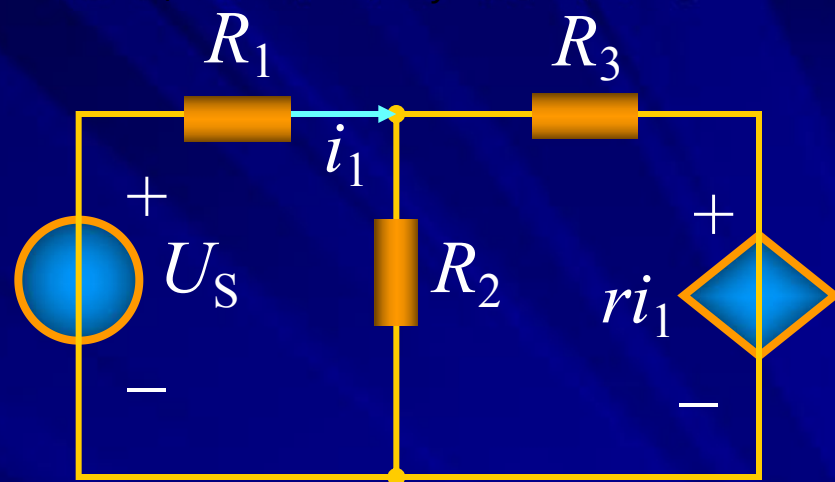
解

$$R = R_1 + \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3}$$

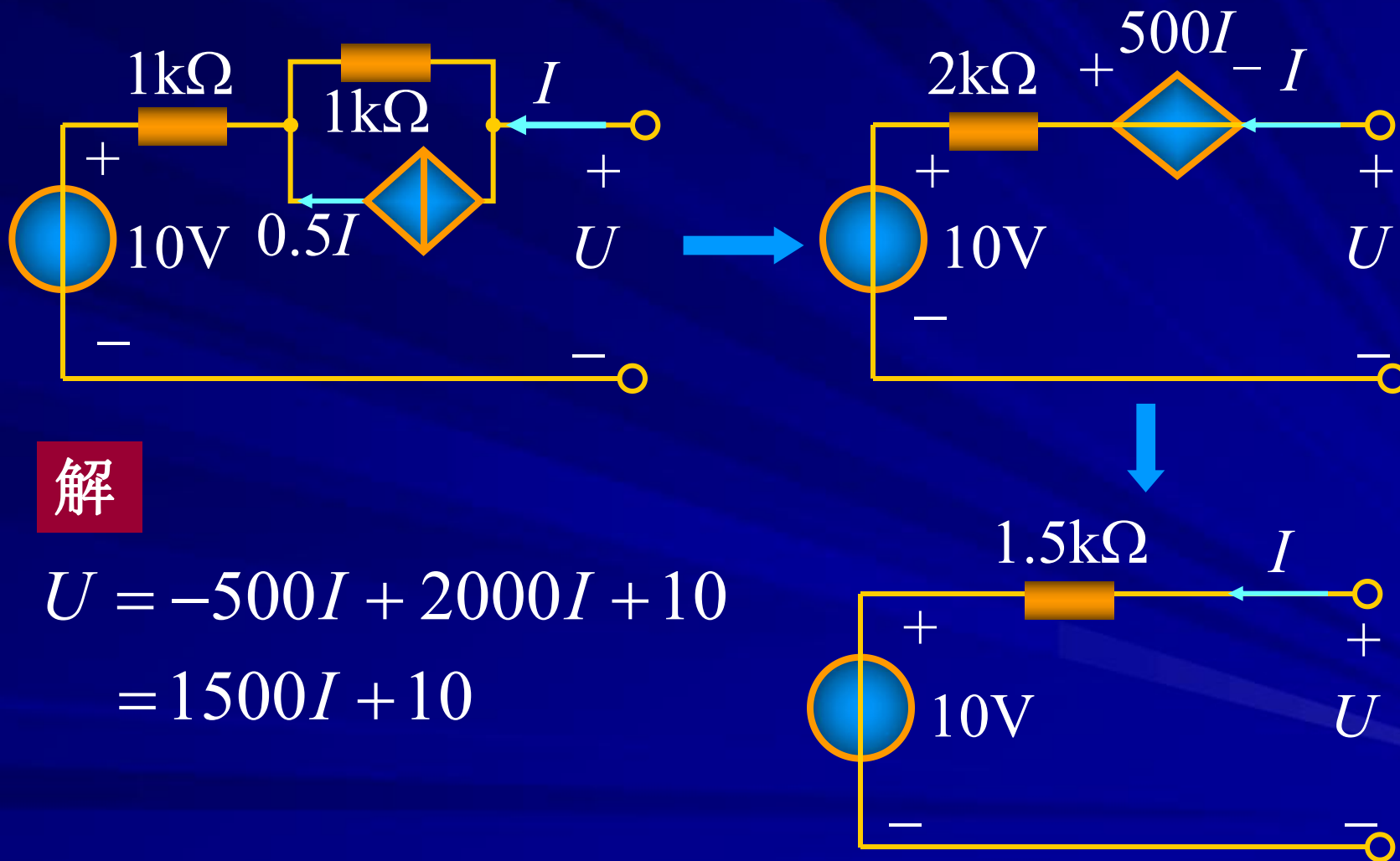
$$Ri_1 + (R_2 // R_3)ri_1 / R_3 = U_s$$

$$i_1 = \frac{U_s}{R + (R_2 // R_3)r / R_3}$$

 **注意** 受控源和独立源一样可以进行电源转换；转换过程中注意不要丢失控制量。



例6-5 把电路转换成一个电压源和一个电阻的串联。

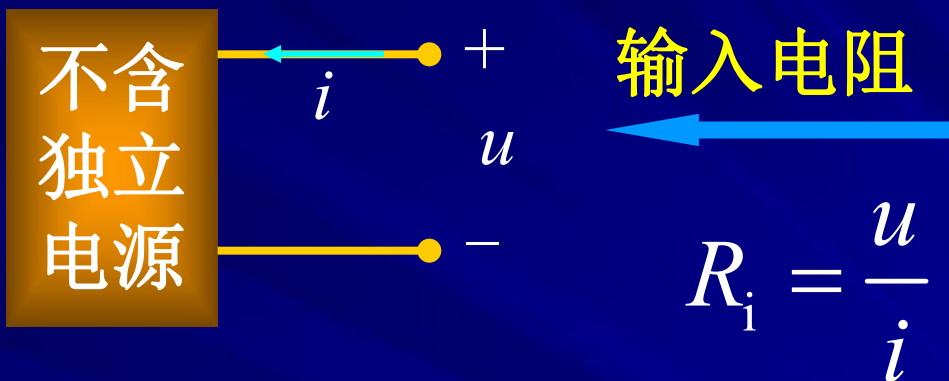


解

$$\begin{aligned}
 U &= -500I + 2000I + 10 \\
 &= 1500I + 10
 \end{aligned}$$

2-7 输入电阻

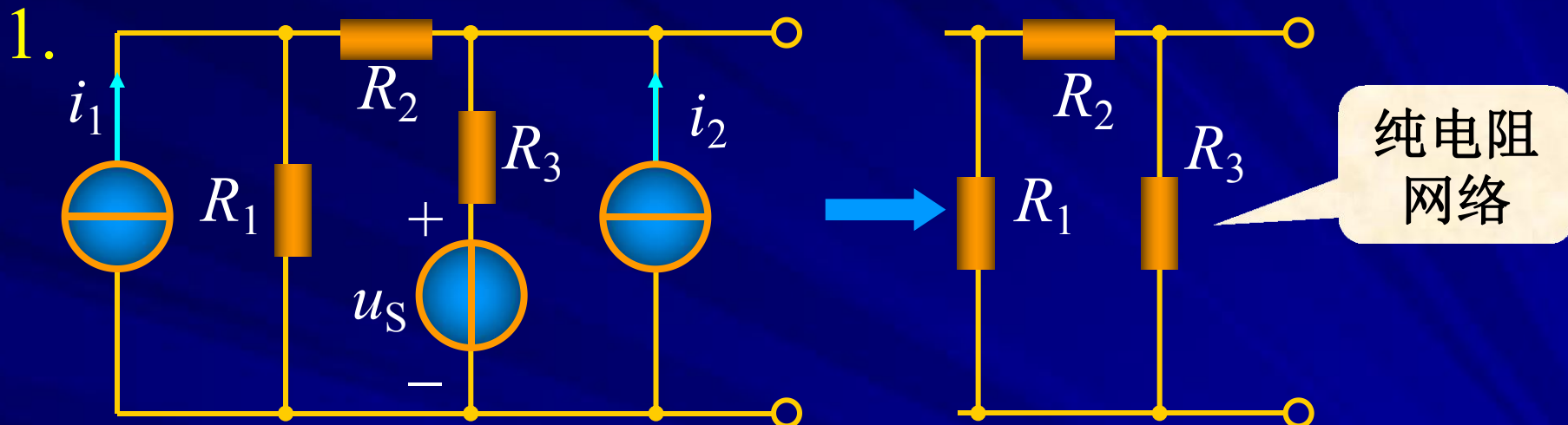
1. 定义



2. 计算方法

- ①如果一端口内部仅含电阻，则应用电阻的串、并联和 Δ -Y变换等方法求它的等效电阻。
- ②对含有受控源和电阻的二端电路，用电压、电流法求输入电阻，即在端口加电压源，求得电流，或在端口加电流源，求得电压，得其比值。

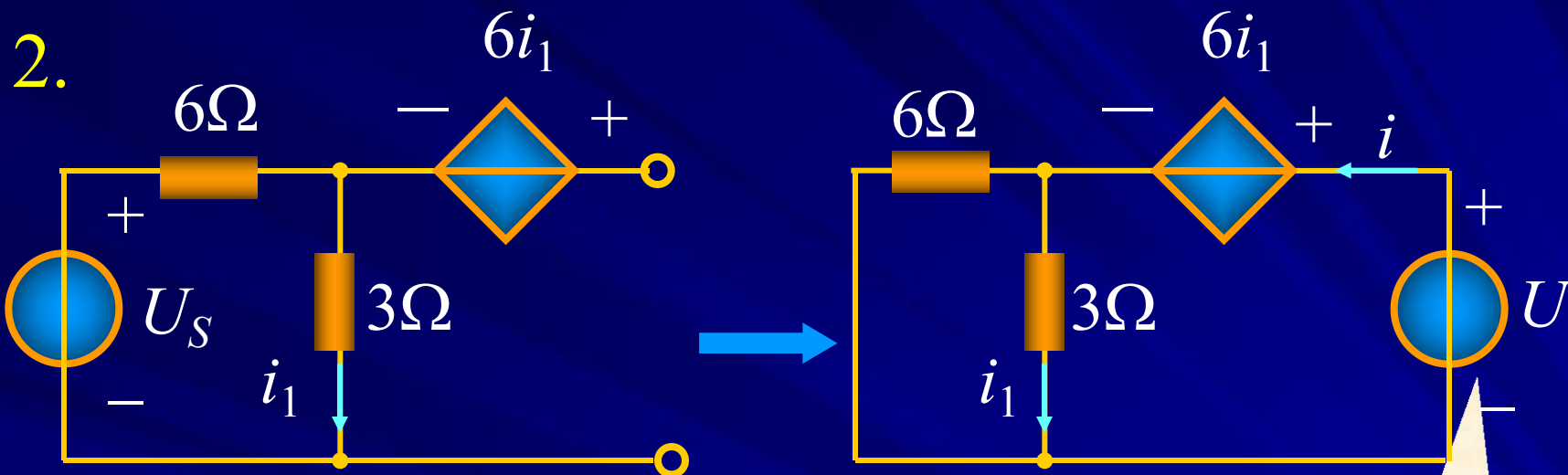
例7-1 计算下例一端口电路的输入电阻。



解

先把含独立源网络的独立源置零：电压源短路；电流源开路，再求输入电阻。

$$R_i = (R_1 + R_2) // R_3$$



解

$$i = i_1 + \frac{3i_1}{6} = 1.5i_1$$

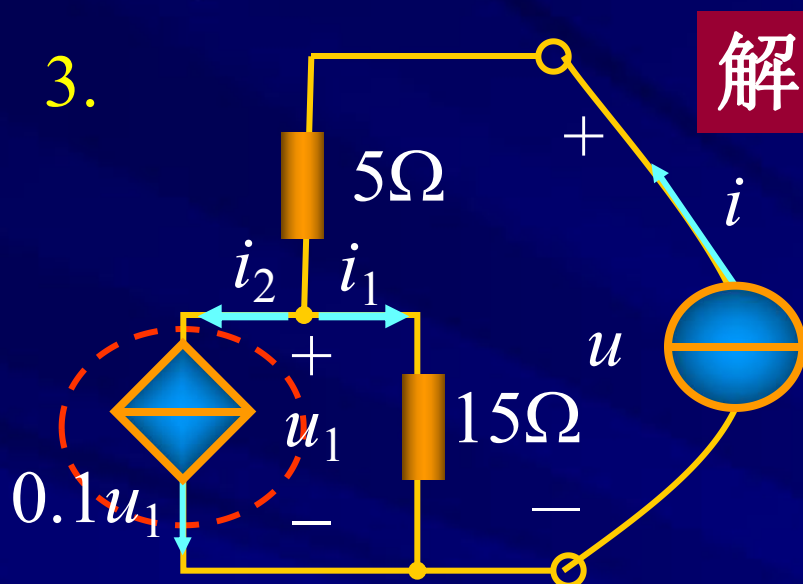
$$U = 6i_1 + 3i_1 = 9i_1$$

$$R_i = \frac{U}{i} = \frac{9i_1}{1.5i_1} = 6\Omega$$

外加电压源

3.

解

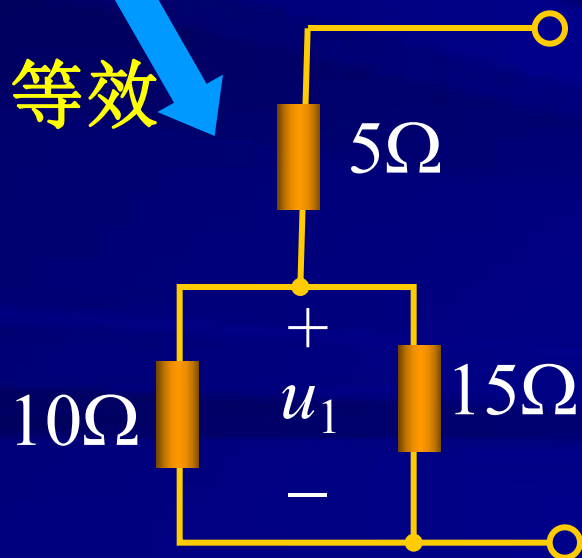


$$u_1 = 15i_1 \quad i_2 = \frac{u_1}{10} = 1.5i_1$$

$$i = i_1 + i_2 = 2.5i_1$$

$$u = 5i + u_1 = 5 \times 2.5i_1 + 15i_1 = 27.5i_1$$

等效



$$R_i = \frac{u}{i} = \frac{27.5i_1}{2.5i_1} = 11\Omega$$

$$R_i = \left(5 + \frac{10 \times 15}{10 + 15}\right)\Omega = 11\Omega$$