

中国科学院
2010年招收攻读硕士学位研究生入学统一考试试题
科目名称：高等代数

一.(10+10=20分) 设 A, B 分别是 $n \times m$ 和 $m \times n$ 矩阵, I_k 是 k 阶单位矩阵。

(1) 求证: $|I_n - AB| = |I_m - BA|$ 。

(2) 计算行列式

$$\begin{vmatrix} 1+a_1+x_1 & a_1+x_2 & \cdots & a_1+x_n \\ a_2+x_1 & 1+a_2+x_2 & \cdots & a_2+x_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n+x_1 & a_n+x_2 & \cdots & 1+a_n+x_n \end{vmatrix}$$

【解答】

$$(1) \begin{pmatrix} I_m & 0 \\ -A & I_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & B \\ 0 & AB \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_m & 0 \\ -A & I_n \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & B \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_m & 0 \\ A & I_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} BA & B \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

因此, $\begin{pmatrix} 0 & B \\ 0 & AB \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} BA & B \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, 故 $\begin{vmatrix} I_m & -B \\ 0 & I_n - AB \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} I_m - BA & -B \\ 0 & I_n \end{vmatrix}$, 即