第 2 章　相似原理和量纲分析

（Similarity and Dimensional Analysis）

2.1　相似原理

原型/模型

流动相似：几何、运动、动力相似

相似准则：雷诺、弗雷德、欧拉准则

2.2　模型实验

模型律的选择及模型设计

2.3　量纲分析

基本量纲、导出量纲、无量纲量

量纲分析法：Π 定理（**Theorum**）、瑞利法（**Rayleigh**）

2.4　基本方程的无量纲化

第 2 章　相似原理和量纲分析

2.1　相似原理

2.1.1　流动相似

实物原型（**prototype**）的流动规律通常借助于模型由实验解决。

模型（**model**）指与原型有同样的流动规律、各运动参数存在固定比例关系的缩小物。

模型与原型具有同样流动规律的关键是流动相似。

相似原理则是研究相似流动的理论基础，即模型实验的理论基础。

流动相似除要求模型与原型的几何量（长度、面积等）相似以外，还要求相关的运动量（速度等）相似和作用力相似。

（1）几何相似(geometric similarity)

几何相似：模型与原型流场的几何形状相似，即相应线段的长度成比例、夹角相等，即

$$\frac{l_{p1}}{l_{m1}}=\frac{l_{p2}}{l_{m2}}=\ldots=\frac{l_p}{l_m}=l_r=\lambda^{-1}=constant$$

$$\theta_p=\theta_m$$

式中 l_r 称为长度比尺(length scale ratio)， λ 则称为模型比尺。

面积比尺

$$A_r=\frac{A_p}{A_m}=\frac{l_p^2}{l_m^2}=l_r^2$$

体积比尺

$$V_r=\frac{V_p}{V_m}=\frac{l_p^3}{l_m^3}=l_r^3$$

只要模型与原型各相应长度保持 l_r 不变，两流动几何相似。

(2) 运动相似(kinematic similarity)

运动相似：模型与原型流场中相应点速度方向相同，大小成比例，即

$$u_r = \frac{u_p}{u_m} = constant$$

式中 u_r 称为速度比尺(velocity scale ratio)。由于各相应点速度成比例，相应断面的平均速度必然成比例，即

$$u_r = \frac{u_p}{u_m} = \frac{v_p}{v_m} = v_r \qquad v_r = \frac{v_p}{v_m} = \frac{l_p/t_p}{l_m/t_m} = \frac{l_p/l_m}{t_p/t_m} = \frac{l_r}{t_r}$$

式中 t_r 称为时间比尺(time scale ratio)。

速度相似也就意味着加速度相似，即

$$a_r = \frac{a_p}{a_m} = \frac{v_p/t_p}{v_m/t_m} = \frac{v_p/v_m}{t_p/t_m} = \frac{v_r}{t_r} = \frac{l_r}{t_r^2}$$

（3）动力相似（dynamic similarity）

动力相似—模型与原型流场中相应点处质点受同名力作用，力的方向相同，大小成比例。

根据达朗伯原理，惯性力与其他诸力相平衡，形式上构成力多边形。因此，动力相似可以表现为模型与原型的力多边形相似。影响流体流动的主要作用力有黏滞力、重力、压力以及惯性力等，并分别表示为 F_V、F_G、F_P 和 F_I，于是

$$\frac{F_{Vp}}{F_{Vm}} = \frac{F_{Gp}}{F_{Gm}} = \frac{F_{Pp}}{F_{Pm}} = \frac{F_{Ip}}{F_{Im}} = constant$$

或

$$F_{Vr} = F_{Gr} = F_{Pr} = F_{Ir}$$

2.1.2 相似准则 (similarity criteria)

几何相似是流动相似的基础，而动力相似则是流动相似的保证。模型与原型动力相似的条件为两流动相似准数相等，这样一个条件称为相似准则（similarity criterion）。

由于不同流动条件下有不同力的作用，很难使模型和原型的各种力都如动力相似所要求的保持相同的比例，因此我们常常选取对研究的问题来说重要的一对力或一些力，使它们在原型和模型之间的比例一定。这就带来了不同力的相似准数，以及不同的相似准则。

（1）雷诺准则

考虑原型与模型之间黏性力与惯性力的关系

$$\frac{F_{\mathrm{Ip}}}{F_{\mathrm{Vp}}}=\frac{F_{\mathrm{Im}}}{F_{\mathrm{Vm}}}=\mathrm{Re}$$ 或 $$\frac{F_{\mathrm{Vp}}}{F_{\mathrm{Vm}}}=\frac{F_{\mathrm{Ip}}}{F_{\mathrm{Im}}}$$ 用两个力的特征量表示

$$\frac{F_{\mathrm{I}}}{F_{\mathrm{V}}}=\frac{Ma}{\mu A\,{}^{dV}\!/_{dy}}=\frac{\rho l^3\,{}^{l}\!/_{t^2}}{\mu l^2\,{}^{u}\!/_{l}}=\frac{\rho l^2u^2}{\mu l u}=\frac{\rho l u}{\mu}=\frac{lu}{\nu}=Re$$

无量纲数 $\frac{\rho u l}{\mu}=\frac{ul}{\nu}=Re$ 称为雷诺数（**Reynolds Number**）。

于是原型与模型黏滞力与惯性力之比相等可表示为

$$(Re)_{\mathrm{p}}=(Re)_{\mathrm{m}}$$

这表明，若原型与模型的雷诺数相等，两流动的黏滞力相似。

（2）弗汝德准则

考虑原型与模型之间重力与惯性力的关系

$$\frac{F_{\mathrm{Gp}}}{F_{\mathrm{Gm}}}=\frac{F_{\mathrm{Ip}}}{F_{\mathrm{Im}}}$$ 或 $$\frac{F_{\mathrm{Ip}}}{F_{\mathrm{Gp}}}=\frac{F_{\mathrm{Im}}}{F_{\mathrm{Gm}}}$$ 用两个力的特征量表示

$$\frac{F_{\mathrm{I}}}{F_{\mathrm{G}}}=\frac{ma}{mg}=\frac{\rho l^3\ l/t^2}{\rho l^3 g}=\frac{\rho l^2 u^2}{\rho g l^3}=\frac{u^2}{gl}=Fr$$

无量纲数 $Fr=\dfrac{v^2}{gl}$ 称为弗汝德数（**Froude Number**）。

于是原型与模型重力与惯性力之比可表示为

$$(Fr)_{\mathrm{p}}=(Fr)_{\mathrm{m}}$$

这表明，若原型与模型的弗汝德数相等，两流动的重力相似。

（3）欧拉准则

考虑原型与模型之间压力与惯性力的关系

$$\frac{F_{\mathrm{Pp}}}{F_{\mathrm{Pm}}}=\frac{F_{\mathrm{Ip}}}{F_{\mathrm{Im}}}$$ 或 $$\frac{F_{\mathrm{Pp}}}{F_{\mathrm{Ip}}}=\frac{F_{\mathrm{Pm}}}{F_{\mathrm{Im}}}$$ 用两个力的特征量表示

$$\frac{F_{\mathrm{P}}}{F_{\mathrm{I}}}=\frac{pl^2}{\rho l^2 u^2}=\frac{p}{\rho u^2}$$

无量纲数 $Eu=\dfrac{p}{\rho u^2}=\dfrac{\Delta p}{\rho u^2}$ 称为欧拉数（**Euler Number**）。

于是原型与模型压力与惯性力之比可表示为

$$(Eu)_{\mathrm{p}}=(Eu)_{\mathrm{m}}$$

这表明，原型与模型的欧拉数相等，两流动的压力相似。

两个相似流动相应点上的封闭力多边形是相似形。虽然影响液体运动还有诸如弹性力、表面张力等，但通常情况下决定流动的作用力只有黏滞力、重力和压力，即该封闭力多边形由这 3 个力和惯性力组成。那么，只要其中两个同名作用力和惯性力成比例，另一个对应的同名力将自动成比例。

由于压力通常是待求量，这样只要黏滞力、重力相似，压力将自行相似。

换言之，若雷诺准则、弗汝德准则成立，欧拉准则自行成立。所以又将雷诺准则、弗汝德准则称为独立准则，欧拉准则称为导出准则。

液体的运动是由边界条件和作用力决定的，当两个流动一旦实现了几何相似和动力相似，就必然以相同的规律运动。因此，几何相似与独立准则成立是实现流动相似的充分与必要条件。

2.2　模型实验

2.2.1　模型律的选择

为使模型与原型流动相似，除几何相似外，还要动力相似，即同时满足各独立准则。 事实上，很难达到独立准则同时满足。一般情况下，只能按照近似相似进行模型实验，即满足主要作用力相似即可。

通常，不可压缩液体流动的独立准则为雷诺准则和弗汝准则。因此，主要作用力则是黏滞力或重力。

若主要作用力是黏滞力，模型按雷诺模型律设计，即模型与原型之间只满足雷诺准则。例如有压管流。

若主要作用力是重力，模型按弗汝德模型律设计，即模型与原型之间只满足弗汝德准则。 例如明渠流。

2.2.2 模型设计

1. 根据实验场地、模型制作条件和量测条件等确定长度比尺 λ_l 或模型比尺 λ，由选定的比尺确定模型区的几何边界；

2. 根据流动受力情况分析，选择模型律；

3. 运用准则，确定模型的速度比尺及模型流量。

按雷诺模型律设计，模型与原型间只需满足雷诺准则

$$\frac{v_p l_p}{\nu_p} = \frac{v_m l_m}{\nu_m}$$

若模型与原型在相同温度下使用相同介质，则 $\nu_p = \nu_m$，于是

$$v_p l_p = v_m l_m \quad 或 \quad v_r = l_r^{-1} = \lambda$$

按弗汝德模型律设计，模型与原型间满足弗劳德准

$$\frac{v_p^2}{g_p l_p} = \frac{v_m^2}{g_m l_m}$$

若模型与原型同在重力场，则 $g_p = g_l$，于是

$$\frac{v_p^2}{l_p} = \frac{v_m^2}{l_m}$$ 或 $$v_r = \sqrt{l_r}$$

流量比尺为

$$Q_r = \frac{Q_p}{Q_m} = \frac{v_p A_p}{v_m A_m} = v_r l_r^2$$

若按雷诺模型律设计，则

$$Q_r = l_r$$ 或 $$Q_m = Q_p l_r^{-1}$$

若按弗汝德模型律设计，则

$$Q_r = l_r^{2.5}$$ 或 $$Q_m = Q_p l_r^{-2.5}$$

【例 1】桥孔过流模型实验。已知桥墩长 $l_p = 24$m，桥墩宽 $b_p = 4.3$m，水深 $h_p = 8.2$m，平均流速 $v_p = 2.3$m，两桥墩中心距 $B_p = 90$m。若长度比尺 $l_r = 50$，要求设计模型。

【解】 1.由给定比尺 $l_r = 50$，算得模型尺寸

桥墩长 $$l_m = \frac{l_p}{l_r} = \frac{24m}{50} = 0.48\ \text{m}$$

桥墩宽 $$b_m = \frac{b_p}{l_r} = \frac{4.3m}{50} = 0.086\ \text{m}$$

墩台距 $$B_m = \frac{B_p}{l_r} = \frac{90m}{50} = 1.8\ \text{m}$$

水深 $$h_m = \frac{h_p}{\lambda_r} = \frac{8.2m}{50} = 0.164\ \text{m}$$

2.无压流，按弗劳德模型律设计

模型流速

$$v_{\mathrm{m}} = \frac{v_{\mathrm{p}}}{\sqrt{l_{\mathrm{r}}}} = \frac{2.3m/s}{\sqrt{50}} = 0.325\ \ \mathrm{m/s}$$

原型流量

$$Q_{\mathrm{p}} = v_{\mathrm{p}}\left(B_{\mathrm{p}} - b_{\mathrm{p}}\right)h_{\mathrm{p}} = 2.3m/s \times (90-4.3)m \times 8.2m = 1616\ \ \mathrm{m^3/s}$$

模型流量

$$Q_{\mathrm{m}} = \frac{Q_{\mathrm{p}}}{l_{\mathrm{r}}^{2.5}} = \frac{1616m^3/s}{50^{2.5}} = 0.0914\ \ \mathrm{m^3/s}$$

2.3　量纲分析

2.3.1 量纲（dimension）

量纲— 物理量的单位类别，又称因次。

例如：衡量长短、远近均使用长度单位，这类物理量则具有长度量纲。通常用 *L* 表示长度量纲，*M*表示质量量纲，*T*表示时间量纲，用 **dim** *q* 表示某物理量 *q* 的量纲。

无量纲量—不具有量纲的量，又称为数，如角度等。

基本量纲（**primary dimensions**）—无任何联系的、相互独立的量纲。力学中，选取下列量纲为基本量纲

长度量纲 *L*
质量量纲 *M*
时间量纲 *T*
温度　　θ　　。

导出量纲 — 由基本量纲以一定形式组成的量纲，如：

面积量纲	$\dim A = L^2$
密度量纲	$\dim \rho = ML^{-3}$
速度量纲	$\dim v = LT^{-1}$
加速度量纲	$\dim a = LT^{-2}$
力量纲	$\dim F = MLT^{-2}$
应力量纲	$\dim p = ML^{-1}T^{-2}$
动力黏度量纲	$\dim \mu = ML^{-1}T^{-1}$
运动黏度量纲	$\dim \nu = L^2T^{-1}$

综合以上各量纲式，某一物理量 q 的量纲 $\dim q$ 可用三个基本量纲的指数乘积式来表示，即

$$\dim q = M^{\alpha}L^{\beta}T^{\gamma}$$

无量纲量(dimensionless parameters)

当量纲式中各量纲指数均为零，即 $\alpha=\beta=\gamma=0$ 时，物理量 q 的量纲 dim $q=1$，为无量纲量。例如有压管流中断面平均流速 v、管道直径 D 和流体运动黏度 ν 的组合为

$$Re=\frac{vD}{\nu}$$

其量纲为

$$\dim Re=\dim\left(\frac{vD}{\nu}\right)=\frac{\left(LT^{-1}\right)L}{L^2T^{-1}}=1$$

Re 是由 3 个有量纲量组合得到的无量纲量，即雷诺数。

2.3.2 量纲和谐原理

凡正确反映客观规律的物理方程，其各项的量纲一定是一致的。如伯努利方程中的各项均具有长度量纲。

2.3.3　量纲分析法

（1）瑞利法（Rayleigh）

若某一物理过程同几个物理量有关，即

$$f(q_1, q_2, \ldots q_n) = 0$$

其中任一个物理量 q_i 都可以用其他物理量的指数乘积来表示，即

$$q_i = K q_1^a q_2^b \ldots q_{n-1}^p$$

其量纲式为

$$\dim q_i = \dim(q_1^a q_2^b \ldots q_{n-1}^p)$$

将量纲式中各物理量的量纲都用基本量纲的指数积形式表示，并根据量纲和谐原理，确定各指数 a、b、…p 等。

以下通过例题进一步说明瑞利法的应用。

【例 2】求水泵输出功率的表达式。

【解】水泵输出功率指单位时间水泵输出的能量。

（1）找出与水泵输出功率 N 有关的物理量，包括单位体积水的重量 $\gamma=\rho g$、流量 Q、扬程 H，于是有

$$f(N, \gamma, Q, H)=0$$

（2）指数积关系式 $N=K\gamma^{a}Q^{b}H^{c}$

（3）量纲式

$$\dim N=\dim(\gamma^{a}Q^{b}H^{c})$$

（4）用基本量纲表示各物理量量纲

$$ML^{2}T^{-3}=(ML^{-2}T^{-2})^{a}(L^{3}T^{-1})^{b}(L)^{c}$$

（5）根据量纲和谐原理求量纲指数

$$M:\quad 1=a$$

$$L:\quad 2=-2a+3b+c$$

$$T:\quad -3=-2a-b$$

解方程得，$a=1$，$b=1$，$c=1$。

（6） 整理方程得

$$N = K\gamma QH$$

K 为由实验确定的常数。

问题：由于基本量纲只有3个，故只能建立 3 个方程求解量纲指数。因此，用瑞利法求力学方程，相关的物理量不能超过4个，否则将会出现待定系数。

（2）Π 定理

Π 定理则是更为普遍的量纲分析基本理论，又称布金汉（**Buckingham**）定理。

若某一物理过程包含 n 个物理量，$f(q_1 q_2 q_3 \ldots q_n)=0$ 其中有 m 个基本量(**scaling variables**)，则该物理过程可由这 n 个物理量所构成的（$n-m$）个无量纲量所表达的关系式来描述，即

$$F(\Pi_1, \Pi_2 \ldots \Pi_{n-m}) = 0$$

因无量纲量用 Π 表示，故得名 Π 定理。

【例3】求真实流体有压管流压强损失（水头损失）表达式。

【解】

1.根据经验与实验资料找出相关物理量。本题中有压强损失 Δp、流体密度 ρ、流体动力黏度 μ、管道长度 l、管道直径 D、管道壁面粗糙度 e 与流速 v，相关量数 $n=7$。

$$f(\Delta p,\ \rho,\ \mu,\ l,\ d,\ e,\ v)=0$$

2.选取基本量。不可压缩流体的运动一般取 $m=3$。本题中取 v, D, ρ 为基本量（分别含时间、长度和质量）。

3.组成 Π 数。$n-m=4$，即4个 Π 数。

$$\Pi_1=\frac{\Delta p}{v^{a_1}D^{b_1}\rho^{c_1}} \qquad \Pi_2=\frac{\mu}{v^{a_2}D^{b_2}\rho^{c_2}}$$

$$\Pi_3=\frac{l}{v^{a_3}D^{b_3}\rho^{c_3}} \qquad \Pi_4=\frac{e}{v^{a_4}D^{b_4}\rho^{c_4}}$$

4.计算各Π数的量纲指数。

Π_1

$$\dim \Delta p = \dim(v^{a_1} D^{b_1} \rho^{c_1})$$

$$ML^{-1}T^{-2} = (LT^{-1})^{a_1}(L)^{b_1}(ML^{-3})^{c_1}$$

M: $1 = c_1$

L: $-1 = a_1 + b_1 - 3c_1$

T: $-2 = -a_1$

解得 $a_1 = 2$，$b_1 = 0$，$c_1 = 1$

$$\Pi_1 = \frac{\Delta p}{v^2 \rho}$$

Π_2

$$\dim \mu = \dim(v^{a_2} D^{b_2} \rho^{c_2})$$

$$ML^{-1}T^{-1} = (LT^{-1})^{a_2}(L)^{b_2}(ML^{-3})^{c_2}$$

M: $1 = c_2$

L: $-1 = a_2 + b_2 - 3c_1$

T: $-1 = -a_1$

解得 $a_2 = 1$，$b_2 = 1$，$c_2 = 1$

$$\Pi_2 = \frac{\mu}{vD\rho}$$

Π_3 $\dim l = \dim(v^{a_3} D^{b_3} \rho^{c_3})$

$$L = (LT^{-1})^{a_3} (L)^{b_3} (ML^{-3})^{c_3}$$

解得 $a_3 = 0 \quad b_3 = 1 \quad c_3 = 0$ $\qquad \Pi_3 = \dfrac{l}{D}$

Π_4 $\dim e = \dim(v^{a_4} D^{b_4} \rho^{c_4})$

$$L = (LT^{-1})^{a_4} (L)^{b_4} (ML^{-3})^{c_4}$$

解得 $a_4 = 0 \quad b_4 = 1 \quad c_4 = 0$ $\qquad \Pi_4 = \dfrac{e}{D}$

5.整理方程

$$F_1 = \left(\frac{\Delta p}{v^2 \rho}, \frac{\mu}{v D \rho}, \frac{l}{D}, \frac{e}{D} \right) = 0$$

或者
$$F_2 = F_2\left(\frac{\Delta p}{v^2\rho}, \frac{vD\rho}{\mu}, \frac{l}{D}, \frac{e}{D}\right) = F_2\left(\frac{\Delta p}{v^2\rho}, Re, \frac{l}{D}, \frac{e}{D}\right) = 0$$

求解
$$\frac{\Delta p}{v^2\rho} = F_3\left(Re, \frac{l}{D}, \frac{e}{D}\right)$$

由实验知 Δp 与管长 l 成正比，故
$$\frac{\Delta p}{v^2\rho} = F_4\left(Re, \frac{e}{D}\right)\frac{l}{D}$$
$$h_f = \frac{\Delta p}{\rho g} = F_5\left(Re, \frac{e}{D}\right)\frac{l}{D}\frac{v^2}{2g} = \lambda\frac{l}{D}\frac{v^2}{2g}$$

上式为有压管流管道压强损失（水头损失）计算公式，又称达西公式（**Darcy**），λ 为沿程阻力系数。

2.4 基本方程的无量纲化

$$\rho\frac{d\vec{v}}{dt}=\rho\vec{g}-\nabla p+\mu\nabla^2\vec{v}$$

$$p'=p+\rho gz$$

$$\rho\frac{d\vec{v}}{dt}=\nabla p'+\mu\nabla^2\vec{v}$$

选取无量纲化特征速度及长度：U, L

$$\rho\frac{U}{L/U}\frac{d\overrightarrow{v^*}}{dt^*}=-\frac{\rho U^2}{L}\nabla p^*+\frac{\mu U}{L^2}\nabla^2\overrightarrow{v^*}$$

- 减少变量数
- 找到重要的无量纲数

$$\frac{d\overrightarrow{v^*}}{dt^*}=-\nabla p^*+\frac{1}{\mathrm{Re}}\nabla^2\overrightarrow{v^*}$$