

第5章 卷积与滤波

中国科学技术大学

曾凡平

第5章 主要内容

- 本章将继续讨论滤波问题，而这里的滤波是用卷积方法实现的。本章内容包括：
 1. 定义和解释卷积滤波
 2. 解释边界效应
 3. 确定输出响应的暂态和稳态
 4. 建立差分方程与卷积之间的联系
 5. 研究滑动平均滤波器
 6. 解释如何进行数字图像滤波

5.1 卷积基础(digital convolution)

- **单位脉冲响应 $h[n]$ 是系统对单位脉冲函数输入的响应。**每个滤波器都有单位脉冲响应。如果已知滤波器的单位脉冲响应 $h[n]$ ，则可以利用卷积的方法来计算滤波器在任意输入的输出。
- 由第3章可知，**任何输入的数字信号均可以表示成时延脉冲的线性组合，即：**

数字信号的脉冲表示

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \cdot \delta[n-k]$$

$$x[n] = x[0] \cdot \delta[n] + x[1] \cdot \delta[n-1] + \dots + x[k] \cdot \delta[n-k] + \dots$$

例5.1 输入信号表示为脉冲的线性组合

例5.1 信号 $x[n]$ 如图5.1所示，求 $x[n]$ 的表达式。

解：

- 根据3.3.1节中的方法，函数 $x[n]$ 可以用脉冲函数写成：

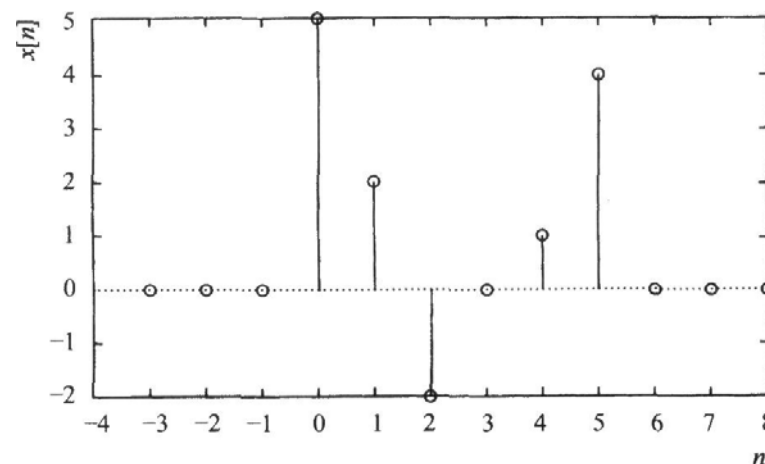
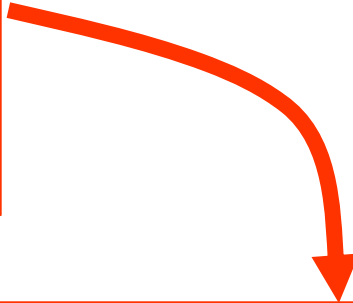


图 5.1 例 5.1 的信号

$$\begin{aligned}
 x[n] &= x[0]\delta[n] + x[1]\delta[n-1] + x[2]\delta[n-2] + x[3]\delta[n-3] + x[4]\delta[n-4] + x[5]\delta[n-5] \\
 &= 5\delta[n] + 2\delta[n-1] - 2\delta[n-2] + \delta[n-4] + 4\delta[n-5]
 \end{aligned}$$

数字卷积

- 由于滤波器为线性时不变因果系统，当输入是 $\delta[n-k]$ ，则输出为 $h[n-k]$ 。
- 输入 $x[n]$ 的分量 $x[k] \delta[n-k]$ 的自变量是时间 n ，其中的 $x[k]$ 可以看成是与 n 无关的常数。因此分量 $x[k] \delta[n-k]$ 产生的输出为 $x[k]h[n-k]$ 。
- 由线性性质： $x[n]$ 产生的输出为所有分量产生的输出之和：

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \cdot \delta[n-k]$$


$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \cdot h[n-k] \stackrel{\Delta}{=} x[n] * h[n]$$

$x[n] * h[n]$: 数字卷积

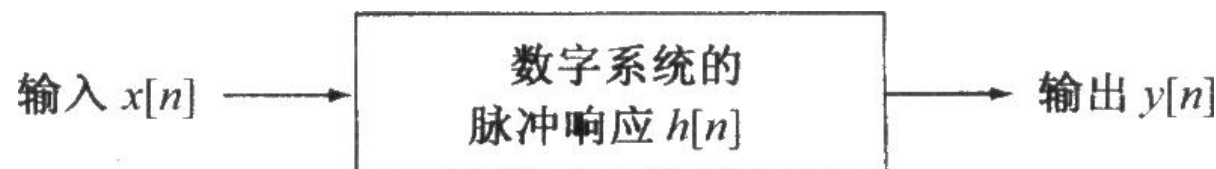


图 5.2 数字卷积

卷积的计算

- 可见，系统的输出取决于输入 $x[n]$ 和系统的脉冲响应 $h[n]$ 。卷积事实上等于序列 $x[k]$ 和 $h[k]$ 的反转位移序列相乘。
- 卷积的计算：逐点相乘后相加，这里要理解 $h[n-k]$ 的含义： $h[-k]$ 是 $h[k]$ 关于纵轴的镜像； $h[n-k]$ 是 $h[-k]$ 右移 n 个采样点所得的值。

例5.2 脉冲响应的反转位移序列

例5.2 已知脉冲响应 $h[n]=3\delta[n]-2\delta[n-1]+\delta[n-3]+\delta[n-4]$ 。画出下列函数图形：

1. $h[n]$
2. $h[-n]$
3. $h[1-n]$
4. $h[7-n]$

解：

1. 脉冲响应 $h[n]$ 采样值列于表5.1，并画于图5.3中。
2. 从表5.1中的 $h[n]$ ，很容易得到表5.2中 $h[-n]$ 的值，如图5.4所示。正如所料， $h[-n]$ 是 $h[n]$ 关于纵轴的镜像。
3. 表5.3和图5.5所示的 $h[1-n]$ 的值和图，很容易由b的列表和图得到。注意 $h[1-n]$ 是由 $h[-n]$ 右移一个单位得到的。
4. 用与c中相同的方法，可以得到表5.4和图5.6所示的信号 $h[7-n]$ ，函数 $h[7-n]$ 是 $h[-n]$ 右移7个单位得到的。

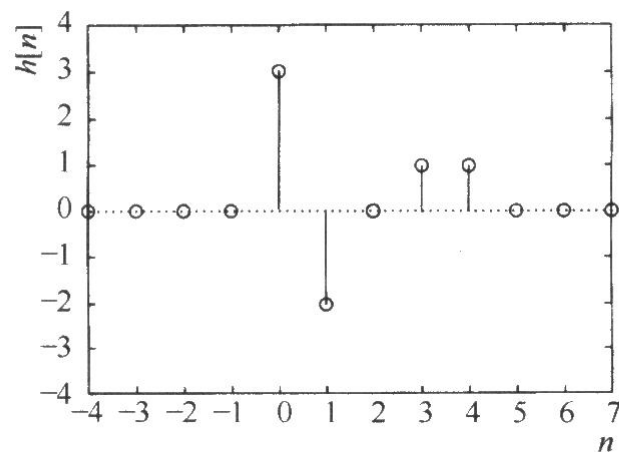


图 5.3 例 5.2a $h[n]$ 的图

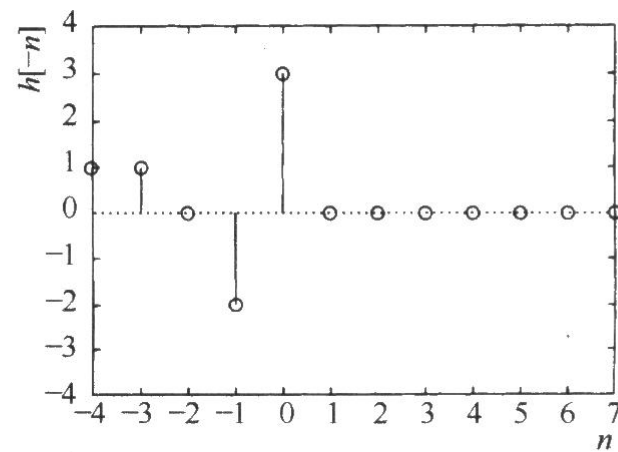


图 5.4 例 5.2b $h[-n]$ 的图

表 5.1 例 5.2a 的脉冲响应值 $h[n]$

n	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7
$h[n]$	0	0	0	0	3	-2	0	1	1	0	0	0

表 5.2 例 5.2b 的移位脉冲响应值

n	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7
$-n$	4	3	2	1	0	-1	-2	-3	-4	-5	-6	-7
$h[-n]$	1	1	0	-2	3	0	0	0	0	0	0	0

表 5.3 例 5.2c 的移位脉冲响应值

n	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7
$1-n$	5	4	3	2	1	0	-1	-2	-3	-4	-5	-6
$h[1-n]$	0	1	1	0	-2	3	0	0	0	0	0	0

表 5.4 例 5.2d 的移位脉冲响应值

n	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7
$7-n$	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0
$h[7-n]$	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	-2	3

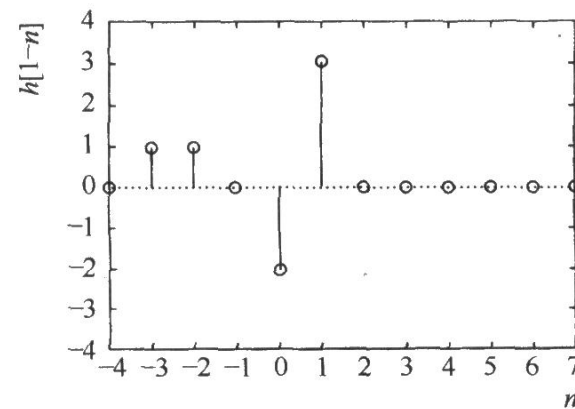


图 5.5 例 5.2c 中 $h[1-n]$ 的图

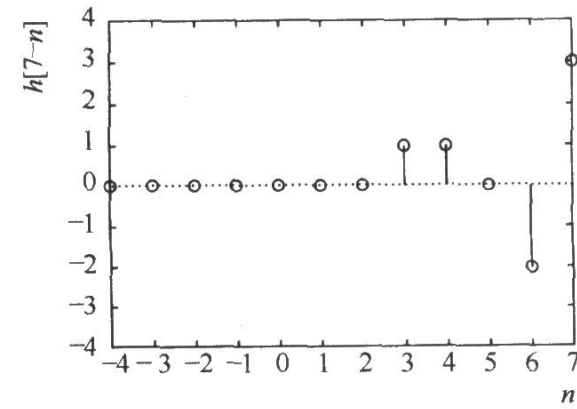


图 5.6 例 5.2d 中 $h[7-n]$ 的图

例5.3 数字系统的输入 $x[n]$ 和脉冲响应 $h[n]$ 如图5.7所示。
求系统的输出 $y[n]$ 。

解：

要求输出，必须计算 $x[n]$ 和 $h[n]$ 的卷积。式(5.2)的卷积定义式表明， $x[k]$ 以及 $h[n-k]$ 关于 k 的图形可用来图示数字卷积的计算。如图5.8所示，每个 $y[n]$ 的值可以通过将 $x[k]$ 和 $h[n-k]$ 逐点相乘，然后相加得到。对于 $n < 0$ 和 $n > 5$ ，输出值为0。图5.8计算得到的输出信号如图5.9所示。

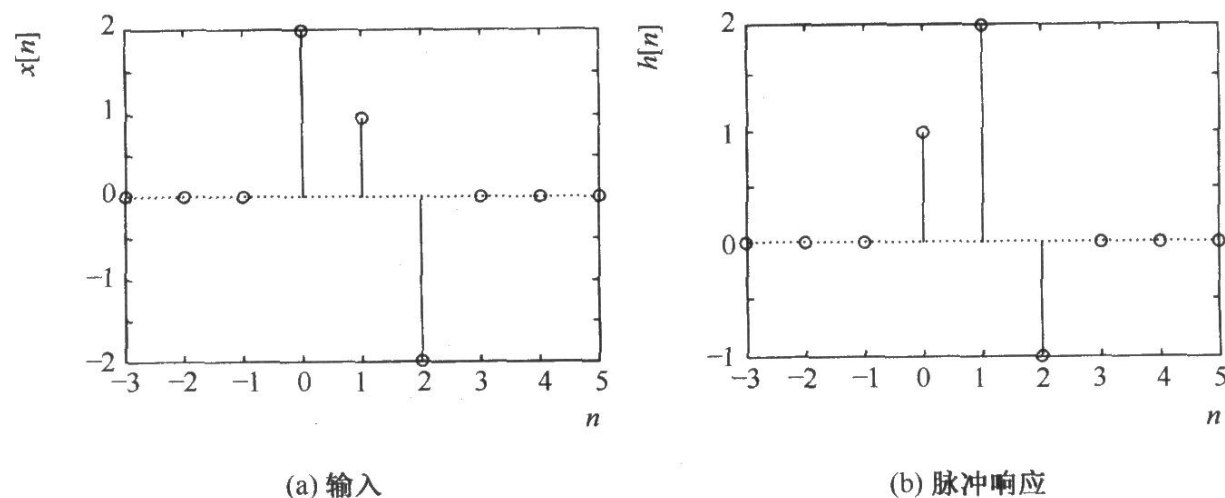


图 5.7 例 5.3 的系统输入和脉冲响应

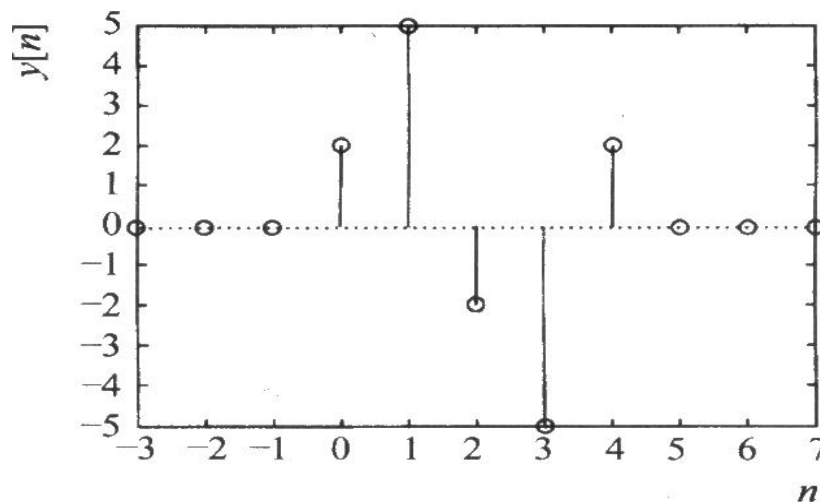


图 5.9 例 5.3 的输出

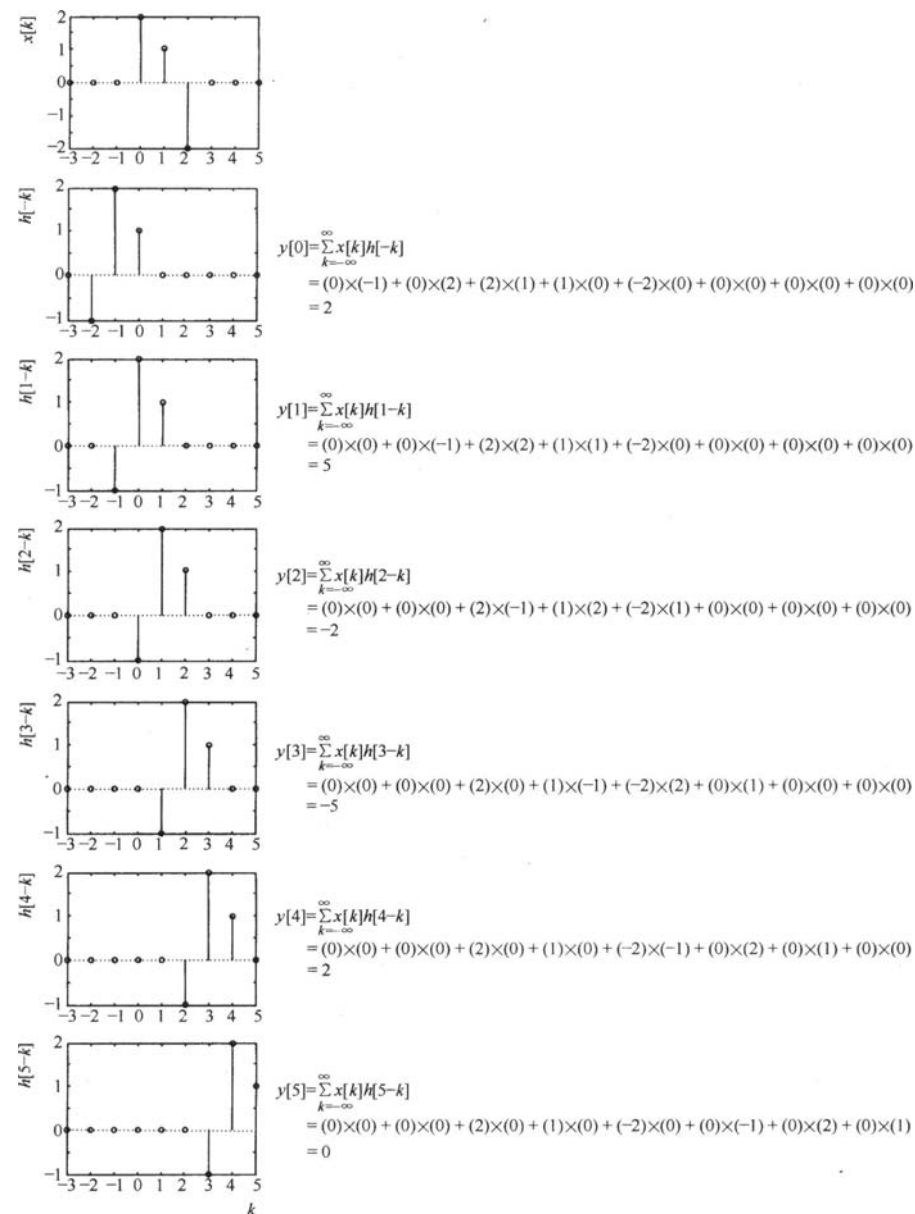


图 5.8 例 5.3 的图示法计算数字卷积

计算数字卷积的步骤

- 为了避免画图，例5.3的计算过程也可以改用列表。表5.5总结了列表计算数字卷积的步骤，同时表5.6给出了例5.3的计算结果。将跨行的乘积相加即可得到每一个输出 $y[n]$ ，计算结果同前。
- 表5.5(右表)列出了计算数字卷积的步骤。

1. 列出输入采样值，空白处为0。
2. 倒序列出脉冲响应值，使 $n=0$ 的脉冲响应与 $n=0$ 的输入对齐。
3. 当两序列均不为零时，相乘然后相加即可得到输出值
4. 将倒序的脉冲响应右移一个单位(采样点)。
5. 重复第3步(只要两个序列之间有非零的重叠部分)。
6. 其余输出采样值为0

- 如果已知输入序列的前后均为零(如上例)，那么计算的输出是准确的(具有物理意义)。
- **但多数情况下，采样开始之前的输入情况是未知的。**当脉冲响应与未知的输入采样点重叠时，由于实际的输出值可能受采样开始之前输入信号的影响，所以无法准确地计算输出。计算的开始和末尾都存在这种现象。**仅当输入序列与脉冲响应完全重叠时， $y[n]$ 的计算才有意义。**

$x[k]:$			2	1	-2				
$h[-k]:$	-1	2	1				$y[0] = 2$		
$h[1-k]:$		-1	2	1			$y[1] = 5$		
$h[2-k]:$			-1	2	1		$y[2] = -2$		
$h[3-k]:$				-1	2	1	$y[3] = -5$		
$h[4-k]:$					-1	2	1	$y[4] = 2$	
$h[5-k]:$						-1	2	1	$y[5] = 0$

边界效应

- 边界效应(boundary effect): 待考察的采样区间之前和之后的输入情况未知，导致输出的开始和末尾无法精确计算。

$x[k]$:	1	-2	3	1	5	2	0	1	2	4	
$h[-k]$:	-3	2	-1	4							? $y[0] = 4$
$h[1-k]$:		-3	2	-1	4						? $y[1] = -9$
$h[2-k]$:			-3	2	-1	4					? $y[2] = 16$
$h[3-k]$:				-3	2	-1	4				$y[3] = -6$
...											...
$h[9-k]$:					-3	2	-1	4			$y[9] = 16$
$h[10-k]$:						-3	2	-1	4		? $y[10] = -3$
$h[11-k]$:							-3	2	-1	4	? $y[11] = 2$
$h[12-k]$:								-3	2	-1	4 ? $y[12] = -12$

FIR与IIR受边界效应的采样点长度是不同的

- 有限脉冲响应滤波器**FIR**:
受影响的开始和末尾区间长度等于**脉冲响应长度减1**。
- 无限脉冲响应滤波器**IIR**:
边界效应随脉冲响应的采样值变小而减弱(长度 $=\max(N, M)$)。
- **系统的暂态输出**: 由系统的结构(系统的零点和极点)决定，对于稳定的滤波器而言，暂态输出将**衰减到零**。

稳态输出

- **系统的稳态输出**：由输入信号决定，跟随输入的变化而变化。
- **稳态的判断**：**IIR**的输出与前一周期的值相比，变化小于1%。
- 例5.4 (P115) 例5.5 例5.6

例5.4 系统的输入是单位阶跃序列，脉冲响应为
 $h[n]=0.4 \delta[n]-\delta[n-1]+0.7 \delta[n-2]$ 。求系统的输出
 $y[n]$ ，并指出输出的暂态和稳态部分。

解：

- 单位阶跃序列已在3.3.2节中给出定义。它的采样值在 $n=0$ 以前是0，其后全是1。这个信号作为 $x[n]$ 列在表5.8中。表的其他部分给出了反转及位移后的脉冲响应序列和系统的输出。如图5.10所示，输出仅在两个采样点后就达到了稳态值0.1。这两个采样周期足够完成输出的暂态过程，它们包含了滤波器的边界效应。注意，因为输入阶跃序列为常数，输出最终也稳定到一个常数。稳态输出从 $n=2$ 开始。

表5.8 例5.4的计算

$x[k]:$			1	1	1	1	1	1		
$h[-k]:$	0.7	-1	0.4						$y[0] = 0.4$	
$h[1-k]:$		0.7	-1	0.4					$y[1] = -0.6$	
$h[2-k]:$			0.7	-1	0.4				$y[2] = 0.1$	
$h[3-k]:$				0.7	-1	0.4			$y[3] = 0.1$	
$h[4-k]:$					0.7	-1	0.4		$y[4] = 0.1$	
$h[5-k]:$						0.7	-1	0.4	$y[5] = 0.1$	
$h[6-k]:$							0.7	-1	0.4	$y[6] = 0.1$

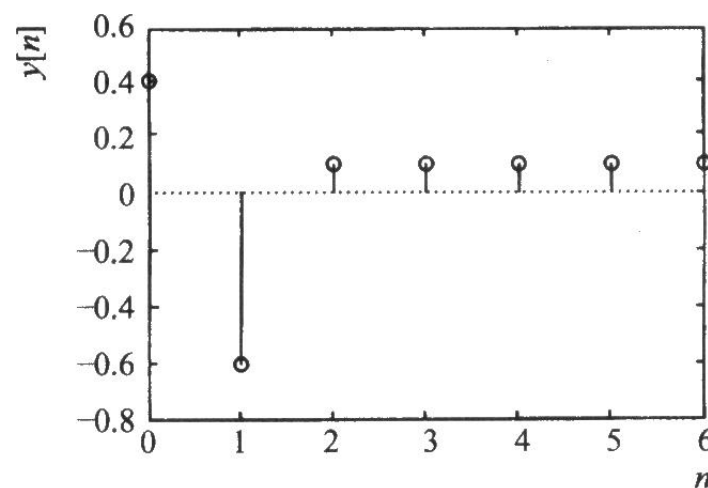


图 5.10 例 5.4 的输出

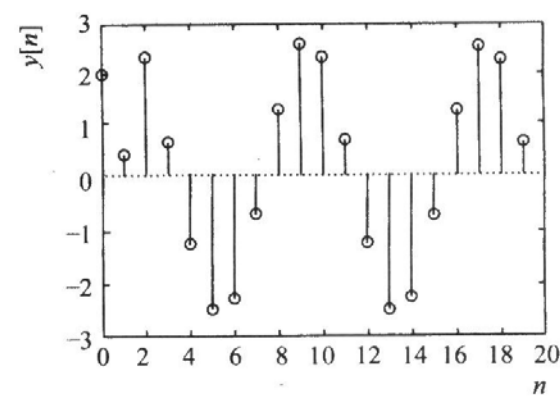
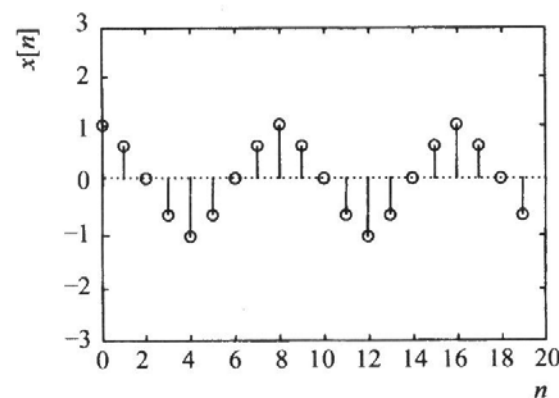
例5.5 数字滤波器的输入为 $x[n]=\cos(n\pi/4)u[n]$ ，脉冲响应为 $h[n]=2\delta[n]-\delta[n-1]+3\delta[n-2]$ 。求滤波器的输出，并指出暂态和稳态部分。

解：

- 输出可以用表5.9通过乘法和加法求出。表中仅列出了输入和输出的前11个采样值。而图5.11画出了它们的前20个采样值。可以看出，稳态输出是与输入频率相同的正弦函数。两个信号的周期都是8。前两个输出采样值是输出的暂态部分，其后的值是稳态输出。

表5.9例5.5的计算

$x[k]:$		1	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	0	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	0	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	1	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	0		
$h[-k]:$	3	-1	2										$y[0] = 2.00$	
$h[1-k]:$		3	-1	2									$y[1] = 0.41$	
$h[2-k]:$			3	-1	2								$y[2] = 2.29$	
$h[3-k]:$				3	-1	2							$y[3] = 0.71$	
$h[4-k]:$					3	-1	2						$y[4] = -1.29$	
$h[5-k]:$						3	-1	2					$y[5] = -2.54$	
$h[6-k]:$							3	-1	2				$y[6] = -2.29$	
$h[7-k]:$								3	-1	2			$y[7] = -0.71$	
$h[8-k]:$									3	-1	2		$y[8] = 1.29$	
$h[9-k]:$										3	-1	2	$y[9] = 2.54$	
$h[10-k]:$											3	-1	2	$y[0] = 2.29$

图 5.11 例 5.5 的输入和输出信号
第5章 卷积与滤波

例5.6 用卷积求系统的单位阶跃响应。已知系统的脉冲响应为

$$h[n] = (-0.55)^n u[n]$$

- **解：**表5.10列出了前面几个值的计算，阶跃响应如图5.12所示。这里，脉冲响应是无限长序列，不可能与输入完全重叠。尽管无法达到真正的稳态，但从图可见，系统的确在12个采样点内就几乎稳定在一个常数上了。对于IIR滤波器，通常当输出电平与前一个采样值的差别小于1%时，就认为基本达到了稳态。
- 本例中， $n=10$ 时达到“稳态”。如果IIR滤波器的输入为正弦序列，那么当一个周期的采样值与前一个周期的采样值相比，变化小于1%时，就认为系统达到了稳态。

表5.10 例5.6的计算

$x[k]:$			1	1	1	1	1	1	1	
$h[-k]:$	0.30	-0.55	1.00							$y[0] = 1.0$
$h[1-k]:$	-0.17	0.30	-0.55	1.00						$y[1] = 0.45$
$h[2-k]:$	0.09	-0.17	0.30	-0.55	1.00					$y[2] = 0.75$
$h[3-k]:$	-0.05	0.09	-0.17	0.30	-0.55	1.00				$y[3] = 0.59$
$h[4-k]:$	0.03	-0.05	0.09	-0.17	0.30	-0.55	1.00			$y[4] = 0.68$
$h[5-k]:$	-0.02	0.03	-0.05	0.09	-0.17	0.30	-0.55	1.00		$y[5] = 0.63$
$h[6-k]:$	0.01	-0.02	0.03	-0.05	0.09	-0.17	0.30	-0.55	1.00	$y[6] = 0.66$

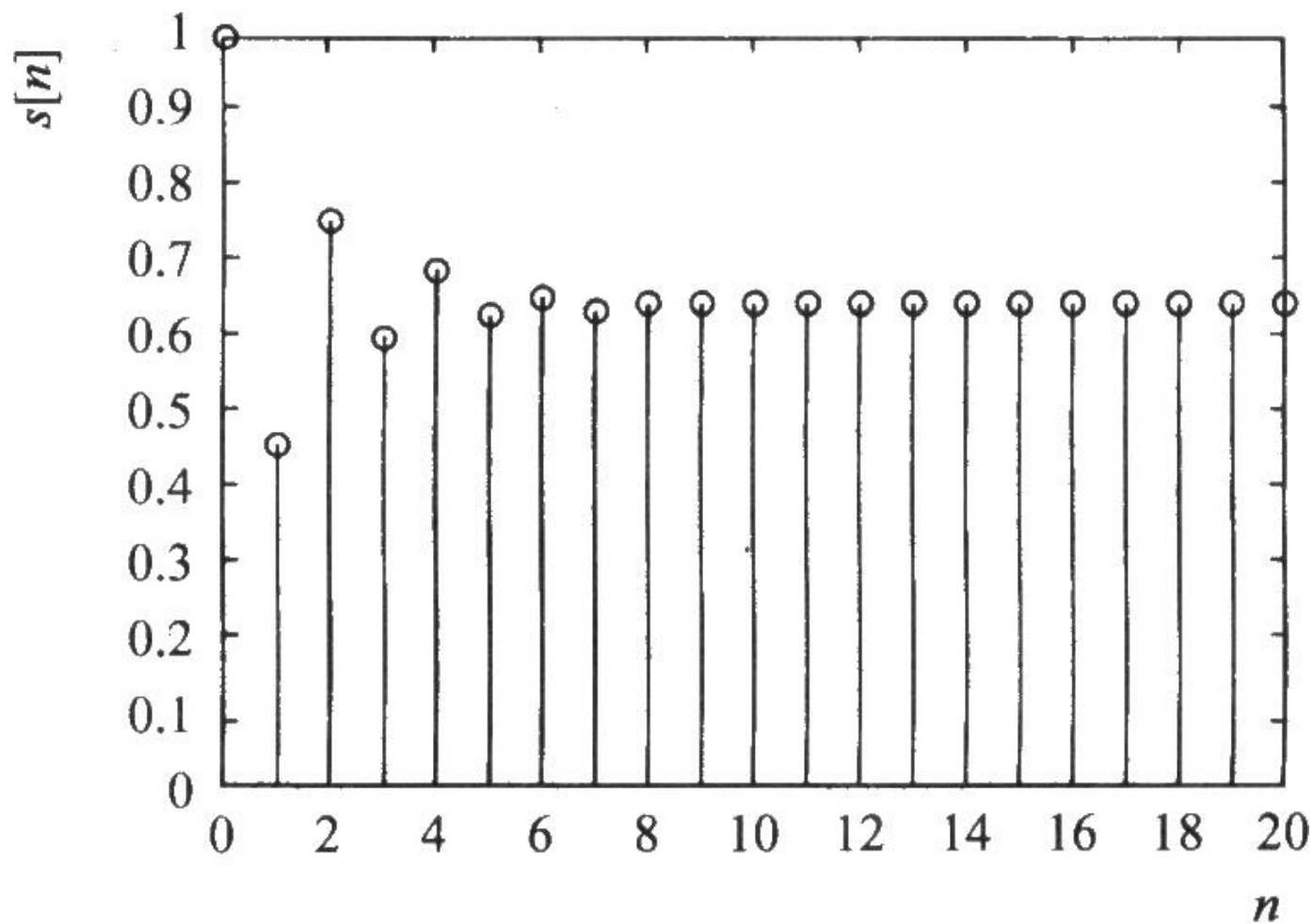


图 5.12 例 5.6 的阶跃响应

用Matlab计算数字卷积

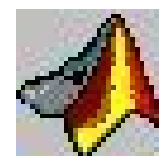
- 输入 $x[n]$, $h[n]$ 的值

- $x_n=[x_0, x_1, x_2, \dots];$

- $h_n=[h_0, h_1, h_2, \dots];$

- 卷积公式

- $y_n=\text{conv}(h_n, x_n);$



演示：例 5.4 5.5 5.6

5.2 差分方程与卷积

- 差分方程与卷积均可以计算已知输入情况下的滤波器的输出，二者的结果对于同一个滤波器而言应该是相同的。

差分方程
$$\sum_{k=0}^N a_k \cdot y[n-k] = \sum_{k=0}^M b_k \cdot x[n-k] \quad (a_0 = 1)$$

或
$$y[n] = -\sum_{k=1}^N a_k \cdot y[n-k] + \sum_{k=0}^M b_k \cdot x[n-k]$$

卷积：
$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \cdot h[n-k] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k] \cdot x[n-k] \quad (5.5)$$

5.2 差分方程与卷积（续）

- 从卷积的公式看，输出与（历史）过去的输出值无关，这对非递归差分方程而言是容易理解的。
- 递归差分方程：输出的历史值包含在无限脉冲响应序列 $h[n]$ 中，递归信息隐含在卷积公式的无限脉冲响应序列中。因此，本质上说，对同一个系统，卷积(脉冲响应序列 $h[n]$)和差分方程包含的信息是一样的。

递归差分方程的例子

例5.7 将差分方程： $y[n]=0.25y[n-1]+x[n]$ 表示为式(5.5)的形式。

解：系统的脉冲响应可由： $h[n] = 0.25h[n-1] + \delta[n]$

- 计算得出。表5.11列出了 $h[n]$ 的前七个采样值。正如对此递归差分方程的预料，脉冲响应为无限长。即 $h[n]$ 有无穷多个非零采样值。

表 5.11 例 5.7 的脉冲响应

n	0	1	2	3	4	5	6
$h[n]$	1.000 0	0.250 0	0.062 5	0.015 6	0.003 9	0.001 0	0.000 2

- 由于脉冲响应值已知，用式(5.5b)，差分方程可写为：

$$\begin{aligned}y[n] &= 0.25y[n-1] + x[n] \\&= (0.25)^2 y[n-2] + 0.25x[n-1] + x[n] \\&= (0.25)^3 y[n-3] + (0.25)^2 x[n-2] + 0.25x[n-1] + x[n] \\&= \sum_{k=0}^{\infty} (0.25)^k \cdot x[n-k] \quad h[n] = (0.25)^n\end{aligned}$$

非递归差分方程的例子

例5.8 将差分方程：

$$y[n]=0.1x[n]+0.2x[n-1]+0.3x[n-2]$$

表示为式(5.5)的形式。

解：滤波系数分别为 $a_0=1$ ， $b_0=0.1$ ， $b_1=0.2$ 及 $b_2=0.3$ 。由于这是一个非递归差分方程，所以只对滤波系数 b_k 感兴趣。将差分方程中的 $y[n]$ 变为 $h[n]$ ， $x[n]$ 变为 $\delta[n]$ ，得脉冲响应：

$$h[n]=0.1 \delta[n]+0.2 \delta[n-1]+0.3 \delta[n-2]$$

- 由于脉冲响应(及其他所有数字信号)可以写成一系列脉冲函数的和，上式也可写为：

$$h[n]=h[0] \delta [n]+h[1] \delta [n-1]+h[2] \delta [n-2]$$

- 即得 $h[0]=0.1$ ， $h[1]=0.2$ ， $h[2]=0.3$ ，由式(5.5b)有：

$$\begin{aligned} y[n] &= \cdots + h[-2]x[n+2] + h[-1]x[n+1] + h[0]x[n] \\ &\quad + h[1]x[n-1] + h[2]x[n-2] + \cdots \\ &= 0.1x[n] + 0.2x[n-1] + 0.3x[n-2] \\ &= \sum_{k=0}^2 h[k]x[n-k] \end{aligned}$$

- 其中 $h[0]=0.1$ ， $h[1]=0.2$ ， $h[2]=0.3$ 。换句话说，尽管从表面看差分方程与卷积运算的表达式不同，但对于非递归滤波器它们是完全相同的。
- 对于**IIR**：由于脉冲响应的长度无限，**一般用差分方程计算滤波器的输出**。
- 对于**FIR**：卷积运算和差分方程都适用。

5.3 滑动平均滤波器

- 例4.12中介绍的滑动平均滤波器是一种非递归滤波器。它可以平滑输入信号，其作用类似于低通滤波器，可以滤除信号的高频分量。例如，滑动平均滤波器的输出：

$$y[n] = \frac{1}{5}(x[n] + x[n-1] + x[n-2] + x[n-3] + x[n-4])$$

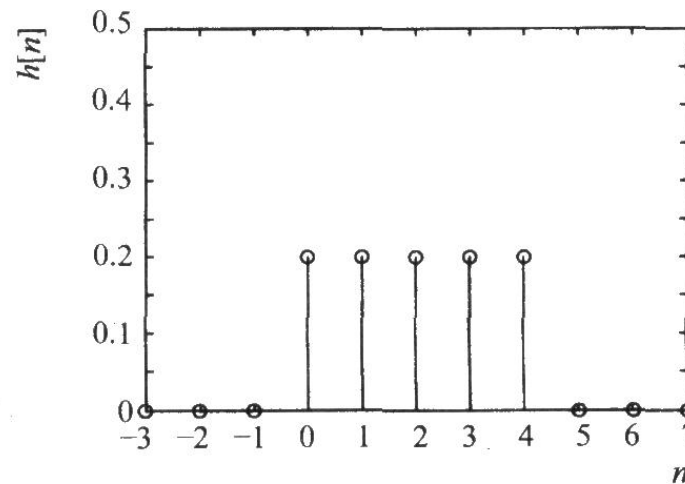
- 是几个输入值的数学平均。这个差分方程描述的是五项滑动平均滤波器。它的5个最近的输入值相加，其和再除以5，得到各项输出。将差分方程中的 $y[n]$ 变为 $h[n]$ ， $x[n]$ 变为 $\delta[n]$ ，很容易得到脉冲响应 $h[n]$ ：

$$h[n] = \frac{1}{5}(\delta[n] + \delta[n-1] + \delta[n-2] + \delta[n-3] + \delta[n-4])$$

N项滑动平均滤波器

- 对于 N (N 一般为奇数)项滑动平均滤波器，输出是 N 个输入值的数学平均，可以平滑输入信号， N 越大，平滑的效果越好。

$$y[n] = \frac{1}{N} (x[n] + x[n-1] + \dots + x[n-N+2] + x[n-N+1])$$



例5.9 五项滑动平均滤波器的输入信号如图5.14所示。
求滤波器的输出。

解：表5.12列出了用差分方程求得的输出值。注意，输入和输出在 $n=0$ 以前都为0，并且在 $n=14$ 以后输入为0， $n=18$ 以后输出为0。还有，由于脉冲响应的长度为5，输出的开始和末尾的4个采样值受到了边界效应的影响。

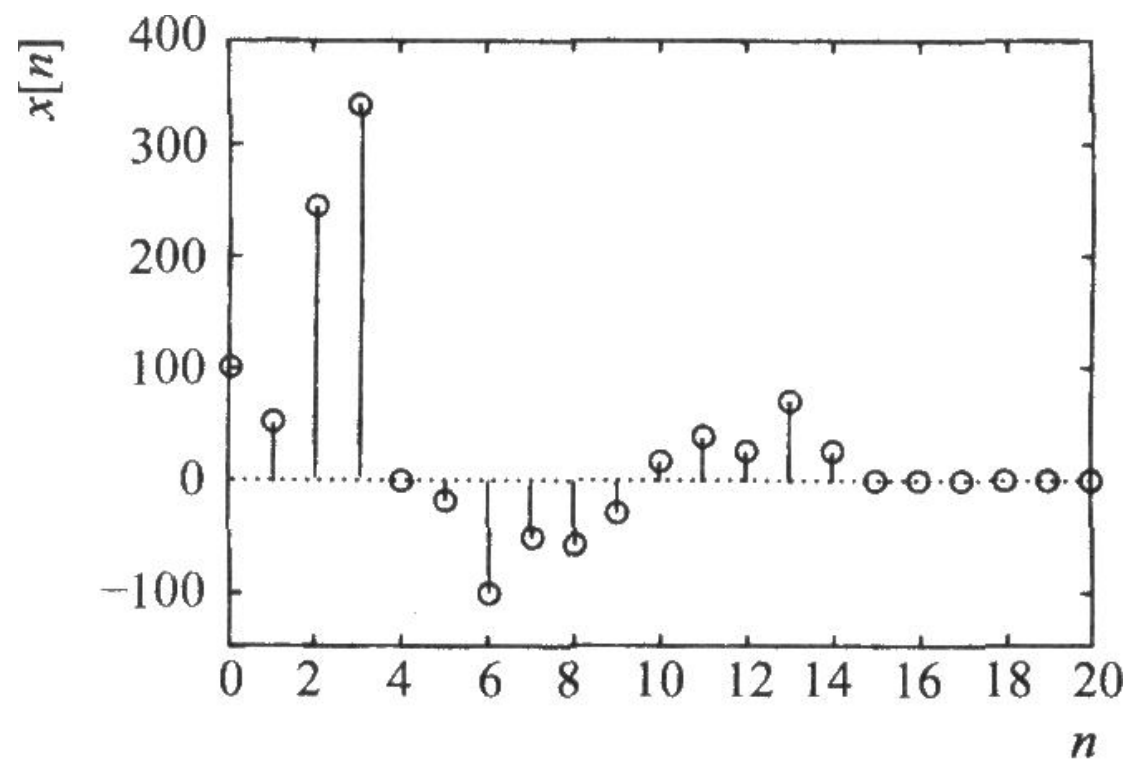


图 5.14 例 5.9 的输入

n	$x[n]$	$y[n]$
0	100	20
1	50	30
2	250	80
3	350	150
4	0	150
5	-20	126
6	-100	96
7	-50	36
8	-70	-48
9	-30	-54
10	20	-46
11	40	-18
12	30	-2
13	70	26
14	20	36
15	0	32
16	0	24
17	0	18
18	0	4
19	0	0
20	0	0

$$h[n] = \frac{1}{5}(\delta[n] + \delta[n-1] + \delta[n-2] + \delta[n-3] + \delta[n-4])$$

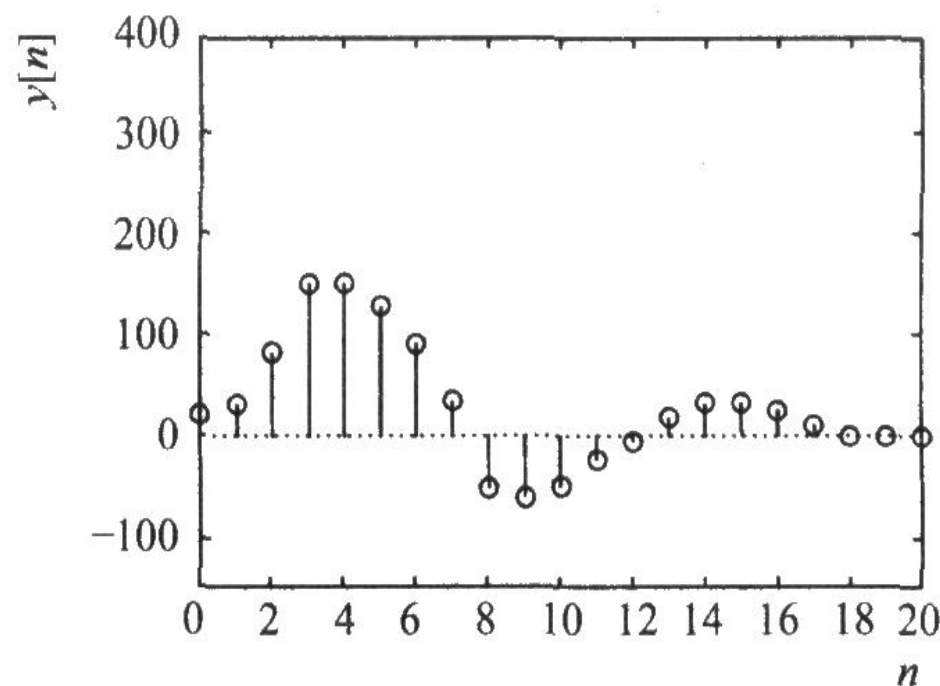


图 5.15 例 5.9 的输出

用卷积方法计算滤波器的输出

- 用类似于表5.6的卷积表，可以求出相同的输出。前几个的计算示于表5.13。

表 5.13 例 5.9 数字卷积计算滤波器的输出

conv

$x[k]$:					100	50	250	350	0	-20	-100	-50	-70	
$h[k]$:	0.2	0.2	0.2	0.2	0.2									$y[0] = 20$
$h[1-k]$:		0.2	0.2	0.2	0.2	0.2								$y[1] = 30$
$h[2-k]$:			0.2	0.2	0.2	0.2	0.2							$y[2] = 80$
$h[3-k]$:				0.2	0.2	0.2	0.2	0.2						$y[3] = 150$
$h[4-k]$:					0.2	0.2	0.2	0.2	0.2					$y[4] = 150$
$h[5-k]$:						0.2	0.2	0.2	0.2	0.2				$y[5] = 126$

例5.10 滑动平均滤波器的滤波作用

例5.10 为了进一步说明五项滑动平均滤波器的作用，设输入信号如图5.16所示，它的许多采样值为1，但个别采样值高低变化较大。滤波器的输出可以用差分方程或卷积的方法求出，结果如图5.17所示。输出的前后缘受到边界效应的影响，这是由于在开始和结束时脉冲响应和输入信号部分重叠。输出的中间部分，其值都接近1。由于滑动平均滤波器的滤波作用，输入信号中偏离1的大跳变消失了。

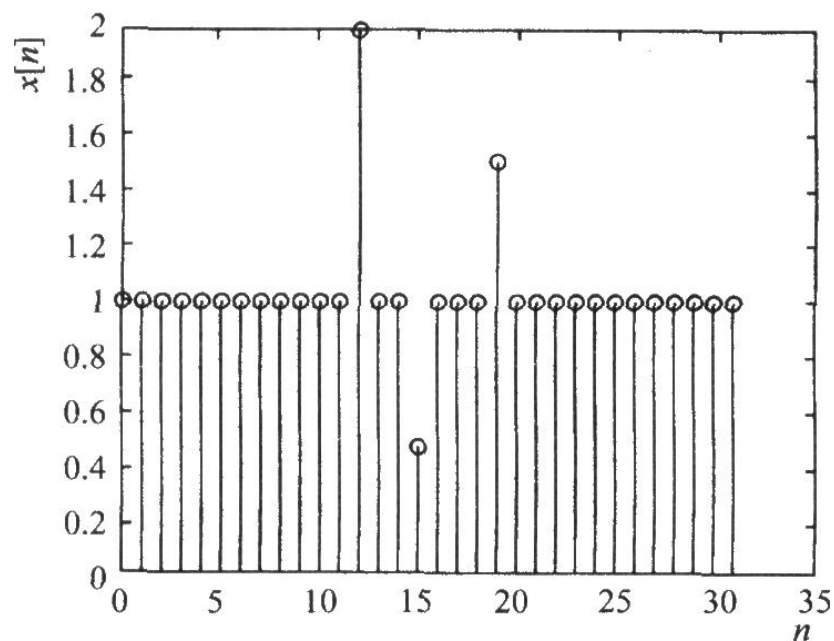


图 5.16 例 5.10 滑动平均滤波器的输入

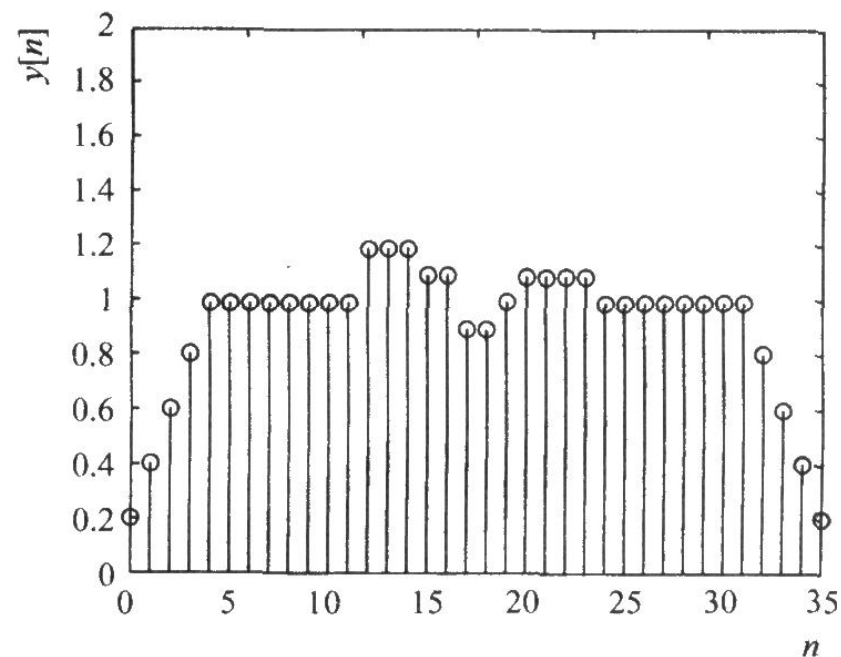


图 5.17 例 5.10 滑动平均滤波器的输出

例5.11

例5.11 滑动平均滤波器对找出快速变化数据(如股市价格)的变化趋势很有用。图5.18为一个模拟的每日股价图。可见，在一年中股价有很多突变。用滑动平均滤波器对数据进行平滑处理，就会得到一个价格随时间变化的较为明确的走势。每3天股价的平均值如图5.19所示。可以看到，它较图5.18中的平滑了一些。每9天股价平均值如图5.20所示，得到了更平滑的曲线，可以较好地估计一年中股价的走势。

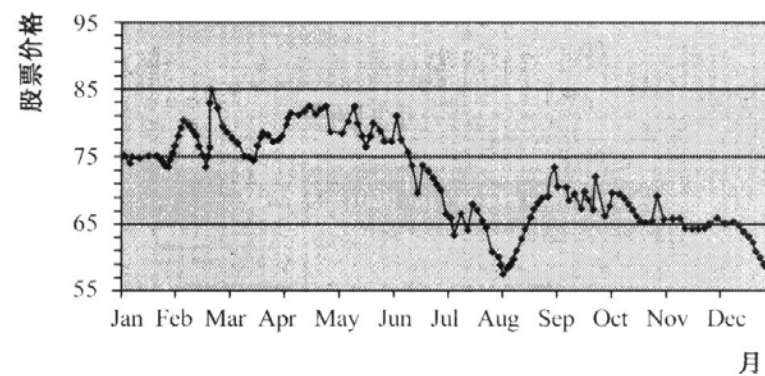


图 5.18 例 5.11 中一年中每日股价曲线

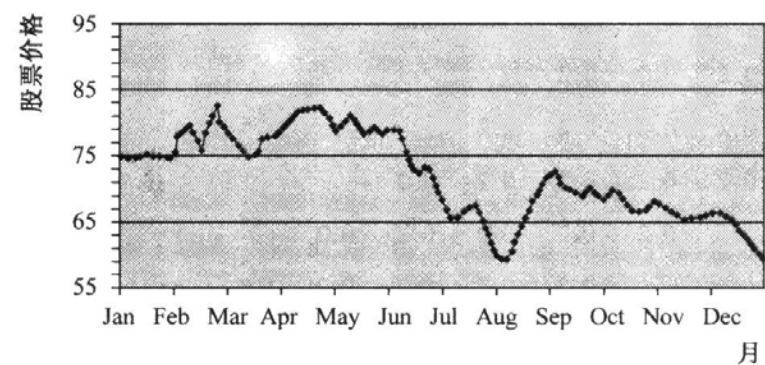
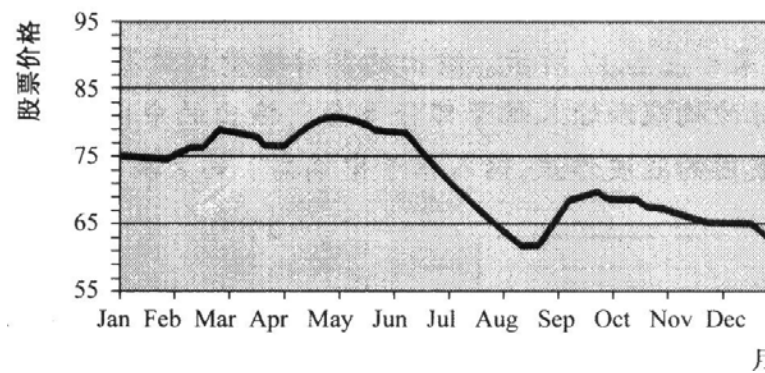


图 5.19 例 5.11 中每 3 天平均后的股价曲线



5.4 数字图像滤波

- 数字卷积不但可用来滤波一维信号(如语音和音乐)，也可用来滤波二维信号(如数字图像)。
- 二维信号处理过程与5.1节中所讲的一维情况很相似。主要差别在于图像滤波系统的脉冲响应必须是二维的。这种二维的脉冲响应称为：**卷积核** (*convolution kernel*)，用 $h[M, N]$ 表示

二维滤波的实现

- 要进行二维卷积，首先将卷积核旋转**180度**，这与一维情况下求脉冲响应的镜像类似。然后在图像上移动卷积核，逐点相乘相加，得到滤波输出。
- 二维脉冲响应：卷积核， $N \times N$ 的方阵， N 一般为奇数。

$$\bar{h}[i, j] = h[N - i + 1, N - j + 1]$$

- 二维滤波：卷积核旋转**180度**，在图像上移动卷积核，逐点相乘相加（卷积核的中心对应像素点）。 $h[3,3]$ 旋转**180度**变为

$$h[3,3] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \quad \bar{h}[3,3] = \begin{bmatrix} 9 & 8 & 7 \\ 6 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

二维滑动平均滤波

- 例如，二维**3**项滑动平均滤波的卷积核为

$$h[3,3] = \frac{1}{3 \times 3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

- 以像素点为中心，取附近的**9**个点的值做平均

二维数字卷积的实例

- 值85放在输出图像的[1, 1]处，与输入图像中原来0的位置相同。然后将卷积核右移一个单位计算[1, 2]的输出。
- 这一计算的卷积核位置如图5.24所示。一行计算完后，将卷积核置于下一行的开始。

$$(0) \times (1/9) + (0) \times (1/9) + (0) \times (1/9) + (0) \times (1/9) + (0) \times (1/9) \\ + (0) \times (1/9) + (255) \times (1/9) + (255) \times (1/9) + (255) \times (1/9) = 85$$

$$\begin{bmatrix} 0^{1/9} & 0^{1/9} & 0^{1/9} \\ 0^{1/9} & 0^{1/9} & 0^{1/9} \\ 0^{1/9} & 0^{1/9} & 0^{1/9} \\ 255^{1/9} & 255^{1/9} & 255^{1/9} \end{bmatrix}$$

图 5.23 二维数字卷积

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 255 & 255 & 255 & 255 & 255 & 255 & 255 & 255 \\ 255 & 255 & 255 & 255 & 255 & 255 & 255 & 255 \\ 255 & 255 & 255 & 255 & 255 & 255 & 255 & 255 \\ 255 & 255 & 255 & 255 & 255 & 255 & 255 & 255 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

图 5.21 数字图像 $x[m, n]$ 的灰度。

$$\frac{1}{9} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} \\ \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} \\ \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} \end{bmatrix}$$

图 5.22 二维滤波器的 3×3 卷积核 $h[m, n]$

二维卷积的边界效应

- 二维卷积的边界效应：对图像的边缘进行二维滤波时，卷积核超过图像的范围，使滤波输出无法准确计算（见P124页 图5.24）。
- 解决方案：
 1. 只输出不产生边界效应的行和列（缩小图像）
减小 $(N-1)$ 行 $(N-1)$ 列（当 N 为奇数）。
 2. 保持图像边缘不变。

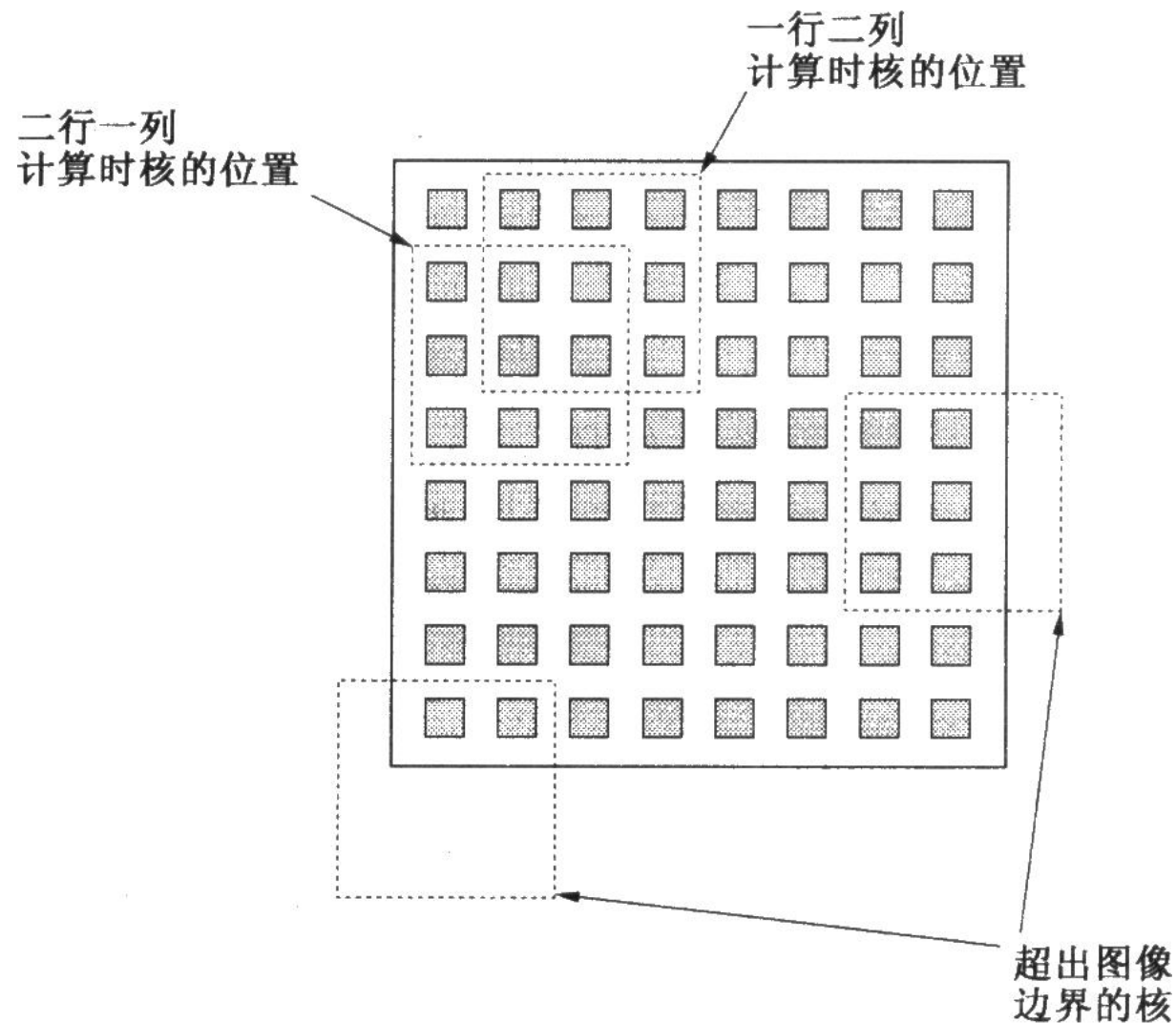
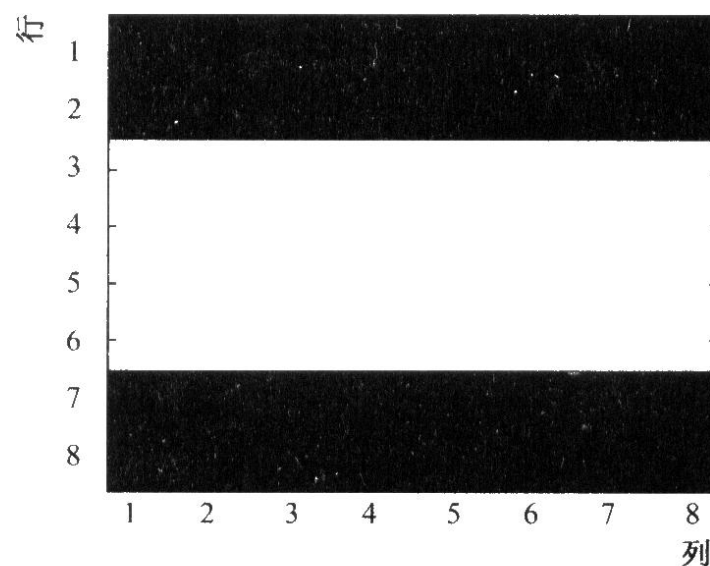


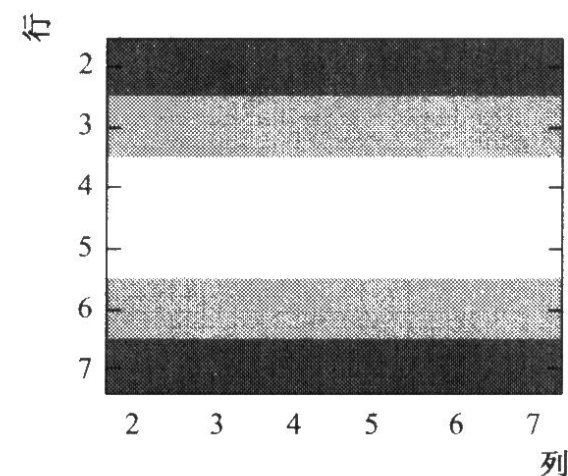
图 5.24 数字图像中卷积核的位置

例5.12

- 例**5.12** 本例说明低通滤波器对一个 152×217 数字图像的作用。图像为“Digital Signal Processing”。
- 图5.27(a)为原图像，图5.27(b)为低通滤波后的图像。
- 其他数字图像滤波器将在第**15**章中研究。



(a) 原图像



(b) 低通滤波后的图像

图 5.26 低通滤波图像

Digital
Signal
Processing

(a) 原始图像

Digital
Signal
Processing

(b) 低通滤波后的图像

图 5.27 例 5.12 的低通滤波文字

图像滤波的Matlab方法

- 如果已知灰度图象 X 和二维卷积核 H ，用以下命令进行滤波：
- $Y = \text{filter2}(H, X, \text{shape})$;
 - 'full' Returns the full two-dimensional correlation. In this case, Y is larger than X .
 - 'same'(default) Returns the central part of the correlation. In this case, Y is the same size as X .
 - 'valid' Returns only those parts of the correlation that are computed without zero-padded edges. In this case, Y is smaller than X .

小结

1. 如果滤波器的脉冲响应已知，滤波器的输出可用卷积计算。
2. 卷积是一种将滤波器的输入 $x[n]$ 和滤波器的脉冲响应 $h[n]$ 结合起来求输出 $y[n]$ 的方法。可表示为：

$$y[n] = x[n] * h[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k]$$

它的计算可用图形或列表的方法进行。

3. 卷积计算中，脉冲响应序列渐进移动，慢慢通过输入序列，每移一位计算一个输出。当输入序列不能完全覆盖脉冲响应序列时，会产生边界效应。对于FIR滤波器，边界效应有明显的终点。而对于IIR滤波器，边界效应永远不会完全消失，但会逐渐减弱。
4. 开始的输出采样值明显受到边界效应的影响，形成输出的暂态部分。暂态响应一结束，进入稳态输出。若输入为常数，稳态输出也将是常数。输入为正弦信号，稳态输出也将是正弦信号。
5. 差分方程可以写成卷积的形式，反之亦然。
6. 滑动平均滤波器通过对采样值取平均实现平滑滤波。
7. 脉冲响应的二维形式是卷积核。卷积核与数字图像卷积得到滤波输出图像。
8. 低通卷积核通过求附近像素点的灰度平均值使图像变得模糊。

第5章 作业

5.4 5.7 5.14 5.22