

第一章习题与解答

1.1 根据算符 ∇ 的微分性与矢量性, 推导下列公式:

$$\nabla(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = \mathbf{B} \times (\nabla \times \mathbf{A}) + (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{A} + \mathbf{A} \times (\nabla \times \mathbf{B}) + (\mathbf{A} \cdot \nabla) \mathbf{B}$$

$$\mathbf{A} \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \frac{1}{2} \nabla A^2 - (\mathbf{A} \cdot \nabla) \mathbf{A}$$

【解】记 $\nabla(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = \nabla_A(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) + \nabla_B(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})$, ∇_A 是作用于 \mathbf{A} 的算符, ∇_B 是作用于 \mathbf{B}

的算符, 利用 $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b}(\mathbf{c} \cdot \mathbf{a}) - \mathbf{c}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})$, 有

$$\nabla_A(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = \mathbf{B} \times (\nabla \times \mathbf{A}) + (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{A}$$

$$\nabla_B(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = \mathbf{A} \times (\nabla \times \mathbf{B}) + (\mathbf{A} \cdot \nabla) \mathbf{B}$$

$$\nabla(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = \mathbf{B} \times (\nabla \times \mathbf{A}) + (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{A} + \mathbf{A} \times (\nabla \times \mathbf{B}) + (\mathbf{A} \cdot \nabla) \mathbf{B}$$

在上式中令 $\mathbf{B} = \mathbf{A}$, 即得

$$\mathbf{A} \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \frac{1}{2} \nabla A^2 - (\mathbf{A} \cdot \nabla) \mathbf{A}$$

1.2 设 u 是空间坐标 x, y, z 的函数, 证明:

$$\nabla f(u) = \frac{df}{du} \nabla u \quad (1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{A}(u) = \nabla u \cdot \frac{d\mathbf{A}}{du} \quad (2)$$

$$\nabla \times \mathbf{A}(u) = \nabla u \times \frac{d\mathbf{A}}{du} \quad (3)$$

【证】对于 $\nabla f(u)$, 注意到 $\partial f / \partial u = df/du$, 有

$$\begin{aligned} \nabla f(u) &= \mathbf{e}_x \frac{\partial f}{\partial x} + \mathbf{e}_y \frac{\partial f}{\partial y} + \mathbf{e}_z \frac{\partial f}{\partial z} \\ &= \frac{df}{du} \left(\mathbf{e}_x \frac{\partial u}{\partial x} + \mathbf{e}_y \frac{\partial u}{\partial y} + \mathbf{e}_z \frac{\partial u}{\partial z} \right) = \frac{df}{du} \nabla u \end{aligned}$$

在直角坐标系中将算符 ∇ 和矢量 \mathbf{A} 写成分量形式, 便可证明(2)式和(3)式。

1.3 从源点(即电荷电流分布点) \mathbf{x}' 到场点 \mathbf{x} 的距离 r , 以及矢径 \mathbf{r} 分别为

$$r = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}$$

$$\mathbf{r} = (x-x')\mathbf{e}_x + (y-y')\mathbf{e}_y + (z-z')\mathbf{e}_z$$

对源变数 \mathbf{x}' 和场变数 \mathbf{x} 求微商的算符分别为

$$\nabla' = \mathbf{e}_x \frac{\partial}{\partial x'} + \mathbf{e}_y \frac{\partial}{\partial y'} + \mathbf{e}_z \frac{\partial}{\partial z'}, \quad \nabla = \mathbf{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{e}_y \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{e}_z \frac{\partial}{\partial z}$$

(1) 证明下列结果, 并体会算符 ∇' 与 ∇ 的关系:

$$\nabla r = -\nabla' r = \frac{\mathbf{r}}{r} \quad (\text{单位矢量}) \quad (1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{r} = -\nabla' \cdot \mathbf{r} = 3 \quad (2)$$

$$\nabla \times \mathbf{r} = -\nabla' \times \mathbf{r} = \mathbf{0} \quad (3)$$

$$\nabla r = -\nabla' r = \vec{I} \quad (\text{单位张量}) \quad (4)$$

$$\nabla \frac{1}{r} = -\nabla' \frac{1}{r} = -\frac{\mathbf{r}}{r^3} \quad (5)$$

$$\nabla \cdot \frac{\mathbf{r}}{r^3} = -\nabla' \cdot \frac{\mathbf{r}}{r^3} = 0, \quad (r \neq 0) \quad (6)$$

$$\nabla \times \frac{\mathbf{r}}{r^3} = -\nabla' \times \frac{\mathbf{r}}{r^3} = \mathbf{0} \quad (7)$$

(2) 求 $(\mathbf{a} \cdot \nabla) \mathbf{r}$, $\nabla(\mathbf{a} \cdot \mathbf{r})$, $\nabla \cdot [E_0 \sin(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r})]$, $\nabla \times [E_0 \sin(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r})]$, 其中 \mathbf{a} , \mathbf{k} 和 E_0 均为常矢量.

【解】 (1) 将算符 ∇ 与 ∇' 分别作用于距离 r 和矢径 \mathbf{r} 的表达式, 可得到(1)至(4)式的结果, 其中单位张量的定义见附录(I.11)式. 利用前面 1.2 题的第一式和本题(1)至(4)式的结果, 得

$$\nabla \frac{1}{r} = \nabla(r^{-1}) = \frac{d(r^{-1})}{dr} \nabla r = -\frac{1}{r^2} \frac{\mathbf{r}}{r} = -\frac{\mathbf{r}}{r^3}$$

$$\nabla \cdot \frac{\mathbf{r}}{r^3} = (\nabla r^{-3}) \cdot \mathbf{r} + r^{-3} \nabla \cdot \mathbf{r} = 0, \quad (\text{当 } r \neq 0)$$

$$\nabla \times \frac{\mathbf{r}}{r^3} = (\nabla r^{-3}) \times \mathbf{r} + r^{-3} \nabla \times \mathbf{r} = 0$$

同理可证 $\nabla' \frac{1}{r} = \frac{\mathbf{r}}{r^3}$; $\nabla' \cdot \frac{\mathbf{r}}{r^3} = 0$, 当 $r \neq 0$; 及 $\nabla' \times \frac{\mathbf{r}}{r^3} = 0$. 事实上, 对任意的标量函数 $f(r)$ 和矢量函数 $f(r)\mathbf{r}$, 不难证明

$$\nabla f(r) = -\nabla' f(r); \quad \nabla \cdot [f(r)\mathbf{r}] = -\nabla' \cdot [f(r)\mathbf{r}]$$

$$\nabla \times [f(r)\mathbf{r}] = -\nabla' \times [f(r)\mathbf{r}]; \quad \nabla [f(r)\mathbf{r}] = -\nabla' [f(r)\mathbf{r}]$$

即对上述函数, 算符存在代换关系 $\nabla \rightarrow -\nabla'$. 这一代换将经常用到.

(2) ∇r 是单位张量, 它与任何矢量点乘均给出原矢量, 因此

$$(\mathbf{a} \cdot \nabla) \mathbf{r} = \mathbf{a} \cdot \nabla \mathbf{r} = \mathbf{a} \cdot \vec{I} = \mathbf{a}$$

利用 1.1 题第一式的结果, 由于 \mathbf{a} 为常矢量, 且 $\nabla \times \mathbf{r} = \mathbf{0}$, 故有

$$\nabla(\mathbf{a} \cdot \mathbf{r}) = (\mathbf{a} \cdot \nabla) \mathbf{r} = \mathbf{a}$$

因 \mathbf{k} 和 \mathbf{E}_0 均为常矢量, 而 $\sin(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r})$ 是标量函数, 因此

$$\begin{aligned} \nabla \cdot [\mathbf{E}_0 \sin(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r})] &= \nabla \sin(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) \cdot \mathbf{E}_0 \\ &= \frac{d \sin(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r})}{d(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r})} \nabla(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) \cdot \mathbf{E}_0 = \mathbf{k} \cdot \mathbf{E}_0 \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) \end{aligned}$$

$$\nabla \times [\mathbf{E}_0 \sin(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r})] = \mathbf{k} \times \mathbf{E}_0 \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r})$$

1.4 应用高斯定理证明

$$\int_V dV \nabla \times \mathbf{f} = \oint_S d\mathbf{S} \times \mathbf{f} \quad (1)$$

应用斯托克斯定理证明

$$\int_S d\mathbf{S} \times \nabla \varphi = \oint_L \varphi d\mathbf{l} \quad (2)$$

【提示】取任意常矢量 \mathbf{c} , 有

$$\nabla \cdot (\mathbf{f} \times \mathbf{c}) = (\nabla \times \mathbf{f}) \cdot \mathbf{c} - (\nabla \times \mathbf{c}) \cdot \mathbf{f} = (\nabla \times \mathbf{f}) \cdot \mathbf{c} \quad (3)$$

$$\nabla \times (\mathbf{c} \varphi) = (\nabla \times \mathbf{c}) \varphi + \nabla \varphi \times \mathbf{c} = \nabla \varphi \times \mathbf{c} \quad (4)$$

将(3)式对任意体积 V 积分, 由高斯定理(附录III.1 式)及 \mathbf{c} 的任意性, 可证得(1)式; 将(4)式对任意非闭合曲面 S 积分, 由斯托克斯定理(附录III.3 式)及 \mathbf{c} 的任意性, 可证得(2)式。

1.5 已知一个电荷系统的电偶极矩定义为 $\mathbf{p}(t) = \int_V \rho(\mathbf{x}', t) \mathbf{x}' dV'$, 利用电荷守恒定律

$\nabla' \cdot \mathbf{J} + \partial \rho / \partial t = 0$, 证明 \mathbf{p} 的时变率为

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \int_V \mathbf{J}(\mathbf{x}', t) dV'$$

【证】记电流密度 $\mathbf{J}(\mathbf{x}', t) = \mathbf{J}$, 由 $\nabla' \cdot \mathbf{J} + \partial \rho / \partial t = 0$, 有

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} \mathbf{x}' dV' = - \int_V (\nabla' \cdot \mathbf{J}) \mathbf{x}' dV' \quad (1)$$

而

$$\nabla' \cdot (\mathbf{J} \mathbf{x}') = (\nabla' \cdot \mathbf{J}) \mathbf{x}' + \mathbf{J} \cdot \nabla' \mathbf{x}' = (\nabla' \cdot \mathbf{J}) \mathbf{x}' + \mathbf{J}$$

其中 $\nabla' \mathbf{x}'$ 为单位张量. 于是(1)式变为

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{p}}{dt} &= -\int_V \nabla' \cdot (\mathbf{J}\mathbf{x}') dV' + \int_V \mathbf{J} dV' \\ &= -\oint_S d\mathbf{S}' \cdot (\mathbf{J}\mathbf{x}') + \int_V \mathbf{J} dV' \end{aligned} \quad (2)$$

(2)式第二步已将张量 $\mathbf{J}\mathbf{x}'$ 的散度的体积分化成面积分(见附录III.2 式). 总可以将积分区域取得大于电荷分布区域 V , 因而积分区域的界面 S 上有 $\mathbf{J} = 0$, 故(2)式右方第一项为零. 于是得

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \int_V \mathbf{J} dV' \quad (3)$$

【另法】电荷实际上以量子化形式存在. 设第 i 个粒子的电量为 q_i , 位矢为 \mathbf{x}'_i , 系统的总电量和电偶极矩分别为

$$q = \sum_i q_i, \quad \mathbf{p} = \sum_i q_i \mathbf{x}'_i \quad (4)$$

每个粒子运动形成的电流元为 $\mathbf{J}dV' = q_i \mathbf{v}'_i$, $\mathbf{v}'_i = d\mathbf{x}'_i/dt$ 是其速度, 而系统的总电量 q 是个守恒量, 因此有

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \sum_i q_i \frac{d\mathbf{x}'_i}{dt} = \sum_i q_i \mathbf{v}'_i = \int_V \mathbf{J} dV' \quad (5)$$

1.6 若 \mathbf{m} 是常矢量, 证明除 $R=0$ 以外, 矢量 $\mathbf{A} = \mathbf{m} \times \mathbf{R}/R^3$ 的旋度等于标量 $\varphi = \mathbf{m} \cdot \mathbf{R}/R^3$ 的梯度的负值, 即 $\nabla \times \mathbf{A} = -\nabla \varphi$.

【证】这是关于磁偶极矩 \mathbf{m} 的静磁场问题(见第三章). \mathbf{m} 是位于坐标原点即 $R=0$ 处的常矢量, 而 $R \neq 0$ 处 $\nabla \cdot (\mathbf{R}/R^3) = 0$, 以及 $\nabla \times (\mathbf{R}/R^3) = 0$, 因此

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{A} &= \nabla \times \left(\frac{\mathbf{m} \times \mathbf{R}}{R^3} \right) \\ &= \left(\nabla \cdot \frac{\mathbf{R}}{R^3} \right) \mathbf{m} - (\mathbf{m} \cdot \nabla) \frac{\mathbf{R}}{R^3} = -(\mathbf{m} \cdot \nabla) \frac{\mathbf{R}}{R^3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \nabla \varphi &= \nabla \left(\frac{\mathbf{m} \cdot \mathbf{R}}{R^3} \right) \\ &= \mathbf{m} \times \left(\nabla \times \frac{\mathbf{R}}{R^3} \right) + (\mathbf{m} \cdot \nabla) \frac{\mathbf{R}}{R^3} = (\mathbf{m} \cdot \nabla) \frac{\mathbf{R}}{R^3} \end{aligned}$$

$$\text{而 } \nabla \frac{\mathbf{R}}{R^3} = (\nabla R^{-3}) \mathbf{R} + R^{-3} \nabla \mathbf{R} = -\frac{3\mathbf{R}\mathbf{R}}{R^5} + \frac{\mathbf{I}}{R^3}$$

于是有

$$\nabla \times \mathbf{A} = -\nabla \varphi = \frac{3(\mathbf{m} \cdot \mathbf{R})\mathbf{R}}{R^5} - \frac{\mathbf{m}}{R^3}$$

将上式乘以 $\mu_0/4\pi$ ，即得磁偶极矩的磁场

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \left[\frac{3(\mathbf{m} \cdot \mathbf{R})\mathbf{R}}{R^5} - \frac{\mathbf{m}}{R^3} \right]$$

1.7 证明两个闭合的恒定电流圈之间的相互作用力大小相等，方向相反，但两个电流元之间的相互作用力一般并不服从牛顿第三定律。

【证】据安培定律，电流圈 L_1 对另一电流圈 L_2 中一个电流元 $I_2 d\mathbf{l}_2$ 的作用力为

$$d\mathbf{F}_{12} = I_2 d\mathbf{l}_2 \times \mathbf{B}_1 = I_2 d\mathbf{l}_2 \times \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{L_1} \frac{I_1 d\mathbf{l}_1 \times \mathbf{r}_{12}}{r_{12}^3} \quad (1)$$

\mathbf{B}_1 是整个电流圈 L_1 在 $I_2 d\mathbf{l}_2$ 处产生的磁感应强度， \mathbf{r}_{12} 是从电流圈 L_1 中每一个电流元 $I_1 d\mathbf{l}_1$ 到 $I_2 d\mathbf{l}_2$ 的矢径，将(1)式对电流圈 L_2 积分，得电流圈 L_1 对 L_2 的总作用力

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{12} &= \frac{\mu_0 I_1 I_2}{4\pi} \oint_{L_2} \oint_{L_1} \frac{d\mathbf{l}_2 \times (d\mathbf{l}_1 \times \mathbf{r}_{12})}{r_{12}^3} \\ &= \frac{\mu_0 I_1 I_2}{4\pi} \oint_{L_2} \oint_{L_1} \left[\frac{d\mathbf{l}_1 (\mathbf{r}_{12} \cdot d\mathbf{l}_2)}{r_{12}^3} - \frac{\mathbf{r}_{12} (d\mathbf{l}_1 \cdot d\mathbf{l}_2)}{r_{12}^3} \right] \end{aligned} \quad (2)$$

由斯托克斯定理，上式右方第一项对闭合路径 L_2 的积分，可化为 L_2 所围曲面 S_2 的面积分，

而 $\nabla \times (\mathbf{r}_{12}/r_{12}^3) = 0$ ，故有

$$\oint_{L_2} \oint_{L_1} \frac{d\mathbf{l}_1 (\mathbf{r}_{12} \cdot d\mathbf{l}_2)}{r_{12}^3} = \oint_{L_1} d\mathbf{l}_1 \int_{S_2} (\nabla \times \frac{\mathbf{r}_{12}}{r_{12}^3}) \cdot d\mathbf{S} = 0$$

因此(2)式为

$$\mathbf{F}_{12} = -\frac{\mu_0 I_1 I_2}{4\pi} \oint_{L_2} \oint_{L_1} \frac{\mathbf{r}_{12} (d\mathbf{l}_1 \cdot d\mathbf{l}_2)}{r_{12}^3} \quad (3)$$

同理可得电流圈 L_2 对电流圈 L_1 的总作用力

$$\mathbf{F}_{21} = -\frac{\mu_0 I_1 I_2}{4\pi} \oint_{L_1} \oint_{L_2} \frac{\mathbf{r}_{21} (d\mathbf{l}_2 \cdot d\mathbf{l}_1)}{r_{21}^3} \quad (4)$$

这里 \mathbf{r}_{21} 是从 L_2 的电流元 $I_2 d\mathbf{l}_2$ 到 L_1 的电流元 $I_1 d\mathbf{l}_1$ 的矢径，显然，对于每一对电流元 $I_1 d\mathbf{l}_1$ 与

$I_2 d\mathbf{l}_2$ ，均有 $\mathbf{r}_{12} = -\mathbf{r}_{21}$ ，因此

$$\mathbf{F}_{12} = -\mathbf{F}_{21} \quad (5)$$

但是对于两个孤立的电流元 $I_1 d\mathbf{l}_1$ 和 $I_2 d\mathbf{l}_2$ ，如果仍由安培定律，将两者间的互作用力写成

$$\begin{aligned} d\mathbf{F}_{12} &= I_2 d\mathbf{l}_2 \times \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I_1 d\mathbf{l}_1 \times \mathbf{r}_{12}}{r_{12}^3} \\ &= \frac{\mu_0 I_1 I_2}{4\pi} \frac{d\mathbf{l}_1 (\mathbf{r}_{12} \cdot d\mathbf{l}_2) - \mathbf{r}_{12} (d\mathbf{l}_2 \cdot d\mathbf{l}_1)}{r_{12}^3} \\ d\mathbf{F}_{21} &= I_1 d\mathbf{l}_1 \times \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I_2 d\mathbf{l}_2 \times \mathbf{r}_{21}}{r_{21}^3} \\ &= \frac{\mu_0 I_1 I_2}{4\pi} \frac{d\mathbf{l}_2 (\mathbf{r}_{21} \cdot d\mathbf{l}_1) - \mathbf{r}_{21} (d\mathbf{l}_1 \cdot d\mathbf{l}_2)}{r_{21}^3} \end{aligned}$$

则可看出，一般情况下上述两式右方第一项不是等值反向，因而 $d\mathbf{F}_{12} \neq -d\mathbf{F}_{21}$ 。这是因为，安培定律仅适用于描述恒定电流之间的互作用力，而恒定电流必定构成闭合回路，既孤立又“恒定”的电流元实际上并不存在。

1.8 证明均匀介质内部的极化电荷体密度 ρ_p 总是等于自由电荷体密度 ρ_f 的 $-(1 - \varepsilon_0/\varepsilon)$ 倍。

【证】 各向同性线性均匀介质内 $\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}$ ，电容率 ε 是与坐标无关的常量，由 $\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}$ 和场方程 $\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_f$ ，得

$$\begin{aligned} \rho_p &= -\nabla \cdot \mathbf{P} = -\nabla \cdot (\mathbf{D} - \varepsilon_0 \mathbf{E}) \\ &= -(1 - \varepsilon_0/\varepsilon) \nabla \cdot \mathbf{D} = -(1 - \varepsilon_0/\varepsilon) \rho_f \end{aligned}$$

一般介质 $\varepsilon > \varepsilon_0$ ，因此 ρ_p 与 ρ_f 在符号上相反。

1.9 有一内外半径分别为 r_1 和 r_2 的空心介质球，介质的电容率为 ε ，使介质内均匀地带静止的自由电荷密度 ρ_f 。求

- (1) 空间各点的电场；
- (2) 极化电荷体密度和极化电荷面密度。

【解】以球心为坐标原点，因介质内自由电荷密度 ρ_f 与介质的电容率 ε 均为常数，而介质表面是球面，故电场分布有球对称性。由高斯定理

$$\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = \int_V \rho_f dV$$

得

$$E_1 = D_1/\varepsilon_0 = 0 \quad (r < r_1)$$

$$E_2 = \frac{D_2}{\varepsilon} = \frac{(r^3 - r_1^3)\rho_f}{3\varepsilon r^3} \mathbf{r} \quad (r_1 < r < r_2)$$

$$E_3 = \frac{D_3}{\varepsilon_0} = \frac{(r_2^3 - r_1^3)\rho_f}{3\varepsilon_0 r^3} \mathbf{r} \quad (r > r_2)$$

由 $D_2 = \varepsilon E_2 = \varepsilon_0 E_2 + P_2$, 得介质的极化强度

$$P_2 = (\varepsilon - \varepsilon_0)E_2 = (1 - \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon}) \frac{(r^3 - r_1^3)\rho_f}{3r^3} \mathbf{r}$$

由 1.8 题证明的结果, 介质内极化(束缚)电荷体密度为

$$\rho_p = -(1 - \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon})\rho_f$$

介质球外 $P_3 = 0$, 故球壳外表面极化电荷面密度为

$$\sigma_p = -\mathbf{e}_r \cdot (P_3 - P_2)|_{r=r_2} = (1 - \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon}) \frac{r_2^3 - r_1^3}{3r_2^2} \rho_f$$

或由 $\sigma_f + \sigma_p = \mathbf{e}_r \cdot \varepsilon_0 (E_3 - E_2)$, 而 $\sigma_f = 0$, 亦可得此结果. 球腔内 $P_1 = 0$, 球壳内表面极化电荷面密度为

$$\sigma_p = -\mathbf{e}_r \cdot (P_2 - P_1)|_{r=r_1} = 0$$

读者试将 ρ_p 和 σ_p 分别作体积分和面积分, 可看到介质球内总的极化体电荷与球面总的极化电荷等量异号, 这是因为极化过程遵从电荷守恒.

1.10 内外半径分别为 r_1 和 r_2 的无穷长中空导体圆柱, 沿轴向流有恒定均匀的自由电流密度 J_f , 导体的磁导率为 μ , 求磁感应强度和磁化电流.

【解】以圆柱中心轴为 z 轴, 则 $J_f = J_f \mathbf{e}_z$,

如图 1.1. 由对称性, 场强只与离开 z 轴的距离 r 有关, 且只有 \mathbf{e}_ϕ 方向的分量, 由安培环路定理

$$\oint_L \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \int_S \mathbf{J}_f \cdot d\mathbf{S}$$

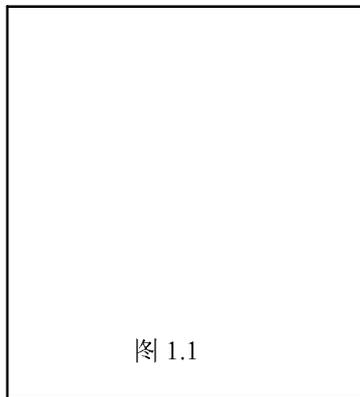


图 1.1

得

$$\mathbf{B}_1 = \mu_0 \mathbf{H}_1 = 0 \quad (r < r_1)$$

$$\mathbf{B}_2 = \mu \mathbf{H}_2 = \frac{\mu(r^2 - r_1^2)}{2r^2} \mathbf{J}_f \times \mathbf{r} \quad (r_1 < r < r_2)$$

$$\mathbf{B}_3 = \mu_0 \mathbf{H}_3 = \frac{\mu_0(r_2^2 - r_1^2)}{2r^2} \mathbf{J}_f \times \mathbf{r} \quad (r > r_2)$$

由 $\mathbf{B}_2 = \mu_0(\mathbf{H}_2 + \mathbf{M}_2) = \mu \mathbf{H}_2$ ，得导体内的磁化强度与磁化电流密度

$$\mathbf{M}_2 = \frac{(\mu - \mu_0)}{\mu_0} \mathbf{H}_2 = \frac{(\mu - \mu_0)(r^2 - r_1^2)}{\mu_0 2r^2} \mathbf{J}_f \times \mathbf{r}$$

$$\mathbf{J}_M = \nabla \times \mathbf{M}_2 = \left(\frac{\mu}{\mu_0} - 1\right) \mathbf{J}_f$$

\mathbf{J}_M 与 \mathbf{J}_f 的关系与本章补充题 1.21 所得结论一致，导体柱外部 $\mathbf{M}_3 = 0$ ，故外表面磁化电流密度

$$\boldsymbol{\alpha}_M = \mathbf{e}_r \times (\mathbf{M}_3 - \mathbf{M}_2) \Big|_{r=r_2} = -\left(\frac{\mu}{\mu_0} - 1\right) \frac{(r_2^2 - r_1^2)}{2r_2} \mathbf{J}_f$$

或由 $\boldsymbol{\alpha}_f + \boldsymbol{\alpha}_M = \mathbf{e}_r \times (\mathbf{B}_3 - \mathbf{B}_2)/\mu_0$ ，而 $\boldsymbol{\alpha}_f = 0$ ，也可得到这结果，柱腔内 $\mathbf{M}_1 = 0$ ，内表面磁化电流密度为

$$\boldsymbol{\alpha}_M = \mathbf{e}_r \times (\mathbf{M}_2 - \mathbf{M}_1) \Big|_{r=r_1} = 0$$

读者试将 \mathbf{J}_M 和 $\boldsymbol{\alpha}_M$ 分别积分，可看到柱体内总的磁化电流与外表面总的磁化电流数值相等但流向相反，即磁化电流遵从连续性(电荷守恒)。

1.11 平行板电容器内有两层介质，它们的厚度分别为 l_1 和 l_2 ，电容率为 ϵ_1 和 ϵ_2 ，今在两极板上接上电动势为 E 的电池，求

- (1) 电容器两极板上的自由电荷面密度 ω_f ；
- (2) 介质分界面上的自由电荷面密度 ω_f ；
- (3) 若介质是漏电的，电导率分别为 σ_1 和 σ_2 ，当电流达到稳定时，上述结果如何？

【解】界面上自由电荷面密度 ω_f 由边值关系

$$\omega_f = \mathbf{e}_n \cdot (\mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1) \quad (1)$$

描写. 静电情况下导体极板中的电场为零. 假定可略去边缘效应, 则电容器内的电场为均匀场, 它从正极板指向负极板, 以 \mathbf{e}_n 表示这方向的单位矢量, 两种介质中有

$$\mathbf{D}_1 = \varepsilon_1 E_1 \mathbf{e}_n, \quad \mathbf{D}_2 = \varepsilon_2 E_2 \mathbf{e}_n \quad (2)$$

将(1)式分别用到正极板与介质 1, 负极板与介质 2 的分界面上, 有

$$\mathbf{e}_n \cdot \mathbf{D}_1 = D_1 = \omega_{f1}, \quad -\mathbf{e}_n \cdot \mathbf{D}_2 = -D_2 = \omega_{f2} \quad (3)$$

在两种绝缘介质分界面上没有自由电荷, 故由(1)式有

$$D_2 - D_1 = \omega_{f3} = 0, \quad \text{即 } D_1 = D_2 \quad (4)$$

由两极板之间已知的电动势, 有

$$\mathbf{E} = l_1 E_1 + l_2 E_2 = l_1 D_1 / \varepsilon_1 + l_2 D_2 / \varepsilon_2 \quad (5)$$

由(3)至(5)式, 可解出

$$\omega_{f1} = \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2}{l_1 \varepsilon_2 + l_2 \varepsilon_1} \mathbf{E} = -\omega_{f2}, \quad \omega_{f3} = 0 \quad (6)$$

当介质漏电且电流恒定, 界面电流遵从边值关系 $J_{2n} = J_{1n}$, 略去边缘效应, 由欧姆定律 $\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}$, 两种介质中的电流密度为 $\sigma_1 E_1 = \sigma_2 E_2 = J_n$. 此时导体极板中也存在电场, 若两极板的厚度均远小于 l_1 和 l_2 , 就有

$$\mathbf{E} = l_1 E_1 + l_2 E_2 = (l_1 / \sigma_1 + l_2 / \sigma_2) J_n \quad (7)$$

$$J_n = \frac{\sigma_1 \sigma_2}{l_1 \sigma_2 + l_2 \sigma_1} \mathbf{E} \quad (8)$$

现在 $D_1 = \varepsilon_1 E_1 = \varepsilon_1 J_n / \sigma_1$, $D_2 = \varepsilon_2 E_2 = \varepsilon_2 J_n / \sigma_2$, 由边值关系(1)可解出

$$\omega_{f1} = D_1 = \frac{\varepsilon_1 \sigma_2}{l_1 \sigma_2 + l_2 \sigma_1} \mathbf{E}$$

$$\omega_{f2} = -D_2 = -\frac{\varepsilon_2 \sigma_1}{l_1 \sigma_2 + l_2 \sigma_1} \mathbf{E}$$

$$\omega_{f3} = D_2 - D_1 = \frac{\varepsilon_2 \sigma_1 - \varepsilon_1 \sigma_2}{l_1 \sigma_2 + l_2 \sigma_1} \mathbf{E} \quad (9)$$

可以验证两种情形下均有 $\omega_{f1} + \omega_{f2} + \omega_{f3} = 0$ ，即电容器整体上均保持电中性。

1.12 证明：(1) 当两种绝缘介质的分界面上不带面自由电荷时，电场线的曲折满足

$$\frac{\operatorname{tg}\theta_2}{\operatorname{tg}\theta_1} = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}$$

其中 ε_1 和 ε_2 分别是两种介质的电容率， θ_1 和 θ_2 分别是界面两侧电场线与法线的夹角。

(2) 当两种导电介质内流有恒定电流时，分界面上电场线的曲折满足

$$\frac{\operatorname{tg}\theta_2}{\operatorname{tg}\theta_1} = \frac{\sigma_2}{\sigma_1}$$

其中 σ_1 和 σ_2 分别为两种介质的电导率。

【证】绝缘介质分界面上自由电荷密度 $\sigma_f = 0$ ，故边值关系为

$$E_{2t} = E_{1t}, \quad D_{2n} = D_{1n}$$

若两种介质都是线性均匀的，即 $D_1 = \varepsilon_1 E_1$ ， $D_2 = \varepsilon_2 E_2$ ，上述两式便为

$$E_2 \sin\theta_2 = E_1 \sin\theta_1, \quad \varepsilon_2 E_2 \cos\theta_2 = \varepsilon_1 E_1 \cos\theta_1$$

于是得

$$\frac{\operatorname{tg}\theta_2}{\operatorname{tg}\theta_1} = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}$$

当电流恒定时，边值关系为

$$E_{2t} = E_{1t}, \quad J_{2n} = J_{1n}$$

若两种介质都是线性均匀的，即 $J_1 = \sigma_1 E_1$ ， $J_2 = \sigma_2 E_2$ ，上述两式便为

$$E_2 \sin\theta_2 = E_1 \sin\theta_1, \quad \sigma_2 E_2 \cos\theta_2 = \sigma_1 E_1 \cos\theta_1$$

由此得

$$\frac{\operatorname{tg}\theta_2}{\operatorname{tg}\theta_1} = \frac{\sigma_2}{\sigma_1}$$

1.13 试用边值关系证明：在绝缘介质与导体的分界面上，在静电情况下，导体外的电场线总是垂直于导体表面；在恒定电流情况下，导体内的电场线总是平行于导体表面。

【证】设导体表面自由电荷面密度为 σ_f ，由边值关系 $D_{2n} - D_{1n} = \sigma_f$ ， $E_{2t} = E_{1t}$ ，令

介质 1 为导体, 介质 2 为绝缘体, 静电导体内 $\mathbf{E}_1 = 0, \mathbf{D}_1 = 0$, 由上述两式得导体外表面

$$D_{2n} = \sigma_f, \quad E_{2t} = 0$$

若导体外的介质是线性均匀的, 即 $\mathbf{D}_2 = \varepsilon \mathbf{E}_2$, 便有

$$\mathbf{E}_2 = \frac{\mathbf{D}_2}{\varepsilon} = \frac{\sigma_f}{\varepsilon} \mathbf{e}_n$$

即导体外表面的 \mathbf{E} 线与其表面垂直. 电流恒定时, 边值关系为 $E_{2t} = E_{1t}, J_{2n} = J_{1n}$, 仍设介

质 1 为导体, 介质 2 为绝缘体, 即 $\mathbf{J}_2 = 0$, 若导体是线性均匀的, 即 $\mathbf{J}_1 = \sigma \mathbf{E}_1$, 于是导体内表面

$$J_{1n} = \sigma E_{1n} = 0, \quad E_{1t} = 0$$

即导体内表面 \mathbf{E} 只有切向分量 E_t , \mathbf{E} 线平行于其表面.

1.14 内外电极的截面半径分别为 a 和 b 的无限长圆柱型电容器, 单位长度荷电为 λ_f , 两极间填充电导率为 σ 的非磁性物质.

- (1) 证明在介质中任何一点传导电流与位移电流严格抵消, 因此内部无磁场;
- (2) 求 λ_f 随时间衰减的规律;
- (3) 求与轴相距为 r 的地方的能量耗散功率密度;
- (4) 求长度为 l 的一段介质总的能量耗散功率, 并证明它等于这段的电场能量减少率.

【解】按题意电容器外部无电场. 若内部介质线性均匀, 便有 $\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}$. 以圆柱中心轴为 z 轴, 由对称性, 利用高斯定理可求得介质中

$$\mathbf{D} = \frac{\lambda_f}{2\pi r} \mathbf{e}_r, \quad \mathbf{E} = \frac{\mathbf{D}}{\varepsilon} = \frac{\lambda_f}{2\pi\varepsilon r} \mathbf{e}_r \quad (1)$$

介质内传导电流密度和位移电流密度分别为

$$\mathbf{J}_f = \sigma \mathbf{E} = \frac{\sigma \lambda_f}{2\pi\varepsilon r} \mathbf{e}_r, \quad \mathbf{J}_D = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \frac{1}{2\pi r} \frac{\partial \lambda_f}{\partial t} \mathbf{e}_r \quad (2)$$

将(2)的两式均求散度, 并由场方程和电流连续性方程

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_f, \quad \nabla \cdot \mathbf{J}_f + \frac{\partial \rho_f}{\partial t} = 0 \quad (3)$$

得电极上自由电荷密度的时变率:

$$\frac{\partial \lambda_f}{\partial t} = -\frac{\sigma}{\varepsilon} \lambda_f \quad (4)$$

将(4)式代入(2)的第二式, 再与 \mathbf{J}_f 相加, 得介质内任何一点任意时刻均有

$$\mathbf{J}_f + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = 0 \quad (5)$$

因介质是非磁性的, 即 $\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}$, 故任何一点任意时刻磁场旋度方程均为

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \nabla \times \mathbf{H} = \mu_0 (\mathbf{J}_f + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}) = 0 \quad (6)$$

可知电容器内无磁场. 将(4)式分离变量后积分, 得任意时刻 t 电极上的电荷密度

$$\lambda_f(t) = \lambda_f(0) e^{-\frac{\sigma}{\varepsilon} t} \quad (7)$$

其中 $\lambda_f(0)$ 是 $t = 0$ 时电极的自由电荷密度. 可见因介质漏电, 电极的电荷随时间按指数规律

衰减. 介质中电流热效应引起的能量耗散功率密度为

$$\rho = \mathbf{J}_f \cdot \mathbf{E} = \sigma E^2 = \sigma (\lambda_f / 2\pi \varepsilon r)^2 \quad (8)$$

长度为 l 的一段介质耗散的功率是

$$\int_a^b \sigma \left(\frac{\lambda_f}{2\pi \varepsilon r} \right)^2 2\pi r l dr = \frac{\sigma l \lambda_f^2}{2\pi \varepsilon^2} \ln \frac{b}{a} \quad (9)$$

介质中电场能量密度及其时变率为

$$w = \frac{1}{2} \mathbf{E} \cdot \mathbf{D}, \quad \frac{\partial w}{\partial t} = -\sigma (\lambda_f / 2\pi \varepsilon r)^2 \quad (10)$$

长度为 l 的一段介质内场能量减少率为

$$-\int_V \frac{\partial w}{\partial t} dV = \frac{\sigma l \lambda_f^2}{2\pi \varepsilon^2} \ln \frac{b}{a} \quad (11)$$

(9)式和(11)式表明, 电流热效应耗散的能量全部由电场能转化.

补充题

1.15 证明: $\nabla \cdot \frac{\mathbf{r}}{r^3} = 4\pi \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}')$.

【证】1.3 题已证明, 在 $r \neq 0$ 即 $\mathbf{x} \neq \mathbf{x}'$ 处, $\nabla \cdot (\mathbf{r}/r^3) = 0$, 但在 $r = 0$ 处其值是无穷大的, 即它是一个 δ 函数. 取以 $r = 0$ 点为中心, 半径 $r \rightarrow 0$ 的小球面, 由高斯定理, 及球面元矢量 $d\mathbf{S} = r^2 \sin\theta d\theta d\phi \mathbf{e}_r$, 有

$$\int_V \nabla \cdot \frac{\mathbf{r}}{r^3} dV = \oint_S \frac{\mathbf{r}}{r^3} \cdot d\mathbf{S} = 4\pi$$

又由附录 (IV.4) 和 (IV.5) 式关于三维 δ 函数的定义, 有

$$\int_V 4\pi\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') dV = 4\pi \quad (\text{当 } \mathbf{x}' \text{ 在 } V \text{ 内})$$

因此

$$\nabla \cdot \frac{\mathbf{r}}{r^3} = 4\pi\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}')$$

1.16 根据库仑定律, 求出静电场的两个微分方程.

【解】 设体积 V 内电荷密度为 $\rho(\mathbf{x}')$, 据库仑定律, 任一点 \mathbf{x} 的电场强度为

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(\mathbf{x}')\mathbf{r}}{r^3} dV' \quad (1)$$

对(1)式求场点的散度, 注意到场算符 ∇ 不作用于 $\rho(\mathbf{x}')$, 于是得

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{x}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \rho(\mathbf{x}') \nabla \cdot \frac{\mathbf{r}}{r^3} dV' \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \rho(\mathbf{x}') 4\pi\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') dV' = \rho(\mathbf{x})/\epsilon_0 \end{aligned} \quad (2)$$

其中已利用了 δ 函数的性质(附录IV.6 式). 再对(1)式求场点的旋度, 由 $\nabla \times (\mathbf{r}/r^3) = \mathbf{0}$, 立得

$$\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \quad (3)$$

1.17 根据毕奥-萨伐尔定律, 求出稳恒磁场的两个微分方程.

【解】 设体积 V 内电流密度为 $\mathbf{J}(\mathbf{x}')$, 据毕奥-萨伐尔定律, 任一点 \mathbf{x} 的磁感应强度为

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\mathbf{J}(\mathbf{x}') \times \mathbf{r}}{r^3} dV' \quad (1)$$

对(1)式求场点的散度, 注意到场算符 ∇ 不作用于 $\mathbf{J}(\mathbf{x}') = \mathbf{J}$, 有

$$\nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{x}) = -\frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \mathbf{J} \cdot (\nabla \times \frac{\mathbf{r}}{r^3}) dV' = 0 \quad (2)$$

再对(1)式求场点的旋度, 得

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{B}(\mathbf{x}) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V [-(\mathbf{J} \cdot \nabla) \frac{\mathbf{r}}{r^3} + \mathbf{J} (\nabla \cdot \frac{\mathbf{r}}{r^3})] dV' \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V [-(\mathbf{J} \cdot \nabla) \frac{\mathbf{r}}{r^3}] dV' + \mu_0 \mathbf{J}(\mathbf{x}) \end{aligned} \quad (3)$$

右方第二项已利用了 $\nabla \cdot (\mathbf{r}/r^3)$ 的 δ 函数性质. 现在证明(3)式右方第一项为零, 由算符代换关系 $\nabla \rightarrow -\nabla'$, 有

$$\begin{aligned} -(\mathbf{J} \cdot \nabla) \frac{\mathbf{r}}{r^3} &= (\mathbf{J} \cdot \nabla') \frac{\mathbf{r}}{r^3} \\ &= \nabla' \cdot \left(\mathbf{J} \frac{\mathbf{r}}{r^3} \right) - (\nabla' \cdot \mathbf{J}) \frac{\mathbf{r}}{r^3} = \nabla' \cdot \left(\mathbf{J} \frac{\mathbf{r}}{r^3} \right) \end{aligned}$$

由于电流恒定, 故 $\nabla' \cdot \mathbf{J} = 0$. 于是(3)式右方第一项的积分

$$\begin{aligned} \int_V [-(\mathbf{J} \cdot \nabla) \frac{\mathbf{r}}{r^3}] dV' &= \int_V \nabla' \cdot \left(\mathbf{J} \frac{\mathbf{r}}{r^3} \right) dV' \\ &= \oint_S d\mathbf{S}' \cdot \left(\mathbf{J} \frac{\mathbf{r}}{r^3} \right) = 0 \end{aligned}$$

这是因为电流恒定意味着界面 S 上电流法向分量 $J_n = 0$. 于是(3)式为

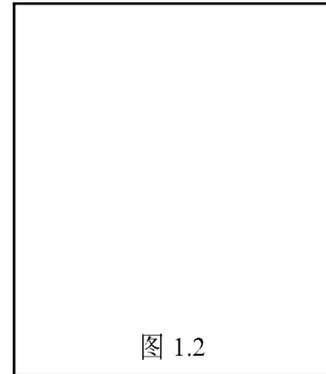
$$\nabla \times \mathbf{B}(\mathbf{x}) = \mu_0 \mathbf{J}(\mathbf{x}) \quad (4)$$

1.18 平行板电容器由两块很薄的圆形极板组成, 两极板之间通过与对称轴重合的导线供以电流 $I = I_0 \cos \omega t$, 极板半径为 a , 相互距离为 d , 假定 $d \ll a \ll c/\omega$ (c 是光速). 求:

- (1) 电容器内部和外部的电磁场;
- (2) 极板上的面电流分布.

【解】 电流的振动使电磁场以角频率 ω 波动, 波长为 $\lambda = 2\pi c/\omega$, 由于 $d \ll a \ll c/\omega$, 电容器内部及附近的场为似稳场, 故可略去推迟效应. 令 z 轴为对称轴, 如图 1.2. 设 $t = 0$ 时极板电量为零, 由 $I = dq/dt$, 得极板任意时刻 t 的带电量

$$q = \int_0^t I dt = \int_0^t I_0 \cos \omega t dt = \frac{I_0}{\omega} \sin \omega t$$



因 $d \ll a$, 故可略去边缘效应, 电容器内部的电场近似为均匀的轴向场

$$\mathbf{E}_1 = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \mathbf{e}_z = \frac{q}{\epsilon_0 \pi a^2} \mathbf{e}_z = \frac{I_0}{\epsilon_0 \pi a^2 \omega} \sin \omega t \mathbf{e}_z$$

由对称性, 这电场激发的磁场只有 \mathbf{e}_ϕ 分量, 由方程 $\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \epsilon_0 \partial \mathbf{E} / \partial t$ 的积分形式

$$\oint_L \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 \varepsilon_0 \int_S \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S}$$

取以对称轴为中心，半径为 r 的圆周为积分路径 L ，得电容器内部的磁场

$$\mathbf{B}_1 = \frac{\mu_0 I_0 r}{2\pi a^2} \cos \omega t \mathbf{e}_\phi$$

$d \ll a$ 也意味着外部的磁场可近似地看成由供电导线的电流产生，由似稳条件，用安培环路定理求得

$$\mathbf{B}_2 = \frac{\mu_0 I_0}{2\pi r} \cos \omega t \mathbf{e}_\phi$$

可以看到极板内外两边的磁场是不连续的，这是由于极板上分布着面电流

$$\boldsymbol{\alpha}_f = \mathbf{e}_z \times (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1) = -\frac{I_0}{2\pi} \left(\frac{1}{r} - \frac{r}{a^2} \right) \cos \omega t \mathbf{e}_r$$

这电流在整个极板上从中心到边缘沿着径向振动，这是可以预期的结果。

1.19 电荷为 e 的粒子以初速度 \mathbf{v}_0 进入互相垂直的均匀电磁场，设 \mathbf{v}_0 与电场和磁场都垂直，求粒子的非相对论运动轨迹(略去粒子加速运动产生的辐射)。

【解】在非相对论运动(即速度远小于光速 c)情形下，粒子质量 m 可近似地视为常数，据经典力学，粒子运动方程为

$$m\dot{\mathbf{r}} = e(\mathbf{E} + \dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{B}) \quad (1)$$

其中 $\dot{\mathbf{r}}$ 和 $\ddot{\mathbf{r}}$ 分别是粒子位置矢量对时间的一阶和二阶导数，即粒子的速度和加速度。设电场 $\mathbf{E} = E\mathbf{e}_x$ ，磁场 $\mathbf{B} = B\mathbf{e}_y$ ，则 $\mathbf{v}_0 = v_0\mathbf{e}_z$ ，于是从方程(1)有

$$m\ddot{x} = e(E - B\dot{z}), \quad m\ddot{y} = 0, \quad m\ddot{z} = eB\dot{x} \quad (2)$$

令 $t = 0$ 时粒子位于坐标原点，即初条件为

$$x_0 = 0, \quad y_0 = 0, \quad z_0 = 0; \quad \dot{x}_0 = 0, \quad \dot{y}_0 = 0, \quad \dot{z}_0 = v_0 \quad (3)$$

将(2)的第二个方程对时间积分并利用初条件，得 $y = 0$ ，即粒子不在 y 方向运动。将(2)的第三个方程对时间积分一次并利用初条件，得

$$\dot{z} = \frac{eB}{m} x + v_0 \quad (4)$$

将它代入(2)的第一个方程，得

$$\ddot{x} + \frac{e^2 B^2}{m^2} x = \frac{e(E - v_0 B)}{m} \quad (5)$$

这方程的通解, 是它的一个特解 $x' = m(E - v_0 B)/eB^2$ 与其齐次方程的通解 x'' 之叠加, 而齐次方程是一个形如 $\ddot{x} + \omega^2 x = 0$ 的一维振子方程, 其解是角频率为 $\omega = eB/m$ 的简谐振动, 即方程(5)的通解为

$$x = x' + x'' = \frac{m(E - v_0 B)}{eB^2} + A \cos\left(\frac{eB}{m} t + \phi_0\right) \quad (6)$$

A 为振动的振幅, ϕ_0 为初相位. 由初条件得 $A = -m(E - v_0 B)/eB^2$, $\phi_0 = 0$, 即有

$$x = \frac{m(E - v_0 B)}{eB^2} \left(1 - \cos \frac{eB}{m} t\right) \quad (7)$$

可见这方向上振动的平衡位置为 $x = m(E - v_0 B)/eB^2$. 将(7)代入(4)后对时间积分, 由初条件得

$$z = \frac{E}{B} t - \frac{m(E - v_0 B)}{eB^2} \sin \frac{eB}{m} t \quad (8)$$

即 z 方向是匀速运动与简谐振动的叠加, 但与 x 方向的振动有相位差 $\pi/2$. (7)和(8)两式表明, 当 $E \neq v_0 B$, 粒子轨迹是 xz 平面的一条摆线, 若 $E = v_0 B$, 粒子将在 z 方向以 $v_0 = E/B$ 匀速运动.

1. 20 证明麦克斯韦方程组的完备性. 即对于任何区域 V , 只要给定:

- (1) V 内电荷电流分布;
- (2) 初始条件, 即 $t = 0$ 时 V 内所有点的 $\mathbf{E}(\mathbf{x}, 0)$ 和 $\mathbf{B}(\mathbf{x}, 0)$ 值;
- (3) 边界条件, 即任意时刻 V 的边界面 S 上的 \mathbf{E}_S 和 \mathbf{B}_S 值.

则 V 内麦克斯韦方程组的解完全确定.

【证】设 V 内有两组可能的解 $(\mathbf{E}_1, \mathbf{B}_1)$ 和 $(\mathbf{E}_2, \mathbf{B}_2)$, 令

$$\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1 = \mathbf{E}', \quad \mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1 = \mathbf{B}' \quad (1)$$

需要证明, V 内任何一点 \mathbf{x} 任意时刻 t 均有 $\mathbf{E}'(\mathbf{x}, t) = \mathbf{B}'(\mathbf{x}, t) = 0$. 因 V 内 ρ 和 \mathbf{J} 已给定,

将 $(\mathbf{E}_1, \mathbf{B}_1)$ 和 $(\mathbf{E}_2, \mathbf{B}_2)$ 分别代入麦克斯韦方程组

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{E} &= \rho/\varepsilon_0, \quad \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0, \quad \nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}\end{aligned}\quad (2)$$

并由(1)，得 V 内 $(\mathbf{E}', \mathbf{B}')$ 场遵从的方程为

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{E}' &= 0, \quad \nabla \times \mathbf{E}' = -\frac{\partial \mathbf{B}'}{\partial t} \\ \nabla \cdot \mathbf{B}' &= 0, \quad \nabla \times \mathbf{B}' = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}'}{\partial t}\end{aligned}\quad (3)$$

由能量守恒原理， $(\mathbf{E}', \mathbf{B}')$ 场单位时间从 V 的界面 S 流出的能量，应等于它在 V 内能量的减少率，即

$$\oint_S \frac{1}{\mu_0} (\mathbf{E}' \times \mathbf{B}') \cdot d\mathbf{S} = -\frac{d}{dt} \int_V \frac{1}{2} \left(\varepsilon_0 E'^2 + \frac{B'^2}{\mu_0} \right) dV \quad (4)$$

但界面 S 的场值已给定，即 $\mathbf{E}_{1S} = \mathbf{E}_{2S}$ ， $\mathbf{B}_{1S} = \mathbf{B}_{2S}$ ，故界面上任意时刻均有 $\mathbf{E}'_S = \mathbf{B}'_S = 0$ ，

即(4)式应当是

$$\frac{d}{dt} \int_V \frac{1}{2} \left(\varepsilon_0 E'^2 + \frac{B'^2}{\mu_0} \right) dV = 0 \quad (5)$$

可知 V 内 $(\mathbf{E}', \mathbf{B}')$ 场的能量是与时间 t 无关的常量。而 $t = 0$ 时 V 内所有点的场值已给定，即

$\mathbf{E}_1(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{E}_2(\mathbf{x}, 0)$ ， $\mathbf{B}_1(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{B}_2(\mathbf{x}, 0)$ ，故 $t = 0$ 时 V 内所有点上 $\mathbf{E}' = \mathbf{B}' = 0$ ，因此初时刻 V 内 $(\mathbf{E}', \mathbf{B}')$ 场的能量为零，由能量守恒，任意时刻 V 内 $(\mathbf{E}', \mathbf{B}')$ 场的能量也为零，这意味 V 内任何一点任意时刻均有

$$\mathbf{E}'(\mathbf{x}, t) = \mathbf{B}'(\mathbf{x}, t) = 0 \quad (6)$$

即 V 内麦克斯韦方程组有完全确定的解。当 V 为全空间，这结论自然也成立。

1.21 求稳恒条件下，线性均匀介质内磁化电流密度 \mathbf{J}_M 与传导电流密度 \mathbf{J}_f 的关系。

【解】 各向同性线性均匀介质的磁导率 μ 是与坐标无关的常量，由 $\mathbf{B} = \mu \mathbf{H} = \mu_0 (\mathbf{H} + \mathbf{M})$ 和稳恒磁场方程 $\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}_f$ ，有

$$\mathbf{J}_M = \nabla \times \mathbf{M} = \left(\frac{\mu}{\mu_0} - 1 \right) \nabla \times \mathbf{H} = \left(\frac{\mu}{\mu_0} - 1 \right) \mathbf{J}_f$$

1.22 求线性均匀导体内自由电荷密度随时间变化的规律。

【解】各向同性线性均匀导体内 $\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}$, $\mathbf{J}_f = \sigma \mathbf{E}$, 由场方程 $\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_f$ 和电流连续性方程

$$\nabla \cdot \mathbf{J}_f + \partial \rho_f / \partial t = 0, \text{ 得}$$

$$\frac{\partial \rho_f}{\partial t} = -\nabla \cdot \mathbf{J}_f = -\sigma \nabla \cdot \mathbf{E} = -\frac{\sigma}{\varepsilon} \rho_f$$

由此可解出任意时刻导体内部 \mathbf{x} 处自由电荷体密度为

$$\rho_f(\mathbf{x}, t) = \rho_f(\mathbf{x}, 0) e^{-\frac{\sigma}{\varepsilon} t}$$

其中 $\rho_f(\mathbf{x}, 0)$ 为 $t = 0$ 时该处自由电荷体密度. 可见线性均匀导体内自由电荷体密度随时间按指数规律衰减, 这是因为自由电荷互相排斥所致, 导体的电导率 σ 越高, 特征时间常数 $\tau = \varepsilon / \sigma$ 越小, 衰减越快. 因此自由电荷只能分布于均匀导体表面的薄层中, 对于静电场中的理想导体, 这结论自然成立.

1.23 证明: 静电场中导体表面受到的应力总是法向张力, 作用于单位面积上的力等于电场能量密度.

【证】静电导体内部电场为零, 导体外表面场强 $\mathbf{E} = E \mathbf{e}_n$, \mathbf{e}_n 是导体表面外法向的单位矢量, 因此导体表面单位面积受到的静电应力为

$$\mathbf{f}_s = -\mathbf{e}_n \cdot \vec{T} = -\mathbf{e}_n \cdot (-\varepsilon_0 \mathbf{E} \mathbf{E} + \frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2 \vec{I}) = \frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2 \mathbf{e}_n$$

这是一个使导体倾向于膨胀的力, 数值上等于导体表面电场能量密度 $w = \varepsilon_0 E^2 / 2$.

1.24 当两种介质分界面没有传导电流时,

- (1) 求界面 \mathbf{B} 线曲折的表达式;
- (2) 证明高 μ 值磁性体内表面的 \mathbf{B} 线几乎与其表面平行, 表面受到的磁应力是压力.

【解】因介质分界面没有传导电流, 边值关系为

$$B_{2n} = B_{1n}, \quad H_{2t} = H_{1t}$$

设 $\mathbf{B}_1 = \mu_1 \mathbf{H}_1$, $\mathbf{B}_2 = \mu_2 \mathbf{H}_2$, θ_1 和 θ_2 为界面两边 \mathbf{B} 线与法向 \mathbf{e}_n 的夹角, 则上述两式为

$$B_2 \cos \theta_2 = B_1 \cos \theta_1, \quad B_2 \sin \theta_2 / \mu_2 = B_1 \sin \theta_1 / \mu_1$$

于是得界面两边 \mathbf{B} 线曲折的表达式

$$\frac{\tan\theta_2}{\tan\theta_1} = \frac{\mu_2}{\mu_1}$$

当 $\mu_2 = \mu_0$, $\mu_1 \gg \mu_0$, 有 $\theta_1 \cong \pi/2$, $\theta_2 \cong 0$, 即高 μ 值磁性体内表面的 \mathbf{B} 线几乎与其表面平行, 漏向外部的 \mathbf{B} 线几乎与界面垂直. 当 $\mu_1/\mu_2 \rightarrow \infty$, 介质 1 几乎不会向外漏磁, 其内表面的 \mathbf{B} 只有切向分量 B_t . 以 \mathbf{e}_n 表示磁性体表面外法向单位矢量, 于是其表面单位面积受到的磁应力为

$$\mathbf{f}_s = -\mathbf{e}_n \cdot \vec{T} = -\mathbf{e}_n \cdot \left(-\frac{1}{\mu} \mathbf{B}\mathbf{B} + \frac{B^2}{2\mu} \vec{I} \right) = -\frac{B^2}{2\mu} \mathbf{e}_n$$

负号表明这是压力, 数值上等于表面磁能密度 $w = B^2/2\mu$.

1.25 证明导线中电流热效应损耗的能量, 等于其表面流进的电磁能量.

【证】设导线无限长, 截面半径为 a , 以 z 轴为对称轴, 电流密度 $\mathbf{J}_f = J_f \mathbf{e}_z$, 总电流

$I = \pi a^2 J_f$. 由欧姆定律 $\mathbf{J}_f = \sigma \mathbf{E}$ 和安培环路定理, 可求出

$$\mathbf{E} = \frac{J_f}{\sigma} \mathbf{e}_z, \quad \mathbf{H} = \frac{I r}{2\pi a^2} \mathbf{e}_\phi, \quad (r \leq a)$$

$r = a$ 处即导线表面的能流密度为

$$\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H} = -\frac{I^2}{2\pi^2 \sigma a^3} \mathbf{e}_r$$

方向 $-\mathbf{e}_r$ 表明能量向导线内部流动. 单位时间流进长度为 l 的一段导线的能量为

$$-\int_S \mathbf{S} \cdot d\mathbf{s} = \frac{I^2}{2\pi^2 \sigma a^3} 2\pi a l = \frac{I^2 l}{\sigma \pi a^2}$$

导体内电流热效应损耗的功率密度为 $\mathbf{E} \cdot \mathbf{J}_f = \sigma E^2$, 这段导线损耗的总功率为

$$P = \sigma E^2 \pi a^2 l = \frac{I^2 l}{\sigma \pi a^2} = I^2 R$$

它正好等于单位时间流进这段导线的能量, 其中 $R = l/\sigma \pi a^2$ 是这段导线的电阻.

1.26 若自由磁荷(磁单极)存在, 试猜想应当怎样改写麦克斯韦方程组?

【解】由于迄今仍未发现自由磁荷存在的可靠证据, 电荷被认为是电磁场唯一的激发源, 故麦克斯韦方程组为

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{E} &= \rho_e / \epsilon_0, & \nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0, & \nabla \times \mathbf{B} &= \mu_0 \mathbf{J}_e + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}\end{aligned}$$

ρ_e 为电荷密度, \mathbf{J}_e 为电流密度. 这组方程隐含着电流连续性方程, 只要对磁场的旋度方程求散度, 而 $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{B}) = 0$, 并由电场的散度方程, 便得到

$$\nabla \cdot \mathbf{J}_e + \frac{\partial \rho_e}{\partial t} = 0$$

若自由磁荷存在, 设其密度为 ρ_m , 磁场的散度方程便应改为 $\nabla \cdot \mathbf{B} = \rho_m$; 但这时若对电场的旋度方程求散度, 左方给出 $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{E}) = 0$, 而右方则给出 $-\partial \rho_m / \partial t$, 因此这方程也必须修改. 设磁荷运动形成的磁流密度为 \mathbf{J}_m , 它也应当遵从连续性方程(即磁荷守恒):

$$\nabla \cdot \mathbf{J}_m + \frac{\partial \rho_m}{\partial t} = 0$$

因而电场旋度方程应当修改成 $\nabla \times \mathbf{E} = -\mathbf{J}_m - \partial \mathbf{B} / \partial t$. 考虑到真空中 $\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E}$, $\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}$, 麦克斯韦方程组可修改成

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{D} &= \rho_e, & \nabla \times \mathbf{E} &= -\mathbf{J}_m - \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= \rho_m, & \nabla \times \mathbf{H} &= \mathbf{J}_e + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}\end{aligned}$$

从源和场两方面看, 这组方程都显示出十分优美的对称性.

第二章习题与解答

2.1 证明:(1) $\delta(ax) = \delta(x)/a$, ($a > 0$); 若 $a < 0$, 结果如何? (2) $x\delta(x) = 0$.

【提示】(1) 利用 δ 函数的定义及其偶函数性质 $\delta(-ax) = \delta(ax)$;

$$(2) \text{ 由 } \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} f(x)\delta(x)dx = f(0), \text{ 可得 } x\delta(x) = 0.$$

2.2 画出函数 $d\delta(x)/dx$ 的图, 说明 $\rho = -\mathbf{p} \cdot \nabla\delta(\mathbf{x})$ 是一个位于原点的电偶极子的电荷密度.

【解】 δ 函数的导数是奇函数, 图略. 以电偶极子 $\mathbf{p} = ql$ 的中点为坐标原点, 两个点电荷 $\pm q$ 分别位于 $\mathbf{x}' = \pm l/2 = \pm(\Delta x'\mathbf{e}_x + \Delta y'\mathbf{e}_y + \Delta z'\mathbf{e}_z)/2$, 于是当 $l \rightarrow 0$, 这体系的电荷密度为

$$\begin{aligned} \rho &= q\delta(\mathbf{x} - l/2) - q\delta(\mathbf{x} + l/2) = q\Delta\delta(\mathbf{x}) \\ &= q\left[\frac{\partial\delta(\mathbf{x})}{\partial x'}\Delta x' + \frac{\partial\delta(\mathbf{x})}{\partial y'}\Delta y' + \frac{\partial\delta(\mathbf{x})}{\partial z'}\Delta z'\right] \\ &= ql \cdot \nabla'\delta(\mathbf{x}) = -\mathbf{p} \cdot \nabla\delta(\mathbf{x}) \end{aligned}$$

最后一步已利用了算符代换 $\nabla' \rightarrow -\nabla$.

2.3 一块介质的极化矢量为 $\mathbf{P}(\mathbf{x}')$, 根据电偶极子静电势的公式, 极化介质所产生的静电势为

$$\varphi(\mathbf{x}) = \int_V \frac{\mathbf{P}(\mathbf{x}') \cdot \mathbf{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^3} dV' \quad (1)$$

另外, 根据极化电荷公式 $\rho_p = -\nabla' \cdot \mathbf{P}(\mathbf{x}')$ 及 $\sigma_p = \mathbf{e}_n \cdot \mathbf{P}$, 极化介质产生的静电势又可表为

$$\varphi(\mathbf{x}) = -\int_V \frac{\nabla' \cdot \mathbf{P}(\mathbf{x}')}{4\pi\varepsilon_0 r} dV' + \oint_S \frac{\mathbf{P}(\mathbf{x}') \cdot d\mathbf{S}'}{4\pi\varepsilon_0 r} \quad (2)$$

试证明以上两表达式是等同的.

【证】由高斯定理, (2)式右边第二项面积分可化为

$$\begin{aligned} \oint_S \frac{\mathbf{P}(\mathbf{x}') \cdot d\mathbf{S}'}{4\pi\varepsilon_0 r} &= \int_V \nabla' \cdot \frac{\mathbf{P}(\mathbf{x}')}{4\pi\varepsilon_0 r} dV' \\ &= \int_V \frac{\nabla' \cdot \mathbf{P}(\mathbf{x}')}{4\pi\varepsilon_0 r} dV' + \int_V \frac{\mathbf{P}(\mathbf{x}') \cdot \mathbf{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^3} dV' \end{aligned} \quad (3)$$

其中已利用到 $\nabla'(1/r) = \mathbf{r}/r^3$, 将(3)代入(2)式, 即得(1)式.

2.4 证明下述结果，并熟悉面电荷和面偶极层两侧电势和电场的变化。

(1) 在面电荷两侧，电势的法向微商有跃变，而电势是连续的；

(2) 在面偶极层两侧，电势有跃变 $\varphi_2 - \varphi_1 = \mathbf{e}_n \cdot \mathbf{P}/\epsilon_0$ ，而电势的法向微商是连续的。

(带等量正负面电荷 $\pm\sigma$ 而靠得很近的两个面，形成面偶极层，面偶极矩密度

$$\mathbf{P} = \lim_{\sigma \rightarrow \infty, l \rightarrow 0} \sigma \mathbf{l}.$$

【证】 (1) 设电荷面密度为 σ ，其两侧无限接近的 P_1 点与 P_2 点的场强分别为 \mathbf{E}_1 和 \mathbf{E}_2 ，法向单位矢量 \mathbf{e}_n 从 P_1 指向 P_2 ，将静电场高斯定理与环路定理

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho dV, \quad \oint_L \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0 \quad (1)$$

分别应用于包含着面电荷 σ 的扁平闭合面(底面积 ΔS 与界面平行，高度 $h \rightarrow 0$)，以及跨越界面的矩形小回路(其长边 Δl 与界面平行，短边 $h \rightarrow 0$)，可分别得到

$$E_{2n} - E_{1n} = \sigma/\epsilon_0, \quad E_{2t} = E_{1t} \quad (2)$$

由 $\mathbf{E} = -\nabla\varphi$ ，这两式用电势表示为

$$-\frac{\partial\varphi_2}{\partial n} + \frac{\partial\varphi_1}{\partial n} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}, \quad \varphi_2 = \varphi_1 \quad (3)$$

(2) 令面偶极层的法向单位矢量 \mathbf{e}_n 从 $-\sigma$ 指向 $+\sigma$ ，无限靠近 $-\sigma$ 层外侧 P_1 点的场强为 \mathbf{E}_1 ，无限靠近 $+\sigma$ 层外侧 P_2 点的场强为 \mathbf{E}_2 ，内部 P_0 点的场强为 \mathbf{E}_0 ，将高斯定理分别应用于包含 $+\sigma$ 和 $-\sigma$ 的扁平闭合面，可得到

$$E_{2n} + E_{0n} = \sigma/\epsilon_0, \quad -E_{0n} - E_{1n} = -\sigma/\epsilon_0$$

$$\text{即 } E_{2n} = E_{0n} = E_{1n} = \sigma/2\epsilon_0 \quad (4)$$

再将环路定理分别应用于跨越 $+\sigma$ 和 $-\sigma$ 的两个矩形小回路，得

$$E_{2t} = E_{0t} = E_{1t} \quad (5)$$

可见面偶极层两侧场强 $\mathbf{E}_2 = \mathbf{E}_1$ ，故其两侧电势的法向导数相等

$$\frac{\partial\varphi_2}{\partial n} = \frac{\partial\varphi_1}{\partial n} \quad (6)$$

设想电场将单位电荷从 P_1 点经过 P_0 点移至 P_2 点， P_1P_0 与 P_0P_2 的距离均为 l ， P_2 与 P_1 两点的电势差等于这过程中电场作的功：

$$\varphi_2 - \varphi_1 = E_n l + E_n l = 2E_n l = \sigma l / \varepsilon_0 \quad (7)$$

由面偶极矩密度定义 $\mathbf{P} = \sigma \mathbf{l}$ ，即有

$$\varphi_2 - \varphi_1 = \mathbf{e}_n \cdot \mathbf{P} / \varepsilon_0 \quad (8)$$

2.5 一个半径为 R 的电介质球，极化强度为 $\mathbf{P} = Kr/r^2$ ，电容率为 ε 。计算：

- (1) 束缚电荷的体密度和面密度；
- (2) 自由电荷体密度；
- (3) 球外和球内的电势；
- (4) 该带电介质球产生的静电场的总能量。

【解】从极化强度分布函数可知，这问题有球对称性。介质球内和球面束缚(极化)电荷密度分别为

$$\rho_p = -\nabla \cdot \mathbf{P} = -\frac{K}{r^2}, \quad \sigma_p = \mathbf{e}_r \cdot \mathbf{P} \Big|_{r=R} = \frac{K}{R}$$

由线性均匀介质内 $\rho_p = -(1 - \varepsilon_0/\varepsilon)\rho_f$ ，得自由电荷体密度

$$\rho_f = \frac{\varepsilon K}{(\varepsilon - \varepsilon_0)r^2}$$

由 $\mathbf{D}_1 = \varepsilon_0 \mathbf{E}_1 + \mathbf{P} = \varepsilon \mathbf{E}_1$ ，得介质球内的电场强度

$$\mathbf{E}_1 = \frac{\mathbf{P}}{(\varepsilon - \varepsilon_0)} = \frac{K}{(\varepsilon - \varepsilon_0)} \frac{\mathbf{r}}{r^2}, \quad (r < R)$$

极化过程遵从电荷守恒，球内与球面总的束缚电荷必定等值异号(将 ρ_p 对球体积分，将 σ_p 对球面积分，可知的确如此)，且有球对称性，它们在球外的电场互相抵消，故球外电场相当于总的自由电荷

$$q_f = \int_V \rho_f dV = \frac{4\pi\varepsilon KR}{\varepsilon - \varepsilon_0}$$

集中于球心时产生的电场：

$$\mathbf{E}_2 = \frac{q_f \mathbf{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^3} = \frac{\varepsilon KR}{\varepsilon_0(\varepsilon - \varepsilon_0)} \frac{\mathbf{r}}{r^3}, \quad (r > R)$$

球外与球内的电势分别为

$$\varphi_2 = \int_r^\infty \mathbf{E}_2 \cdot d\mathbf{r} = \frac{\varepsilon KR}{\varepsilon_0(\varepsilon - \varepsilon_0)r}$$

$$\varphi_1 = \int_r^R \mathbf{E}_1 \cdot d\mathbf{r} + \int_R^\infty \mathbf{E}_2 \cdot d\mathbf{r} = \frac{K}{\varepsilon - \varepsilon_0} \left(\ln \frac{R}{r} + \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} \right)$$

这带电体的总静电能为

$$W = \frac{1}{2} \varepsilon \int_{V_1} E_1^2 dV + \frac{1}{2} \varepsilon_0 \int_{V_2} E_2^2 dV$$

$$= 2\pi\varepsilon R \left(1 + \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} \right) \left(\frac{K}{\varepsilon - \varepsilon_0} \right)^2$$

将 $\rho_f \varphi_1 / 2$ 对介质球作体积分，也能得到上式的结果。

2.6 均匀外电场中置入半径为 R_0 的导体球，试用分离变量法求下列两种情况的电势：

- (1) 导体球上接有电池，使球与地保持电势 Φ_0 ；
- (2) 导体球上带总电荷 q 。

【解】外电场将使导体球面出现感应电荷。以球心为坐标原点，并令外电场 $\mathbf{E}_0 = E_0 \mathbf{e}_z$ ，

如图 2.1. 问题有 z 轴的对称性。

设放入导体球之前原点电势为

φ_0 。当导体球对地电势为 Φ_0 ，

球外电势的全部定解条件为



$$\nabla^2 \varphi = 0, \quad (R > R_0) \quad (1)$$

$$R \rightarrow \infty, \quad \varphi \rightarrow -E_0 R \cos \theta + \varphi_0 \quad (2)$$

$$R = R_0, \quad \varphi = \Phi_0 \quad (3)$$

由 z 轴的对称性及条件(2)，将拉普拉斯方程(1)的解写成

$$\varphi = -E_0 R \cos \theta + \varphi_0 + \sum_n \frac{b_n}{R^{n+1}} P_n(\cos \theta) \quad (4)$$

将(4)代入条件(3)，解出

$$b_0 = (\Phi_0 - \varphi_0) R_0, \quad b_1 = E_0 R_0^3, \quad b_n = 0 \quad (n \neq 0, 1)$$

$$\varphi = -E_0 R \cos \theta + \varphi_0 + \frac{(\Phi_0 - \varphi_0)R_0}{R} + \frac{E_0 R_0^3}{R^2} \cos \theta \quad (5)$$

第一项是原外场的电势；第二项是选择坐标原点电势所引入的常数项，它不影响电场 $\mathbf{E} = -\nabla \varphi$ 分布；第三项是因导体球接有电池而使球面均匀带电所产生的球对称项；第四项是外场使导体球面出现感应电荷所形成的电偶极矩的电势，将此项与位于坐标原点的电偶极子 $\mathbf{p} = p\mathbf{e}_z$ 的电势

$$\varphi^{(1)}(\mathbf{x}) = \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{R}}{4\pi\epsilon_0 R^3} = \frac{p}{4\pi\epsilon_0 R^2} \cos \theta \quad (6)$$

比较，可知球面感应电荷形成的电偶极矩为

$$\mathbf{p} = 4\pi\epsilon_0 R_0^3 E_0 \mathbf{e}_z \quad (7)$$

事实上，由 $\sigma_f = \mathbf{e}_n \cdot \mathbf{D}$ ，可得导体球面的自由电荷密度

$$\sigma_f = -\epsilon_0 \left. \frac{\partial \varphi}{\partial R} \right|_{R=R_0} = \frac{\epsilon_0 (\Phi_0 - \varphi_0)}{R_0} + 3\epsilon_0 E_0 \cos \theta \quad (8)$$

第一项在球外产生球对称的场(即电势 φ 的第三项)；第二项就是外场引起的感应电荷密度，由电偶极矩公式(2.12)，的确能计算出(7)式的结果，由于这一项电荷分布存在关于坐标原点的反对称性，由(2.13)或(2.15)式，均可看出电四极矩为零。

当导体球带有电荷 q 时，球外电势的全部定解条件为

$$\nabla^2 \varphi = 0, \quad (R > R_0) \quad (9)$$

$$R \rightarrow \infty, \quad \varphi \rightarrow -E_0 R \cos \theta + \varphi_0 \quad (10)$$

$$R = R_0, \quad \varphi = \Phi_0 \text{ (未知常数, 因静电导体是等势体)} \quad (11)$$

但已知导体球面的总电量 q ，即

$$R = R_0, \quad q = \oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = -\epsilon_0 \oint_S \frac{\partial \varphi}{\partial R} dS \quad (12)$$

条件(9)、(10)和(11)与前面的(1)、(2)和(3)相同，故可定出球外电势 φ 形式上仍如(5)式，再将它代入条件(12)，可解出

$$\Phi_0 - \varphi_0 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R_0} \quad (13)$$

$$\varphi = -E_0 R \cos \theta + \varphi_0 + \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R} + \frac{E_0 R_0^3}{R^2} \cos \theta \quad (14)$$

各项的物理意义如前所述. 从本题定解过程可看到, 静电导体为等势体这个条件的重要性.

2.7 均匀介质球的中心置一点电荷 q_f , 介质球的电容率为 ϵ , 球外为真空, 试用分离变量法求空间电势, 把结果与使用高斯定理所得的结果比较.

【解】点电荷 q_f 的电场将使介质球极化. 以球心为坐标原点并设介质球半径为 R_0 , 这问题有球对称性. 球内外两区域电势的全部定解条件为

$$\nabla^2 \varphi_1 = -q_f \delta(\mathbf{x}) / \epsilon, \quad (R < R_0) \quad (1)$$

$$\nabla^2 \varphi_2 = 0, \quad (R > R_0) \quad (2)$$

$$R = 0, \quad \varphi_1 \rightarrow \infty \quad (\text{此处有点电荷}) \quad (3)$$

$$R \rightarrow \infty, \quad \varphi_2 \rightarrow 0 \quad (4)$$

$$R = R_0: \quad \varphi_1 = \varphi_2, \quad \epsilon \frac{\partial \varphi_1}{\partial R} = \epsilon_0 \frac{\partial \varphi_2}{\partial R} \quad (5)$$

泊松方程(1)的一个特解是点电荷的电势 φ_q . 由电势叠加原理, 球内外的电势都应当是 $\varphi = \varphi_q + \varphi'$, φ' 是极化电荷的电势并满足拉普拉斯方程. 由条件(3)和(4), 方程(1)和(2)的解可写成

$$\varphi_1 = \varphi_q + \varphi'_1 = \frac{q_f}{4\pi\epsilon R} + a \quad (R < R_0) \quad (6)$$

$$\varphi_2 = \varphi_q + \varphi'_2 = \frac{q_f}{4\pi\epsilon_0 R} + \frac{b}{R} \quad (R > R_0) \quad (7)$$

(方程(2)的解当然也可写成 $\varphi_2 = b'/R$) 将(6)和(7)代入条件(5), 可解出

$$\varphi_1 = \frac{q_f}{4\pi\epsilon R} + \frac{(\epsilon - \epsilon_0)q_f}{4\pi\epsilon\epsilon_0 R_0}, \quad \varphi_2 = \frac{q_f}{4\pi\epsilon_0 R} \quad (8)$$

由于线性均匀介质内极化电荷体密度 $\rho_p = -(1 - \epsilon_0/\epsilon)\rho_f$, 球心处自由点电荷 q_f (可看成很小的带电金属珠) 表面的介质出现“极化点电荷” $q_p = -(1 - \epsilon_0/\epsilon)q_f$, 介质球表面必定出现总电量为 $-q_p = (1 - \epsilon_0/\epsilon)q_f$ 的极化面电荷, 由球对称性, 这两部分极化电荷在球外的

电势互相抵消，因此球外电势 φ_2 是由 q_f 产生的. 球内电势 φ_1 的第一项是 q_f 与极化点电荷 q_p 共同产生的，第二项为常数，此项对球内电场没有影响.

由于这问题有球对称性，由高斯定理容易得到球内、外的电场

$$\mathbf{E}_1 = \frac{\mathbf{D}_1}{\varepsilon} = \frac{q_f \mathbf{R}}{4\pi\varepsilon R^3}, \quad \mathbf{E}_2 = \frac{\mathbf{D}_2}{\varepsilon_0} = \frac{q_f \mathbf{R}}{4\pi\varepsilon_0 R^3} \quad (9)$$

两区域的电势分布为

$$\varphi_2 = \int_R^\infty \mathbf{E}_2 \cdot d\mathbf{R} = \frac{q_f}{4\pi\varepsilon_0 R} \quad (10)$$

$$\varphi_1 = \int_R^{R_0} \mathbf{E}_1 \cdot d\mathbf{R} + \int_{R_0}^\infty \mathbf{E}_2 \cdot d\mathbf{R} = \frac{q_f}{4\pi\varepsilon R} + \frac{(\varepsilon - \varepsilon_0)q_f}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 R_0} \quad (11)$$

2.8 均匀介质球(电容率为 ε_1)中心置一自由电偶极子 \mathbf{p}_f , 球外充满了另一种电容率为 ε_2 的介质, 求空间各点的电势和极化电荷分布.

【解】 \mathbf{p}_f 的电场将使两种介质均被极化. 以介质球心为坐标原点, 球半径为 R_0 , 且令 $\mathbf{p}_f = p_f \mathbf{e}_z$, 如图 2.2, 于是问题有 z 轴对称性. 介质球内外两区域电势的全部定解条件为



$$\nabla^2 \varphi_1 = (\mathbf{p}_f \cdot \nabla) \delta(\mathbf{x}) / \varepsilon, \quad (R < R_0) \quad (1)$$

$$\nabla^2 \varphi_2 = 0, \quad (R > R_0) \quad (2)$$

$$R = 0, \quad \varphi_1 \rightarrow \infty \quad (\text{此处有电偶极子}) \quad (3)$$

$$R \rightarrow \infty, \quad \varphi_2 \rightarrow 0 \quad (4)$$

$$R = R_0: \quad \varphi_1 = \varphi_2, \quad \varepsilon_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial R} = \varepsilon_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial R} \quad (5)$$

\mathbf{p}_f 的电势 φ_p 是泊松方程(1)的一个特解, 球内外的电势都是 φ_p 与极化电荷的电势 φ' 之叠加, φ' 是拉普拉斯方程的解. 由条件(3)和(4), 及轴对称性, 将方程(1)和(2)的解写成

$$\varphi_1 = \frac{p_f \cos\theta}{4\pi\varepsilon_1 R^2} + \sum_n a_n R^n P_n(\cos\theta), \quad (R < R_0) \quad (6)$$

$$\varphi_2 = \frac{p_f \cos\theta}{4\pi\epsilon_2 R^2} + \sum_n \frac{b_n}{R^{n+1}} P_n(\cos\theta), \quad (R > R_0) \quad (7)$$

(φ_2 也可以不写第一项 φ_p) 将(6)和(7)代入条件(5), 可解出

$$a_1 = \frac{(\epsilon_1 - \epsilon_2)p_f}{2\pi\epsilon_1(\epsilon_1 + 2\epsilon_2)R_0^3}, \quad b_1 = \frac{(\epsilon_1 - \epsilon_2)p_f}{2\pi\epsilon_1(\epsilon_1 + 2\epsilon_2)}$$

$a_n = b_n = 0$, 当 $n \neq 1$. 于是得

$$\varphi_1 = \frac{p_f \cos\theta}{4\pi\epsilon_1 R^2} + \frac{(\epsilon_1 - \epsilon_2)p_f}{2\pi\epsilon_1(\epsilon_1 + 2\epsilon_2)R_0^3} R \cos\theta \quad (R < R_0) \quad (8)$$

$$\varphi_2 = \frac{3p_f \cos\theta}{4\pi(\epsilon_1 + 2\epsilon_2)R^2} \quad (R > R_0) \quad (9)$$

球心处 p_f 表面的介质中, 出现一个与其方向相反的极化电偶极子

$$p_p = -(1 - \epsilon_0/\epsilon_1)p_f \quad (10)$$

因介质球面自由电荷面密度 $\sigma_f = 0$, 故由 $\sigma_p = \epsilon_0 e_R \cdot (E_2 - E_1)$, 极化电荷面密度为

$$\sigma_p = \epsilon_0 \left(-\frac{\partial\varphi_2}{\partial R} + \frac{\partial\varphi_1}{\partial R} \right)_{R=R_0} = \frac{3\epsilon_0(\epsilon_1 - \epsilon_2)p_f}{2\pi\epsilon_1(\epsilon_1 + 2\epsilon_2)R_0^3} \cos\theta \quad (11)$$

球内电势 φ_1 的第一项是 p_f 与 p_p 共同产生的偶极场, 总电矩为 $p_1 = \epsilon_0 p_f / \epsilon_1$, 第二项是 σ_p 产生的均匀场; 球外电势 φ_2 是 p_f , p_p , 以及 σ_p 形成的电偶极矩 p_σ 共同产生的偶极场, 总电矩为 $p_2 = 3\epsilon_0 p_f / (\epsilon_1 + 2\epsilon_2)$.

2.9 空心导体球壳的内外半径为 R_1 和 R_2 , 球中心置一偶极子 p , 球壳上带电 q , 求空间各点电势和电荷分布.

【解】 p 的电场将使导体出现感应电荷分布. 以球心为坐标原点, 令 $p = p e_z$, 问题就有 z 轴对称性. 导体球壳的电势 φ_2 为常数, 球腔内电势 φ_1 , 球壳外电势 φ_3 , 全部定解条件为

$$\nabla^2 \varphi_1 = (p \cdot \nabla) \delta(x) / \epsilon_0, \quad \nabla^2 \varphi_3 = 0 \quad (1)$$

$$R = 0, \quad \varphi_1 \rightarrow \infty; \quad R \rightarrow \infty, \quad \varphi_3 \rightarrow 0 \quad (2)$$

$$\varphi_1|_{R=R_1} = \varphi_3|_{R=R_2} \quad (3)$$

$$R = R_2, \quad q = -\varepsilon_0 \oint_S \frac{\partial \varphi_3}{\partial R} dS \quad (4)$$

由轴对称性以及 $R = 0$ 和 $R \rightarrow \infty$ 处的条件, 将电势方程的解写成

$$\varphi_1 = \frac{p \cos \theta}{4\pi\varepsilon_0 R^2} + \sum_n a_n R^n P_n(\cos \theta), \quad (R < R_1) \quad (5)$$

$$\varphi_3 = \frac{p \cos \theta}{4\pi\varepsilon_0 R^2} + \sum_n \frac{b_n}{R^{n+1}} P_n(\cos \theta), \quad (R > R_2) \quad (6)$$

利用条件(3) 和(4), 解出

$$\varphi_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \left[\frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{R}}{R^3} - \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{R}}{R_1^3} + \frac{q}{R_2} \right], \quad \varphi_3 = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R} \quad (7)$$

$$\sigma_{1f} = -\mathbf{e}_R \cdot \mathbf{D}_1 = \varepsilon_0 \frac{\partial \varphi_1}{\partial R} = -\frac{3p}{4\pi R_1^3} \cos \theta \quad (R = R_1) \quad (8)$$

$$\sigma_{2f} = \mathbf{e}_R \cdot \mathbf{D}_3 = -\varepsilon_0 \frac{\partial \varphi_3}{\partial R} = \frac{q}{4\pi R_2^2} \quad (R = R_2) \quad (9)$$

球腔内 φ_1 的第一项是球心处 \mathbf{p} 产生的偶极场, 第二项是内球面感应电荷 σ_{1f} 产生的均匀场, 第三项为常数项. 由于球心处的偶极子 \mathbf{p} 与内球面感应电荷 σ_{1f} 在球壳外产生的偶极场互相抵消, 故球外 φ_3 是外球面均匀分布的面电荷 σ_{2f} 产生的球对称场.

2.10 在均匀外场 \mathbf{E}_0 中置入一带均匀自由电荷密度为 ρ_f 的绝缘介质球 (电容率为 ε) 求空间各点的电势.

【解】自由电荷的电场和外场 \mathbf{E}_0 将使介质球极化. 设介质球半径为 R_0 , 以球心为坐标原点, 且令 $\mathbf{E}_0 = E_0 \mathbf{e}_z$. 定解条件为

$$\nabla^2 \varphi_1 = -\rho_f / \varepsilon, \quad (R < R_1) \quad (1)$$

$$\nabla^2 \varphi_2 = 0, \quad (R > R_2) \quad (2)$$

$$R = 0, \varphi_1 \text{ 有限}; \quad R \rightarrow \infty, \varphi_2 \rightarrow -E_0 R \cos \theta \quad (3)$$

$$R = R_0: \quad \varphi_1 = \varphi_2, \quad \varepsilon \frac{\partial \varphi_1}{\partial R} = \varepsilon_0 \frac{\partial \varphi_2}{\partial R} \quad (4)$$

因为已假定介质球内 ρ_f 为常数, 它的场及其引起的极化电荷产生的场, 便都有球对称性,

由高斯定理可求出球内外的电场 $E_{1\rho}$ 和 $E_{2\rho}$, 进而可求出电势

$$\varphi_{1\rho} = \frac{\rho_f(R_0^2 - R^2)}{6\varepsilon} + \frac{\rho_f R_0^2}{3\varepsilon_0}, \quad \varphi_{2\rho} = \frac{\rho_f R_0^3}{3\varepsilon_0 R} \quad (5)$$

$\varphi_{1\rho}$ 是泊松方程(1)的特解. 故方程(1)和(2)的解可写成 $\varphi_1 = \varphi_{1\rho} + \varphi'_1$, $\varphi_2 = \varphi_{2\rho} + \varphi'_2$, φ'_1 和

φ'_2 均是轴对称下拉普拉斯方程的通解. 由条件(3)和(4), 可解出

$$\varphi_1 = \frac{\rho_f(R_0^2 - R^2)}{6\varepsilon} + \frac{\rho_f R_0^2}{3\varepsilon_0} - \frac{3\varepsilon_0}{\varepsilon + 2\varepsilon_0} E_0 R \cos\theta \quad (7)$$

$$\varphi_2 = \frac{\rho_f R_0^3}{3\varepsilon_0 R} - E_0 R \cos\theta + \frac{(\varepsilon - \varepsilon_0)E_0 R_0^3}{(\varepsilon + 2\varepsilon_0)R^2} \cos\theta \quad (8)$$

球内 φ_1 的第三项即为 φ'_1 , 是原外场与介质球面极化电荷产生的均匀场之叠加; 球外 φ_2 的第

二项是原外场, 第三项是介质球面极化电荷产生的偶极场, 它们之和就是 φ'_2 . 其实, φ'_1 和 φ'_2

就是不带电的均匀介质球(电势方程为 $\nabla^2 \varphi_1 = 0$)置入均匀外电场 E_0 时的解.

2.11 在一很大的电解槽中充满电导率为 σ_2 的液体, 使其中流着均匀的电流 J_{f0} , 今在液体中置入一个电导率为 σ_1 小球, 求稳恒时电流分布和面电荷分布. 讨论 $\sigma_1 \gg \sigma_2$ 及 $\sigma_2 \gg \sigma_1$ 两种情况下电流分布的特点.

【解】维持恒定电流的电场也是静电场, 可令 $E = -\nabla\varphi$, 由电流恒定条件 $\nabla \cdot J_f = 0$, 当两种介质都是线性均匀的, 据欧姆定律 $J_f = \sigma E$, 可知电势方程均为 $\nabla^2 \varphi = 0$. 以球心为坐标原点并设小球半径为 R_0 , 令导电液体中原电流密度 $J_{f0} = \sigma_2 E_0 = \sigma_2 E_0 e_z$, 问题就有 z 轴对称性. 全部定解条件为

$$\nabla^2 \varphi_1 = 0 \quad (R < R_0); \quad \nabla^2 \varphi_2 = 0 \quad (R > R_0) \quad (1)$$

$$R = 0, \varphi_1 \text{ 有限}; \quad R \rightarrow \infty, \varphi_2 \rightarrow -\frac{J_{f0}}{\sigma_2} R \cos\theta \quad (2)$$

$$R = R_0: \quad \varphi_1 = \varphi_2, \quad J_{1R} = J_{2R} \quad \text{即} \quad \sigma_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial R} = \sigma_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial R} \quad (3)$$

由 $R = 0$ 和 $R \rightarrow \infty$ 处的条件, 将两区域电势方程的解写为

$$\varphi_1 = \sum_n a_n R^n P_n(\cos\theta) \quad (4)$$

$$\varphi_2 = \sum_n \frac{b_n}{R^{n+1}} P_n(\cos\theta) - \frac{J_{f0}}{\sigma_2} R \cos\theta \quad (5)$$

将(4)和(5)代入条件(3), 解出

$$\varphi_1 = \frac{-3J_{f0}}{\sigma_1 + 2\sigma_2} R \cos\theta \quad (6)$$

$$\varphi_2 = -\frac{J_{f0}}{\sigma_2} R \cos\theta + \frac{J_{f0}(\sigma_1 - \sigma_2)R_0^3}{\sigma_2(\sigma_1 + 2\sigma_2)R^2} \cos\theta \quad (7)$$

由 $\omega = \varepsilon_0 \mathbf{e}_R \cdot (\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1)$, 得球面的电荷密度

$$\omega = \varepsilon_0 \left(-\frac{\partial \varphi_2}{\partial R} + \frac{\partial \varphi_1}{\partial R} \right)_{R=R_0} = \frac{3(\sigma_1 - \sigma_2)\varepsilon_0}{(\sigma_1 + 2\sigma_2)\sigma_2} J_{f0} \cos\theta \quad (8)$$

球内 φ_1 为原外场与球面电荷分布 ω 产生的均匀场之叠加; 球外 φ_2 的第一项是原外场, 第二项是球面电荷产生的偶极场. 电流分布为

$$\mathbf{J}_1 = \sigma_1 \mathbf{E}_1 = -\sigma_1 \nabla \varphi_1 = \frac{3\sigma_1 J_{f0}}{(\sigma_1 + 2\sigma_2)} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{J}_2 &= \sigma_2 \mathbf{E}_2 = -\sigma_2 \nabla \varphi_2 \\ &= \mathbf{J}_{f0} + \frac{(\sigma_1 - \sigma_2)R_0^3}{\sigma_1 + 2\sigma_2} \left[\frac{3(\mathbf{J}_{f0} \cdot \mathbf{R})\mathbf{R}}{R^5} - \frac{\mathbf{J}_{f0}}{R^3} \right] \end{aligned} \quad (10)$$

$$\text{当 } \sigma_1 \gg \sigma_2, \mathbf{J}_1 \cong 3\mathbf{J}_{f0}, \mathbf{J}_2 \cong \mathbf{J}_{f0} + R_0^3 \left[\frac{3(\mathbf{J}_{f0} \cdot \mathbf{R})\mathbf{R}}{R^5} - \frac{\mathbf{J}_{f0}}{R^3} \right]$$

$$\text{当 } \sigma_2 \gg \sigma_1, \mathbf{J}_1 \cong 0, \mathbf{J}_2 \cong \mathbf{J}_{f0} - \frac{R_0^3}{2} \left[\frac{3(\mathbf{J}_{f0} \cdot \mathbf{R})\mathbf{R}}{R^5} - \frac{\mathbf{J}_{f0}}{R^3} \right]$$

2.12 半径为 R_0 的导体球外充满均匀的绝缘介质 ε ,

导体球接地, 离球心为 a 处 ($a > R_0$) 置一点电荷 q_f , 试用分离变数法求空间各点电势, 证明所得结果与镜像法相同.

【解】以球心为坐标原点, 令 q_f 位于 $z = a$, 如图 2.3.



图 2.3

于是问题有 z 轴对称性. 球外电势的全部定解条件为

$$\nabla^2 \varphi = -q_f \delta(\mathbf{x} - a\mathbf{e}_z) / \varepsilon \quad (1)$$

$$R \rightarrow \infty, \varphi \rightarrow 0; R = R_0, \varphi = 0 \quad (2)$$

由 $R \rightarrow \infty$ 处的条件和 z 轴对称性, 泊松方程(1)的解写为

$$\varphi = \frac{q_f}{4\pi\varepsilon r} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n}{R^{n+1}} P_n(\cos\theta) \quad (3)$$

其中 r 是点电荷 q_f 到场点的距离. $1/r$ 可展开成

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{\sqrt{R^2 + a^2 - 2Ra\cos\theta}} = \begin{cases} \frac{1}{a} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{R}{a}\right)^n P_n(\cos\theta) & (R < a) \\ \frac{1}{R} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{a}{R}\right)^n P_n(\cos\theta) & (R > a) \end{cases} \quad (4)$$

因 $R_0 < a$, 将(4)的第一式代入(3), 并由条件 $R = R_0, \varphi = 0$, 解出

$$b_n = \frac{-q_f R_0^{2n+1}}{4\pi\varepsilon a^{n+1}}$$

$$\varphi = \frac{q_f}{4\pi\varepsilon r} - \frac{q_f}{4\pi\varepsilon} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{R_0^{2n+1}}{a^{n+1} R^{n+1}} P_n(\cos\theta) \quad (R > R_0) \quad (5)$$

将(4)代入(5), 便给出 $R_0 \leq R \leq a$ 和 $R \geq a$ 两区域中电势的级数形式, 仅在 $R = a, \theta = 0$ 即

点电荷 q_f 所在点级数发散. 在 $R \geq a$ 区域, (5)式给出

$$\varphi = \frac{q_f}{4\pi\varepsilon} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{R^{n+1}} \left(a^n - \frac{R_0^{2n+1}}{a^{n+1}}\right) P_n(\cos\theta) \quad (6)$$

它包含着这电荷体系所有各级电多极矩的电势, 由

$$P_0(\cos\theta) = 1, P_1(\cos\theta) = \cos\theta, P_2(\cos\theta) = (3\cos^2\theta - 1)/2$$

(6)式的前三项是单极项, 偶极项和四极项电势:

$$\varphi^{(0)} = \frac{q_f}{4\pi\varepsilon R} \left(1 - \frac{R_0}{a}\right) \quad (7)$$

$$\varphi^{(1)} = \frac{q_f}{4\pi\varepsilon R^2} \left(a - \frac{R_0^3}{a^2}\right) \cos\theta \quad (8)$$

$$\varphi^{(2)} = \frac{q_f}{8\pi\epsilon R^3} \left(a^2 - \frac{R_0^5}{a^3} \right) (3\cos^2\theta - 1) \quad (9)$$

由(8)式和(9)式,可推知这体系的电偶极矩和电四极矩.

【电像法】 以假想的像电荷代替导体球与介质分界面真实的感应电荷及极化电荷对电场的贡献,为使所得的解满足求解区域即球外的方程(1),像电荷必须置于球内.由轴对称性,在球内 $z = b$ 处置像电荷 q' ,于是球外任一点的电势可写成

$$\varphi = \frac{q_f}{4\pi\epsilon r} + \frac{q'}{4\pi\epsilon r'} \quad (10)$$

其中 r 是 q_f 到场点的距离, r' 是 q' 到场点的距离,即

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{\sqrt{R^2 + a^2 - 2Ra\cos\theta}}, \quad \frac{1}{r'} = \frac{1}{\sqrt{R^2 + b^2 - 2Rb\cos\theta}} \quad (11)$$

由 $R = R_0, \varphi=0$ 的条件,有

$$\left[\frac{q_f}{r} + \frac{q'}{r'} \right]_{R=R_0} = 0, \quad \text{即} \quad \frac{q'}{q_f} = -\frac{r'}{r} \Big|_{R=R_0}$$

将 r 和 r' 代入上式并两边平方,可解出

$$q' = -q_f R_0/a, \quad b = R_0^2/a \quad (12)$$

$$\varphi = \frac{q_f}{4\pi\epsilon r} - \frac{q_f R_0/a}{4\pi\epsilon r'} \quad (13)$$

此解与(5)式是一致的,它显然也满足 $R \rightarrow \infty, \varphi \rightarrow 0$ 的条件.

2.13 接地的空心导体球内外半径为 R_1 和 R_2 , 在球内离球心为 $a (a < R_1)$ 处置一点电荷 q , 用镜像法求电势. 导体球上的感应电荷有多少? 分布在内表面还是外表面?

【解】 由于接地导体球壳的静电屏蔽作用,球壳及其外部空间的电势为零,求解区域为球腔内. 设点电荷 q 位于 $z = a$, 球腔内电势的定解条件为

$$\nabla^2 \varphi = -q\delta(\mathbf{x} - a\mathbf{e}_z)/\epsilon_0 \quad (1)$$

$$R = 0, \varphi \text{ 有限}; \quad R = R_1, \varphi = 0 \quad (2)$$

由 z 轴对称性,将代替导体球面感应电荷的像电荷 q' 置于 $z = b$ 处,且必须使 $b > R_1$, 于是球腔内任一点的电势为

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{q}{r} + \frac{q'}{r'} \right] \quad (3)$$

其中 r 和 r' 分别是 q 与 q' 到场点的距离, 即

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{\sqrt{R^2 + a^2 - 2Racos\theta}}, \quad \frac{1}{r'} = \frac{1}{\sqrt{R^2 + b^2 - 2Rbcos\theta}} \quad (4)$$

由 $R = R_1, \varphi=0$ 的条件, 解出

$$q' = -qR_1/a, \quad b = R_1^2/a \quad (5)$$

将(4)和(5)代入(3), 得

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{q}{\sqrt{R^2 + a^2 - 2Racos\theta}} + \frac{-qR_1/a}{\sqrt{R^2 + (R_1^2/a)^2 - 2R(R_1^2/a)cos\theta}} \right] \quad (6)$$

这解显然满足 $R = 0, \varphi$ 值有限的条件. 因球壳及球外电势为零, 感应电荷只能分布于球壳内

表面, 设其总电量为 q_i , 则球壳内的总电量为 $q + q_i$, 而导体中 $\mathbf{D} = 0$, 于是由高斯定理

$$q + q_i = \oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = 0, \quad \text{得 } q_i = -q \quad (7)$$

可见导体球壳内表面出现的真实的感应电荷 q_i , 不等于假想的像电荷 q' .

2.14 上题的导体球壳不接地, 而是带电荷 q_0 , 或使其有确定电势 φ_0 , 试求这两种情况的电势. 又问 φ_0 与 q_0 是何种关系时, 两情况的解是相等的?

【解】导体球壳的电势 φ_2 为常数, 球腔内电势为 φ_1 , 球壳外电势为 φ_3 . 当导体球壳带有电荷 q_0 时, 定解条件为

$$\nabla^2 \varphi_1 = -q\delta(\mathbf{x} - a\mathbf{e}_z)/\epsilon_0, \quad \nabla^2 \varphi_3 = 0 \quad (1)$$

$$R = 0, \varphi_1 \text{ 有限}; \quad R \rightarrow \infty, \varphi_3 \rightarrow 0 \quad (2)$$

$$\varphi_1|_{R=R_1} = \varphi_3|_{R=R_2} = \varphi_0 \quad (\text{未知常数}) \quad (3)$$

$$\text{但 } R = R_2, \quad q + q_0 = -\epsilon_0 \oint_S \frac{\partial \varphi_3}{\partial R} dS \quad (4)$$

因球壳外部无电荷分布, 由条件(3), 球壳外的电势必定是球对称的, 又由条件(4), 可知外部电势相当于总电量 $q + q_0$ 集中于球心时所产生:

$$\varphi_3 = \frac{q + q_0}{4\pi\epsilon_0 R} \quad (R > R_2) \quad (5)$$

因此导体球壳的电势及外球面的电荷密度分别是

$$\varphi_0 = \frac{q + q_0}{4\pi\epsilon_0 R_2}, \quad \sigma_2 = \frac{(q + q_0)}{4\pi R_2^2}, \quad (R = R_2) \quad (6)$$

对于球腔内的电势，代替内球面感应电荷的像电荷 q' 仍应置于 $z = b$ ，且必须使 $b > R_1$ ；而外球面均匀分布的电荷在球腔内产生的电场为零，相应的电势可以是任意常数，就令其为 φ_0 ，于是球腔内任一点的电势可写为

$$\varphi_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{q}{r} + \frac{q'}{r'} \right] + \varphi_0, \quad (R < R_1) \quad (7)$$

其中 $1/r$ 和 $1/r'$ 如上题(4)式，将(7)代入条件(3)，解出

$$q' = -qR_1/a, \quad b = R_1^2/a \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \varphi_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} & \left[\frac{q}{\sqrt{R^2 + a^2 - 2Ra\cos\theta}} \right. \\ & \left. + \frac{-qR_1/a}{\sqrt{R^2 + (R_1^2/a)^2 - 2R(R_1^2/a)\cos\theta}} + \frac{q + q_0}{R_2} \right] \end{aligned} \quad (9)$$

当预先给定球壳的电势 φ_0 时，定解条件(3)和(4)就是

$$\varphi_1|_{R=R_1} = \varphi_3|_{R=R_2} = \varphi_0 \quad (\text{已知常数}) \quad (10)$$

按同样分析，可得

$$\varphi_3 = \frac{\varphi_0 R_2}{R}, \quad (R > R_2) \quad (11)$$

$$\begin{aligned} \varphi_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} & \left[\frac{q}{\sqrt{R^2 + a^2 - 2Ra\cos\theta}} \right. \\ & \left. + \frac{-qR_1/a}{\sqrt{R^2 + (R_1^2/a)^2 - 2R(R_1^2/a)\cos\theta}} \right] + \varphi_0, \quad (R < R_1) \end{aligned} \quad (12)$$

$\varphi_0 = (q + q_0)/4\pi\epsilon_0 R_2$ 时，两种情况下的解相等。

2.15 在接地的导体平面上有一半径为 a 的半球凸部，半球的球心在导体平面上，点电荷 q 位于系统的对称轴上，并与平面相距为 b ($b > a$)，试用电像法求空间电势。

【解】 以 z 轴为系统的对称轴，球心为坐标原点，

如图 2.4. 求解区域为导体表面上方空间, 导体表面的电势为零, 定解条件为

$$\nabla^2 \varphi = -q\delta(x, y, z - b)/\varepsilon_0$$

$$R = a, \text{ 以及 } R > a \text{ 但 } z = 0 \text{ 处, } \varphi = 0$$

$$R \rightarrow \infty, \varphi \rightarrow 0$$

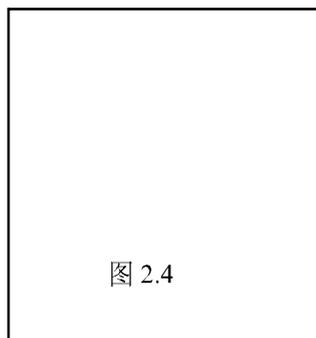


图 2.4

要满足导体表面电势为零的条件, 需在导体内设置三个假想的像电荷: 在 $z = -b$ 处置 $-q$,

在 $z = a^2/b$ 处置 $-qa/b$, 在 $z = -a^2/b$ 处置 $+qa/b$. 于是导体外任一点的电势为

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \left[\frac{q}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z - b)^2}} + \frac{-q}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z + b)^2}} + \frac{-qa/b}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z - a^2/b)^2}} + \frac{qa/b}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z + a^2/b)^2}} \right]$$

此解显然也满足 $R \rightarrow \infty, \varphi \rightarrow 0$.

2.16 有一点电荷 q 位于两个互相垂直的接地导体平面所围成的直角空间内, 它到两个平面的距离为 a 和 b , 求空间电势.

【解】 设两导体平面为 $y = 0$ 和 $z = 0$, 导体电势为零. 点电荷 q 位于 $(0, a, b)$, 求解区域为 $y > 0, z > 0$ 的空间. 定解条件为

$$\nabla^2 \varphi = -q\delta(x, y - a, z - b)/\varepsilon_0$$

$$y = 0, z = 0 \text{ 处, } \varphi = 0; R \rightarrow \infty, \varphi \rightarrow 0$$

要满足全部条件, 需要设置三个像电荷: $(0, +a, -b)$ 处置 $-q$, $(0, -a, -b)$ 处置 $+q$,

$(0, -a, +b)$ 处置 $-q$, 于是求解区域内任一点的电势为

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \left[\frac{1}{\sqrt{x^2 + (y - a)^2 + (z - b)^2}} - \frac{1}{\sqrt{x^2 + (y - a)^2 + (z + b)^2}} + \frac{1}{\sqrt{x^2 + (y + a)^2 + (z + b)^2}} - \frac{1}{\sqrt{x^2 + (y + a)^2 + (z - b)^2}} \right]$$

2.17 设有两平面围成的直角形无穷容器, 其内充满电导率为 σ 的液体, 取该两平面为 xz 面和 yz 面, 在 (x_0, y_0, z_0) 和 $(x_0, y_0, -z_0)$ 两点分别置正负电极并通以电流 I , 求导电液体中的电势.

【解】导电液体中电流密度 $J = \sigma E$ ，连接电极的导线中 $J' = \sigma' E'$ ，设 $\sigma' \gg \sigma$ ，分别作包围正、负电极的闭合曲面，由高斯定理可求出两电极的电量

$$\begin{aligned} q &= \pm \varepsilon_0 \oint_S E \cdot dS = \pm \varepsilon_0 \left(\frac{1}{\sigma'} \int_{S_1} J' \cdot dS + \frac{1}{\sigma} \int_{S_2} J \cdot dS \right) \\ &= \pm \varepsilon_0 (-I/\sigma' + I/\sigma) \cong \pm \varepsilon_0 I/\sigma \end{aligned}$$

平面 xz 和 yz 之外是绝缘体，故求解区域为 $x > 0, y > 0$ ，定解条件为

$$\nabla^2 \varphi = 0, \quad (\text{除正负电极所在点外})$$

$$x = 0 \text{ 处, } J_x = \sigma E_x = 0, \text{ 即 } \frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0$$

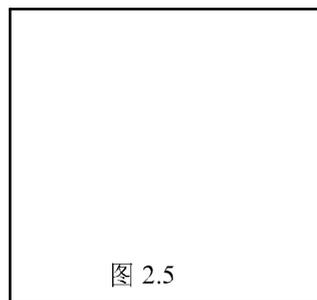
$$y = 0 \text{ 处, } J_y = \sigma E_y = 0, \text{ 即 } \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0$$

$$R \rightarrow \infty, \varphi \rightarrow 0$$

对位于 (x_0, y_0, z_0) 的正电极 $+q$ ，分别在 $(-x_0, y_0, z_0), (x_0, -y_0, z_0), (-x_0, -y_0, z_0)$ 设置像电荷 $+q$ ；对位于 $(x_0, y_0, -z_0)$ 的负电极 $-q$ ，分别在 $(-x_0, y_0, -z_0), (x_0, -y_0, -z_0), (-x_0, -y_0, -z_0)$ 设置像电荷 $-q$ 。所有这 8 个点电荷产生的电势，可满足上述全部定解条件。

2.18 一半径为 R_0 的球面，在球坐标 $0 < \theta < \pi/2$ 的半球面上电势为 φ_0 ，在 $\pi/2 < \theta < \pi$ 的半球面上电势为 $-\varphi_0$ ，求空间各点的电势。

【解】以球心为坐标原点，对称轴为 z 轴，
如图 2.5. 球内电势 φ_1 ，球外电势 φ_2 均满足方程 $\nabla^2 \varphi = 0$ ，由轴对称性，及 $R = 0, \varphi_1$ 有限，
 $R \rightarrow \infty, \varphi_2 \rightarrow 0$ 的条件，有



$$\varphi_1 = \sum_{n=1}^{\infty} a_n R^n P_n(\cos\theta), \quad \varphi_2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{R^{n+1}} P_n(\cos\theta) \quad (1)$$

在球面即 $R = R_0$ 处

$$0 < \theta < \pi/2, \quad \varphi_2 = \varphi_1 = \varphi_0$$

$$\pi/2 < \theta < \pi, \quad \varphi_2 = \varphi_1 = -\varphi_0 \quad (2)$$

函数 $f(x) = f(\cos\theta)$ 在区间 $-1 \leq x \leq +1$, 即 $0 \leq \theta \leq \pi$ 展开为级数

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n P_n(\cos\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n P_n(x) \quad (3)$$

时, 其系数为

$$C_n = \frac{2n+1}{2} \int_{-1}^{+1} f(x) P_n(x) dx \quad (4)$$

于是对级数 φ_1 , 由条件(2), 有

$$\begin{aligned} a_n R_0^n &= \frac{2n+1}{2} \int_{-1}^{+1} \varphi_1(x) P_n(x) dx \\ &= \frac{2n+1}{2} \left[\int_0^1 \varphi_0 P_n(x) dx - \int_{-1}^0 \varphi_0 P_n(x) dx \right] \\ &= (2n+1) \varphi_0 \int_0^1 P_n(x) dx \end{aligned} \quad (5)$$

由勒让德多项式的递推关系

$$\frac{d}{dx} [P_{n+1}(x) - P_{n-1}(x)] = (2n+1) P_n(x) \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \int_0^1 P_n(x) dx &= \frac{1}{2n+1} [P_{n+1}(x) - P_{n-1}(x)]_0^1 \\ &= \frac{1}{2n+1} [P_{n+1}(1) - P_{n-1}(1) - P_{n+1}(0) + P_{n-1}(0)] \end{aligned} \quad (7)$$

当 n 为任意整数 $P_n(1) = 0$; 当 n 为奇数时 $P_n(0) = 0$, 当 n 为偶数时

$$P_n(0) = (-1)^{n/2} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots n}$$

于是(5)式中

$$\begin{aligned} \int_0^1 P_n(x) dx &= 0, \text{ 当 } n \text{ 为偶数} \\ \int_0^1 P_n(x) dx &= (-1)^{\frac{n-1}{2}} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (n-2)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (n+1)} \quad (n \text{ 为奇数}) \end{aligned} \quad (8)$$

$$\text{即 } a_n = (-1)^{\frac{n-1}{2}} (2n+1) \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (n-2)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (n+1)} \frac{\varphi_0}{R_0^n} \quad (n \text{ 仅为奇数})$$

将上式的 n 改写为 $2n+1$, 因而对任意整数 n , 有

$$a_{2n+1} = (-1)^n (4n+3) \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2n} \frac{\varphi_0}{R_0^{2n+1}} \quad (9)$$

同样将(1)两式中的 n 改写为 $2n+1$, 并由 $R = R_0$ 处 $\varphi_1 = \varphi_2$, 得 φ_2 的系数

$$b_{2n+1} = a_{2n-1} R_0^{4n+3} \quad (10)$$

最后得球内外两区域的电势

$$\varphi_1 = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \left(\frac{R}{R_0}\right)^{2n-1} P_{2n+1}(\cos\theta), \quad (R < R_0) \quad (11)$$

$$\varphi_2 = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \left(\frac{R_0}{R}\right)^{2n+2} P_{2n+1}(\cos\theta), \quad (R > R_0) \quad (12)$$

其中 $A_n = a_{2n+1} R_0^{2n-1}$, a_{2n+1} 由(9)式给出. (12)式中 $n=0$ 为偶极项, $n=1$ 为八极项.....

2.19 上题能用格林函数求解吗? 结果如何?

【解】 这问题给定的边界条件是球面 S 的电势, 故应选择第一类边值问题的格林函数,

即在球面 S 上 $G(\mathbf{x}', \mathbf{x}) = 0$. 球空间格林函数

$$G(\mathbf{x}', \mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{\sqrt{R^2 + R'^2 - 2RR'\cos\alpha}} - \frac{1}{\sqrt{(RR'/R_0)^2 + R_0^2 - 2RR'\cos\alpha}} \right] \quad (1)$$

满足 $R' = R_0$ 处 $G = 0$, 其中 α 是场点位矢 \mathbf{x} 与单位点源位矢 \mathbf{x}' 之间的夹角:

$$\cos\alpha = \cos\theta\cos\theta' + \sin\theta\sin\theta'\cos(\phi - \phi') \quad (2)$$

(R, θ, ϕ) 与 (R', θ', ϕ') 分别是场点和点源的坐标. 因球内电荷体密度 $\rho = 0$, 由(2.25)式, 球内任一点的电势由积分

$$\varphi(\mathbf{x}) = -\epsilon_0 \oint_S \varphi(\mathbf{x}') \frac{\partial G(\mathbf{x}', \mathbf{x})}{\partial R'} dS' \quad (3)$$

给出, 积分面是 $R' = R_0$ 的球面. 球内任一场点到球心的距离 $R \leq R'$, 故有 $RR' \leq R_0^2$, 而轴对称下的球函数加法公式为

$$P_n(\cos\alpha) = P_n(\cos\theta)P_n(\cos\theta') = P_n(x)P_n(x') \quad (4)$$

因此格林函数(1)可展开为

$$G(\mathbf{x}', \mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{R^n}{R'^{n+1}} - \frac{R^2 R'^2}{R_0^{2n+1}} \right] P_n(x)P_n(x') \quad (5)$$

于是有

$$\left. \frac{\partial G}{\partial R'} \right|_{R'-R_0} = \frac{-1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) \frac{R^n}{R_0^{n+2}} P_n(x) P_n(x') \quad (6)$$

球面元 $dS' = R_0^2 \sin\theta' d\theta' d\phi' = -R_0^2 dx' d\phi'$ ，球面 S 上给定的边值为： $0 \leq x' \leq 1$ 处 $\varphi = \varphi_0$ ，

$-1 \leq x' \leq 0$ 处 $\varphi = -\varphi_0$ ，于是由(3)式，得球内任一点的电势

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= 2\pi\epsilon_0 R_0^2 \left[\int_{+1}^0 \varphi_0 \frac{\partial G}{\partial R'} dx' - \int_0^{-1} \varphi_0 \frac{\partial G}{\partial R'} dx' \right] \\ &= -4\pi\epsilon_0 R_0^2 \varphi_0 \int_0^1 \frac{\partial G}{\partial R'} dx' \\ &= \varphi_0 \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) \left(\frac{R}{R_0}\right)^n P_n(x) \int_0^1 P_n(x') dx' \end{aligned} \quad (7)$$

对 $P_n(x')$ 的积分已由上题(8)式给出，同样将其中的 n 改为 $2n+1$ ，便得到

$$\varphi_1 = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \left(\frac{R}{R_0}\right)^{2n+1} P_{2n+1}(\cos\theta), \quad (R < R_0) \quad (8)$$

其中 $A_n = a_{2n+1} R_0^{2n-1}$ ， a_{2n+1} 由上题(9)式给出。球外区域的电势可写为

$$\varphi_2 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_{2n+1}}{R^{2n+2}} P_{2n+1}(\cos\theta) \quad (9)$$

由 $R = R_0$ 处 $\varphi_2 = \varphi_1$ ，可得 $b_{2n+1} = a_{2n+1} R_0^{4n+3}$ ，于是有

$$\varphi_2 = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \left(\frac{R_0}{R}\right)^{2n+2} P_{2n+1}(\cos\theta), \quad (R > R_0) \quad (10)$$

这与分离变量法所得的结果一致。

补充题

2.20 已知电荷体系的电势为 $\varphi = qe^{-br}/4\pi\epsilon_0 r$ ，其中 r 是离开坐标原点的距离，常数 b 的倒数有长度的量纲，求电荷分布。

【解】电势分布为球对称性，且当 $r \rightarrow \infty$ 时， $\varphi \rightarrow 0$ 。由泊松方程 $\nabla^2 \varphi = -\rho/\epsilon_0$ ，电荷分布函数为

$$\begin{aligned} \rho &= -\epsilon_0 \nabla^2 \varphi = -\frac{q}{4\pi} \nabla \cdot \nabla \left(\frac{e^{-br}}{r} \right) \\ &= -\frac{q}{4\pi} \left[\left(\nabla \cdot \nabla \frac{1}{r} \right) e^{-br} + 2 \left(\nabla \frac{1}{r} \right) \cdot \nabla e^{-br} + \frac{1}{r} \nabla \cdot \nabla e^{-br} \right] \end{aligned}$$

而

$$\nabla \frac{1}{r} = -\frac{\mathbf{r}}{r^3}, \quad \nabla \cdot \nabla \frac{1}{r} = -\nabla \cdot \left(\frac{\mathbf{r}}{r^3}\right) = -4\pi\delta(\mathbf{r})$$

$$\delta(\mathbf{r})e^{-br} = \delta(\mathbf{r}), \quad \nabla e^{-br} = -\frac{b\mathbf{r}}{r} e^{-br}$$

于是有

$$\rho = q\delta(\mathbf{r}) - \frac{qb^2}{4\pi} \frac{e^{-br}}{r}$$

第一项是位于原点的点电荷 + q 的密度. 将第二项对整个空间作体积分将给出电量为 $-q$, 它描写球对称分布的电子云密度.

2. 21 半轴为 a, b, c 的椭球体内均匀带电, 总电量为 q , 求它在远处准确至四极项的电势. 讨论 $a = b$, 及 $a = b = c$ 的情形.

【解】以椭球中心为坐标原点. 椭球面方程为

$$\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} + \frac{z'^2}{c^2} = 1$$

椭球内电荷密度 $\rho = 3q/4\pi abc$, 它偏离了球对称, 也偏离轴对称, 但有坐标原点的对称性,

因此电偶极矩 $\mathbf{p} = 0$. 为便于计算四极矩, 将电荷分布点的坐标作变换

$$x' = ar' \sin\theta' \cos\phi', \quad y' = br' \sin\theta' \sin\phi', \quad z' = cr' \cos\theta'$$

其中 r', θ', ϕ' 为球坐标. 将这变换代入椭球面方程, 得 $r' = 1$ 的单位球面方程. 于是体积元和积分区间为

$$dV' = abc r'^2 \sin\theta' dr' d\theta' d\phi'$$

$$0 \leq r' \leq 1, \quad 0 \leq \theta' \leq \pi, \quad 0 \leq \phi' \leq 2\pi$$

利用

$$D_j = \int_V (3x'_i x'_j - r'^2 \delta_{ij}) \rho dV', \quad D_{xx} + D_{yy} + D_{zz} = 0$$

计算电四极矩, 得

$$D_{xx} = \int_V (2x'^2 - y'^2 - z'^2) \rho dV' = \frac{q}{5} (2a^2 - b^2 - c^2)$$

$$D_{yy} = \int_V (2y'^2 - x'^2 - z'^2) \rho dV' = \frac{q}{5} (2b^2 - a^2 - c^2)$$

$$D_{zz} = -(D_{xx} + D_{yy}) = \frac{q}{5} (2c^2 - a^2 - b^2)$$

$$D_{ij} = \int_V 3x'_i x'_j \rho dV' = 0 \quad (i \neq j)$$

于是四极矩的电势为

$$\begin{aligned} \varphi^{(2)}(\mathbf{x}) &= \frac{1}{24\pi\epsilon_0} \sum_{i,j=1}^3 D_{ij} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \frac{1}{R} \\ &= \frac{1}{24\pi\epsilon_0} \left[D_{xx} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + D_{yy} \frac{\partial^2}{\partial y^2} + D_{zz} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] \frac{1}{R} \\ &= \frac{q}{40\pi\epsilon_0 R^5} [(3x^2 - R^2)a^2 + (3y^2 - R^2)b^2 + (3z^2 - R^2)c^2] \end{aligned}$$

它偏离了轴对称性. 远处准确到四极项的电势为

$$\varphi(\mathbf{x}) = \varphi^{(0)} + \varphi^{(2)} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R} + \varphi^{(2)}$$

当 $a = b$, 即为均匀带电的旋转椭球, 由 $z = R\cos\theta$, 此时

$$\varphi^{(2)} = \frac{q}{40\pi\epsilon_0 R^3} (c^2 - a^2)(3\cos^2\theta - 1)$$

有 z 轴的对称性. 当 $a = b = c$, 即为均匀带电球, 便有 $\varphi^{(2)} = 0$, 球外电势只有单极项 $\varphi^{(0)}$.

2.22 在均匀静电场 \mathbf{E}_0 中置入半径为 R_0 的导体球, 证明在与外场平行的方向上, 导体球面受到的静电张力等值反向, 因而有分裂成两半的趋势.

【解】 以球心为坐标原点, 令 $\mathbf{E}_0 = E_0 \mathbf{e}_z$, 且令导体球电势为零. 球外电势满足方程

$\nabla^2 \varphi = 0$, 由边界条件 $R \rightarrow \infty, \varphi \rightarrow -E_0 R \cos\theta$; $R = R_0, \varphi = 0$, 得

$$\varphi = -E_0 R \cos\theta + \frac{E_0 R_0^3}{R^2} \cos\theta$$

导体球面的电场强度为

$$\mathbf{E} = -\nabla \varphi|_{R=R_0} = 3E_0 \cos\theta \mathbf{e}_R$$

于是它表面受到的静电应力密度为

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_s &= -\mathbf{e}_R \cdot \vec{T} = -\mathbf{e}_R \cdot (-\epsilon_0 \mathbf{E}\mathbf{E} + \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 \vec{I}) \\ &= \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 \mathbf{e}_R = \frac{9}{2} \epsilon_0 E_0^2 \cos^2 \theta \mathbf{e}_R \end{aligned}$$

在 $\theta = 0, \pi$, 即与作用外场平行的方向上力密度最大. 将上式的 \mathbf{e}_R 分解为三个直角分量 (见

附录 V.9 式) 并对两半球面积分, 得两半球面受到的力分别为

$$F_u = \int_S f_S dS = \frac{9}{4} \pi \epsilon_0 E_0^2 R_0^2 e_z, \quad \text{当 } 0 \leq \theta \leq \pi/2$$

$$F_d = \int_S f_S dS = -\frac{9}{4} \pi \epsilon_0 E_0^2 R_0^2 e_z, \quad \text{当 } \pi/2 \leq \theta \leq \pi$$

两者等值反向, 因而导体球有分裂成两半的趋势.

2.23 在 $z > 0$ 和 $z < 0$ 两区域分别充满电容率为 ϵ_2 与 ϵ_1 的均匀介质, $z = a$ 处有一点电荷 q , 求电势分布, 以及电荷 q 受到的作用力.

【解】这问题有 z 轴对称性. 电荷 q 的电场使两区域的介质均被极化. 定解条件为

$$\nabla^2 \varphi_2 = -q \delta(x, y, z - a) / \epsilon_2, \quad \nabla^2 \varphi_1 = 0 \quad (1)$$

$$z = 0: \quad \varphi_2 = \varphi_1, \quad \epsilon_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial z} = \epsilon_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} \quad (2)$$

以假想的像电荷产生的场代替极化电荷的场. 为满足 $z > 0$ 区域 φ_2 的方程, 在 $z = -a$ 处置像电荷 q' , 则此区域任一点的电势为

$$\varphi_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_2} \left[\frac{q}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z - a)^2}} + \frac{q'}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z + a)^2}} \right] \quad (3)$$

为满足 $z < 0$ 区域 φ_1 的方程, 设 $z = a$ 处原电荷 q 与像电荷之和为 q'' , 于是此区域的电势为

$$\varphi_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_1} \frac{q''}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z - a)^2}} \quad (4)$$

由条件(2), 可解得

$$q' = -\frac{\epsilon_1 - \epsilon_2}{\epsilon_1 + \epsilon_2} q, \quad q'' = -q' = q + \frac{-2\epsilon_2}{\epsilon_1 + \epsilon_2} q \quad (5)$$

将 q' 和 q'' 代入(3)和(4), 即得电势解. 电荷 q 受到的力, 等效于 q' 的电场对其作用力:

$$F = qE' = \frac{qq'}{4\pi\epsilon_2(2a)^2} e_z = -\frac{q^2(\epsilon_1 - \epsilon_2)}{16\pi\epsilon_2(\epsilon_1 + \epsilon_2)a^2} e_z \quad (6)$$

若 $\epsilon_1 > \epsilon_2$, q 将受到吸引力, 这是因为, 此时界面即 $z = a$ 处出现的总极化电荷 (在无限靠近界面的两侧, 都有极化面电荷分布) 面密度

$$\sigma_p = \epsilon_0 e_z \cdot (E_2 - E_1) = -\epsilon_0 \left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial z} - \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} \right) \quad (7)$$

与 q 异号；若 $\varepsilon_1 < \varepsilon_2$ ，此时 σ_p 将与 q 同号，故 q 将受到排斥力。

补充题

1. 半径为 a 的介质球面电荷面密度为 $\sigma = \sigma_0 \cos \theta'$ ，求远处的电势(准确到四极项)。

【解】电荷面密度分布函数有关于坐标原点的反对称性，可知该系统的净电荷与电四极矩均为零。由

$$\mathbf{p} = \oint_S \mathbf{r}' \sigma' dS'$$

及电荷分布点的坐标，与球面元

$$x' = a \sin \theta' \cos \phi', \quad y' = a \sin \theta' \sin \phi', \quad z' = a \cos \theta'$$

$$dS' = a^2 \sin \theta' d\theta' d\phi'$$

得电偶极矩的各分量：

$$p_x = \oint_S \sigma_0 \cos \theta' x' dS' = 0$$

$$p_y = \oint_S \sigma_0 \cos \theta' y' dS' = 0$$

$$p_z = \oint_S \sigma_0 \cos \theta' z' dS' = a^3 \sigma_0 \int_0^\pi \cos^2 \theta' \sin \theta' d\theta' \int_0^{2\pi} d\phi' = 4\pi a^3 \sigma_0 / 3$$

即

$$\mathbf{p} = \frac{4\pi a^3 \sigma_0}{3} \mathbf{e}_z$$

于是远处的电势（其实也是外部的电势）为

$$\varphi(\mathbf{x}) = \varphi^{(1)}(\mathbf{x}) = \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{R}}{4\pi \varepsilon_0 R^3} = \frac{a^3 \sigma_0 \cos \theta}{3\varepsilon_0 R^2}$$

2. 半径为 a 的细圆环均匀带有电荷 q ，求远处的电势(准确到四极项)。

【解】令圆环处于 xy 平面，环心为坐标原点。由于电荷分布有关于原点的对称性，这系统的电偶极矩 $\mathbf{p} = 0$ 。电荷密度 $\lambda = q / 2\pi a$ ，细圆环的线元 $d\mathbf{l}' = a d\phi'$ 。利用

$$D_{ij} = \oint_L (3x'_i x'_j - r'^2 \delta_{ij}) \lambda dl'$$

$$D_{xx} + D_{yy} + D_{zz} = 0$$

计算电四极矩，显然有

$$D_{xx} = D_{yy}; \quad D_{ij} = 0, \quad \text{当 } i \neq j$$

$$D_{xx} = \oint_L (3x'^2 - a^2) \lambda dl' = \frac{a^2 q}{2} = D_{yy}$$

$$D_{zz} = -2D_{xx} = -a^2 q$$

准确至四极项，该系统在远处的电势为

$$\varphi(\mathbf{x}) = \varphi^{(0)} + \varphi^{(2)} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R} + \varphi^{(2)}$$

其中四极项电势为

$$\begin{aligned} \varphi^{(2)}(\mathbf{x}) &= \frac{1}{24\pi\epsilon_0} \sum_{i,j=1}^3 D_{ij} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \frac{1}{R} \\ &= \frac{1}{24\pi\epsilon_0} \left[D_{xx} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + D_{yy} \frac{\partial^2}{\partial y^2} + D_{zz} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] \frac{1}{R} \\ &= \frac{1}{24\pi\epsilon_0 R^5} [(3x^2 - R^2) D_{xx} a^2 + (3y^2 - R^2) D_{yy} + (3z^2 - R^2) D_{zz}] \\ &= \frac{a^2 q}{16\pi\epsilon_0 R^3} (1 - 3 \cos^2 \theta) \end{aligned}$$

第三章习题与解答

3.1 试用 \mathbf{A} 表示一个沿 z 方向的均匀恒定磁场 \mathbf{B} ，写出 \mathbf{A} 的两种不同表示式，证明二者之差是无旋场。

【解】由 $\nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{B}e_z$ ，在直角坐标系中，有

$$\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} = B, \quad \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} = 0$$

有许多 \mathbf{A} 场可以满足这组方程，其中两个 \mathbf{A} 场可选为

$$\mathbf{A}_1 = -Bye_x, \quad \mathbf{A}_2 = Bxe_y$$

而且显然有

$$\nabla \times (\mathbf{A}_1 - \mathbf{A}_2) = -\frac{\partial}{\partial y}(-By) - \frac{\partial}{\partial x}(Bx) = 0$$

3.2 均匀无穷长直圆柱形螺线管，每单位长度线圈匝数为 n ，电流为 I ，试用唯一性定理求管内外磁感应强度 \mathbf{B} 。

【解】设螺线管截面半径为 a ， z 轴为其中心轴，在柱坐标系中，螺线管表面电流密度 $\alpha_f = nIe_\phi$ 。记螺线管内部磁场为 \mathbf{B}_1 ，外部磁场为 \mathbf{B}_2 ，全部定解条件为

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad \nabla \times \mathbf{H} = 0, \quad (r < a, r > a) \quad (1)$$

$$r = 0, \quad \mathbf{B}_1 \text{ 有限}; \quad r \rightarrow \infty, \quad \mathbf{B}_2 \rightarrow 0 \quad (2)$$

$$r = a, \quad B_{2r} = B_{1r}, \quad \mathbf{e}_r \times (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1) = nIe_\phi \quad (3)$$

由于螺线管无穷长，外部磁场应为 $\mathbf{B}_2 = \mu_0 \mathbf{H}_2 = 0$ 。由(3)的第二个条件，内部磁场应为

$$\mathbf{H}_1 = nIe_z, \quad \mathbf{B}_1 = \mu_0 nIe_z \quad (4)$$

这解满足两区域中的场方程(1)和全部边界条件，因此是唯一正确的解。

3.3 设有无穷长的线电流 I 沿 z 轴流动， $z < 0$ 空间充满磁导率为 μ 的均匀介质， $z > 0$ 区域为真空，试用唯一性定理求磁感应强度 \mathbf{B} ，然后求出磁化电流分布。

【解】电流 I 的磁场使介质磁化。记 $z < 0$ 区域磁场为 \mathbf{B}_1 ， $z > 0$ 区域磁场为 \mathbf{B}_2 ，在柱坐标系中，全部定解条件为

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad \nabla \times \mathbf{H} = 0, \quad (z < 0, z > 0, r \neq 0) \quad (1)$$

$$r=0, \mathbf{H}_1 \text{ 和 } \mathbf{H}_2 \rightarrow \infty; r \rightarrow \infty, \mathbf{H}_1 \text{ 和 } \mathbf{H}_2 \rightarrow 0 \quad (2)$$

$$z=0, B_{2z} = B_{1z}, \mathbf{e}_z \times (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1) = 0 \quad (3)$$

因电流线无穷长, 而介质是均匀的, 两区域内的磁场应当只有 \mathbf{e}_ϕ 分量, 而且只是离开电流线距离 r 的函数, 由安培环路定理提出尝试解:

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_1 = \mathbf{H}_2 &= \frac{I}{2\pi r} \mathbf{e}_\phi \\ \mathbf{B}_1 = \mu \mathbf{H}_1 &= \frac{\mu I}{2\pi r} \mathbf{e}_\phi, \quad \mathbf{B}_2 = \mu_0 \mathbf{H}_2 = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \mathbf{e}_\phi \end{aligned} \quad (4)$$

可以验证, 这解满足全部定解条件. 由 $\mathbf{B}_1 = \mu_0(\mathbf{H}_1 + \mathbf{M}_1) = \mu \mathbf{H}_1$, 得介质的磁化强度

$$\mathbf{M}_1 = \left(\frac{\mu}{\mu_0} - 1\right) \mathbf{H}_1 = \left(\frac{\mu}{\mu_0} - 1\right) \frac{I}{2\pi r} \mathbf{e}_\phi \quad (5)$$

上半空间 $\mathbf{M}_2 = 0$, 因此介质表面即 $z=0$ 处磁化电流面密度为

$$\boldsymbol{\alpha}_M = \mathbf{e}_z \times (\mathbf{M}_2 - \mathbf{M}_1) = -\mathbf{e}_z \times \mathbf{M}_1 = \left(\frac{\mu}{\mu_0} - 1\right) \frac{I}{2\pi r} \mathbf{e}_r \quad (6)$$

这电流显然是从 $r=0$ 处流出并沿介质表面径向流动, 根据电流的连续性, 可判断下半空间的介质中, $r \rightarrow 0$ 即电流线表面存在“线磁化电流”

$$I_M = \oint_L \mathbf{M}_1 \cdot d\mathbf{l} = \left(\frac{\mu}{\mu_0} - 1\right) I, \quad (z < 0, r \rightarrow 0) \quad (7)$$

3.4 设 $x < 0$ 半空间充满磁导率为 μ 的均匀介质, $x > 0$ 空间为真空, 今有线电流 I 沿 z 轴流动, 求磁感应强度和磁化电流分布.

【解】电流的磁场使介质磁化. 记 $x < 0$ 区域磁场为 \mathbf{B}_1 , $x > 0$ 区域磁场为 \mathbf{B}_2 , 在柱坐标系中, 全部定解条件为

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \nabla \times \mathbf{H} = 0, \quad (x < 0, x > 0, r \neq 0) \quad (1)$$

$$r=0, \mathbf{H}_1 \text{ 和 } \mathbf{H}_2 \rightarrow \infty; r \rightarrow \infty, \mathbf{H}_1 \text{ 和 } \mathbf{H}_2 \rightarrow 0 \quad (2)$$

$$x=0, B_{2x} = B_{1x}, \mathbf{e}_x \times (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1) = 0 \quad (3)$$

因电流线无穷长, 而介质是均匀的, 两区域的 \mathbf{H} 和 \mathbf{B} 应当只是离开线电流的距离 r 的函数而且只有 \mathbf{e}_ϕ 分量, 由安培环路定理, 对围绕着电流线、任意半径 r 的圆, 有

$$\int_{L_1} \mathbf{H}_1 \cdot d\mathbf{l} + \int_{L_2} \mathbf{H}_2 \cdot d\mathbf{l} = I \quad (4)$$

由(3)的第一个条件及对称性, 应当有 $\mathbf{B}_1 = \mathbf{B}_2$, 而 $\mathbf{B}_1 = \mu\mathbf{H}_1$, $\mathbf{B}_2 = \mu_0\mathbf{H}_2$, 于是由(4)得尝试解

$$\mathbf{B}_1 = \mathbf{B}_2 = \frac{\mu\mu_0}{\mu + \mu_0} \frac{I}{\pi r} \mathbf{e}_\phi \quad (5)$$

$$\mathbf{H}_1 = \frac{\mu_0}{\mu + \mu_0} \frac{I}{\pi r} \mathbf{e}_\phi, \quad \mathbf{H}_2 = \frac{\mu}{\mu + \mu_0} \frac{I}{\pi r} \mathbf{e}_\phi \quad (6)$$

这解显然满足全部定解条件. 由 $\mathbf{M}_2 = \mathbf{0}$, $\mathbf{M}_1 = (\mu/\mu_0 - 1)\mathbf{H}_1$, 在电流线周围作 $r \rightarrow 0$ 的无限小圆周 L , 得电流线与介质分界面出现的“线磁化电流”

$$I_M = \oint_L \mathbf{M} \cdot d\mathbf{l} = \int_{L_1} \mathbf{M}_1 \cdot d\mathbf{l} = \frac{\mu - \mu_0}{\mu + \mu_0} I \quad (7)$$

3.5 某空间区域内有轴对称磁场, 在柱坐标原点附近已知 $B_z \cong B_0 - C(z^2 - r^2/2)$, 其中 B_0 为常量, 求该处的 B_r .

【解】磁场有 z 轴对称性, 意味着其分量 $B_\phi = 0$ (或 B_ϕ 与坐标 ϕ 无关). 于是在柱坐标系中, 由

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{B} &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rB_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial B_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial B_z}{\partial z} \\ &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rB_r) - 2Cz = 0 \end{aligned}$$

得 $B_r = Czr + A/r$, A 可以是 ϕ, z 的任意函数, 但因为这是原点附近小区域的轴对称磁场, 可令 $A = 0$, 即有

$$B_r \cong Czr$$

可以验证, $\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{0}$, 即该处 $\mathbf{J}_f = \mathbf{0}$. 若常量 $B_0 = \mu_0 I / 2a$, $C = 3\mu_0 I / 4a^3$, 则

$$B_z \cong \frac{\mu_0 I}{2a} - \frac{3\mu_0 I}{4a^3} (z^2 - \frac{r^2}{2}), \quad B_r \cong \frac{3\mu_0 I}{4a^3} zr$$

描写半径为 a , 电流为 I 的圆电流圈在其中心附近的磁场.

3.6 两个半径为 a 的共轴圆形线圈, 位于 $z = \pm L$ 面上, 每个线圈上载有同方向的电流 I .

- (1) 求轴线上的磁感应强度；
 (2) 求在中心区域产生最接近均匀的磁场时 L 和 a 的关系。

【解】 设两线圈中的电流 I 均沿 \mathbf{e}_ϕ 方向，用毕奥—萨伐尔定律，可分别求出两个电流圈在 z 轴上任一点的磁感应强度 B_{1z} 和 B_{2z} ，再将两者相加，即得

$$B_z = \frac{\mu_0 I a^2}{2} \left\{ \frac{1}{[(L-z)^2 + a^2]^{3/2}} + \frac{1}{[(L+z)^2 + a^2]^{3/2}} \right\}$$

在中心区域存在最接近于均匀磁场的条件为

$$\left. \frac{\partial^2 B_z}{\partial z^2} \right|_{z=0} = 0, \quad \text{得 } L = a/2$$

3.7 半径为 a 的无限长圆柱导体内有恒定电流 \mathbf{J} 均匀分布于截面上，试解矢势 \mathbf{A} 的微分方程，设导体的磁导率为 μ_0 ，导体外的磁导率为 μ 。

【解】 设 z 轴为导体柱的中心轴，导体内电流密度 $\mathbf{J} = J\mathbf{e}_z$ 。由于电流不是分布于有限区域，应选择有限远的点为矢势零值参考点，可令 $r = a$ 即导体柱面 $\mathbf{A} = 0$ 。则在柱坐标系中，导体内、外两区域矢势的全部定解条件为

$$\nabla^2 \mathbf{A}_1 = -\mu_0 J \mathbf{e}_z, \quad (\nabla \cdot \mathbf{A}_1 = 0), \quad (r < a) \quad (1)$$

$$\nabla^2 \mathbf{A}_2 = 0, \quad (\nabla \cdot \mathbf{A}_2 = 0), \quad (r > a) \quad (2)$$

$$r = 0, \quad \mathbf{A}_1 \text{ 有限} \quad (3)$$

$$r = a: \quad \mathbf{A}_1 = \mathbf{A}_2 = 0, \quad \mathbf{e}_r \times \left(\frac{1}{\mu} \nabla \times \mathbf{A}_2 - \frac{1}{\mu_0} \nabla \times \mathbf{A}_1 \right) = 0 \quad (4)$$

因导体内的电流总是沿 \mathbf{e}_z 方向，从方程(1)可知导体内矢势 \mathbf{A}_1 只能有 \mathbf{e}_z 方向的分量，且由对称性它只是 r 的函数，即 $\mathbf{A}_1 = A_1(r)\mathbf{e}_z$ ；又由 $r = a$ 处矢势连续的条件，外部矢势也只能是 $\mathbf{A}_2 = A_2(r)\mathbf{e}_z$ ，于是方程(1)和(2)分别是

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dA_1}{dr} \right) = -\mu_0 J, \quad \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dA_2}{dr} \right) = 0 \quad (5)$$

边界条件(4)为

$$r = a \text{ 处, } A_1 = A_2 = 0, \quad \frac{1}{\mu} \frac{dA_2}{dr} = \frac{1}{\mu_0} \frac{dA_1}{dr} \quad (6)$$

对(5)的两个方程积分, 得

$$\frac{dA_1}{dr} = -\frac{\mu_0}{2} Jr + \frac{c_1}{r}, \quad A_1 = -\frac{\mu_0}{4} Jr^2 + c_1 \ln r + c_2$$

$$\frac{dA_2}{dr} = \frac{c_3}{r}, \quad A_2 = c_3 \ln r + c_4$$

各积分常数 c_i 由条件(3)和(6)确定, 得

$$c_1 = 0, \quad c_2 = \frac{\mu_0}{4} Ja^2, \quad c_3 = -\frac{\mu}{2} Ja^2, \quad c_4 = -c_3 \ln a \quad (7)$$

$$A_1 = \frac{\mu_0}{4} (a^2 - r^2) J, \quad A_2 = \frac{\mu a^2 J}{2} \ln \frac{a}{r} \quad (8)$$

可以验证, A_1 和 A_2 均满足库仑规范条件 $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$.

3.8 假设存在磁单极子, 其磁荷为 q_m , 它的磁场强度为

$$\mathbf{H} = \frac{q_m \mathbf{r}}{4\pi\mu_0 r^3}$$

试找出矢势 \mathbf{A} 的一个可能的表达式, 并讨论它的奇异性.

【解】 以磁荷所在点为坐标原点, 由 $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$, 通过任一半径为 r 的球冠的磁通量为

$$\Phi = \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \int_S (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{S} = \oint_L \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} \quad (1)$$

如图 3.1. 其中球面元矢量 $d\mathbf{S} = r^2 \sin\theta d\theta d\phi \mathbf{e}_r$, 球冠底面边界 L 的线元矢量

$d\mathbf{l} = r \sin\theta d\phi \mathbf{e}_\phi$. 由(1)式可知, 矢势 $\mathbf{A} = A_r \mathbf{e}_r + A_\theta \mathbf{e}_\theta + A_\phi \mathbf{e}_\phi$ 的三个分量中, 只有 A_ϕ 对磁

通量有贡献, 故可令 $A_r = A_\theta = 0$, 且 A_ϕ 与坐标 ϕ 无关, 于是由 $\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}$, (1)式两边分别给

出

$$\int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \frac{q_m}{4\pi} \int_0^\theta \sin\theta d\theta \int_0^{2\pi} d\phi = \frac{q_m}{4\pi} (1 - \cos\theta) 2\pi$$

$$\oint_L \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = A_\phi r \sin\theta \int_0^{2\pi} d\phi = 2\pi A_\phi r \sin\theta$$

由此得矢势一个可能的表达式为

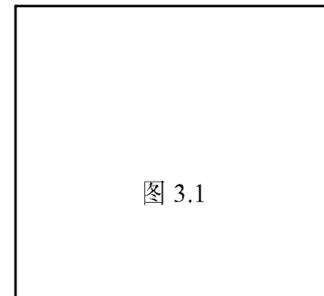


图 3.1