第十四章

虚位移原理

§14-1　约束 ·虚位移·虚功

1 约束及其分类

限制质点或质点系运动的条件称为约束.

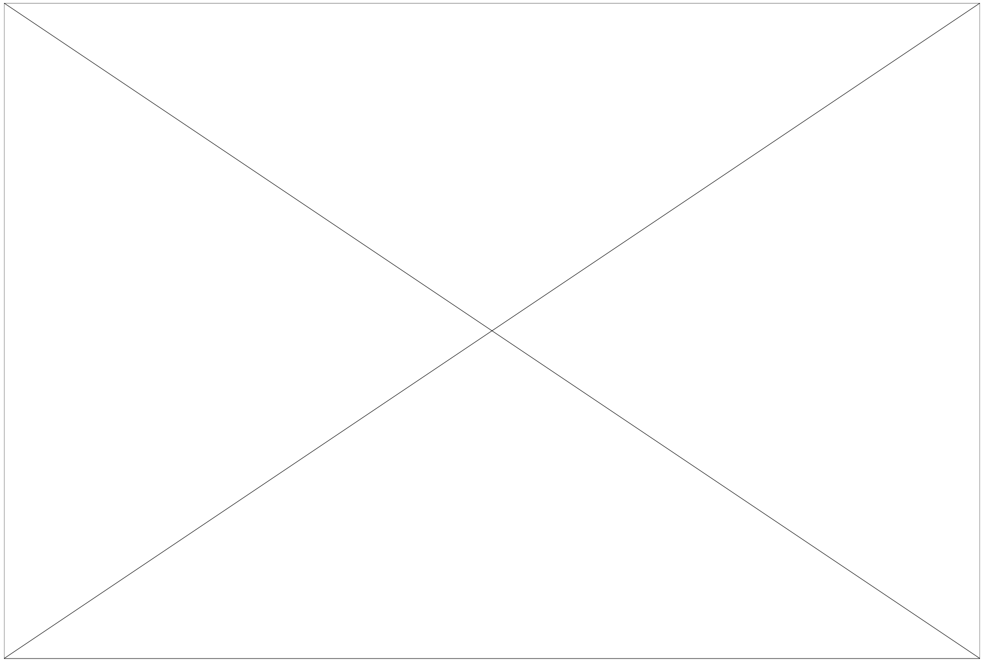
限制条件的数学方程称为约束方程.

（1）几何约束和运动约束

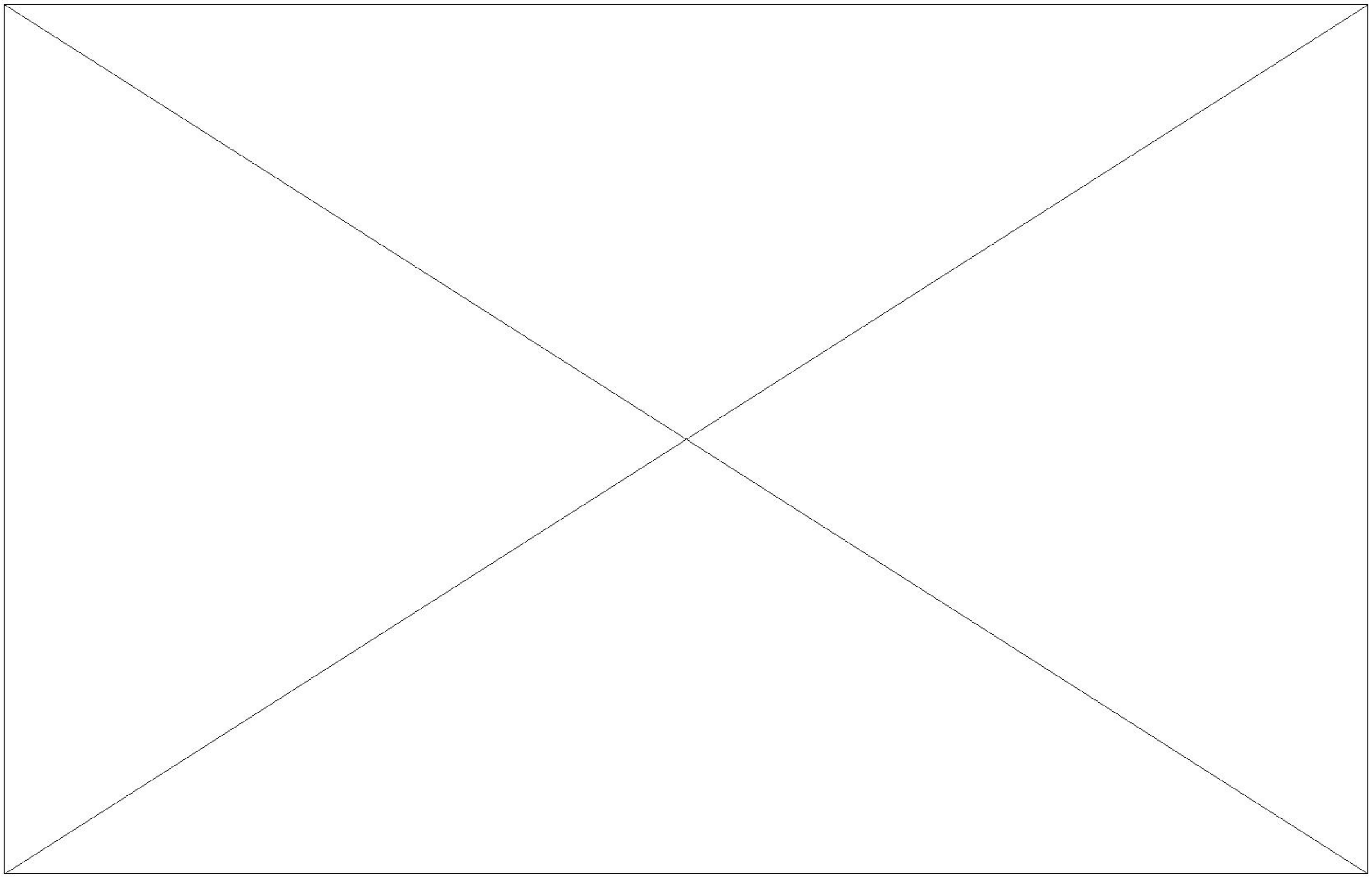
限制质点或质点系在空间的几何位置的条件称为几何约束.

如

$$x^2 + y^2 = l^2$$



$$f(x,y,z)=0$$



$$x_A^2 + y_A^2 = r^2$$

$$\left(x_B - x_A\right)^2 + \left(y_B - y_A\right)^2 = l^2$$

$$y_B = 0$$

限制质点系运动情况的运动学条件称**运动约束**.

$$v_A - r\omega = 0$$

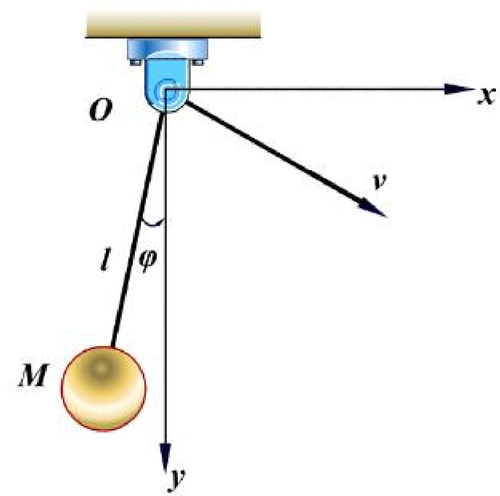
$$\dot{x}_A - r\dot{\varphi} = 0$$

（2）定常约束和非定常约束

不随时间变化的约束称定常约束.

约束条件随时间变化的称非定常约束.

$$x^2 + y^2 = (l_0 - vt)^2$$



（3） 其它分类

约束方程中包含坐标对时间的导数，且不可能积分成有限形式的约束称非完整约束.

约束方程中不包含坐标对时间的导数，或者约束方程中的积分项可以积分为有限形式的约束为完整约束.

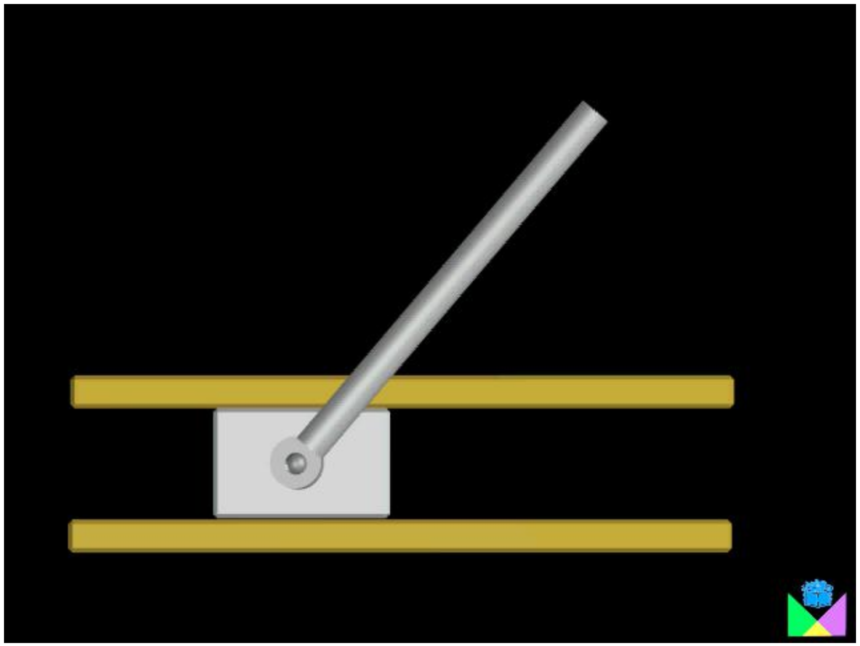
约束方程是等式的，称双侧约束（或称固执约束）.

约束方程为不等式的，称单侧约束（或称非固执单侧约束）

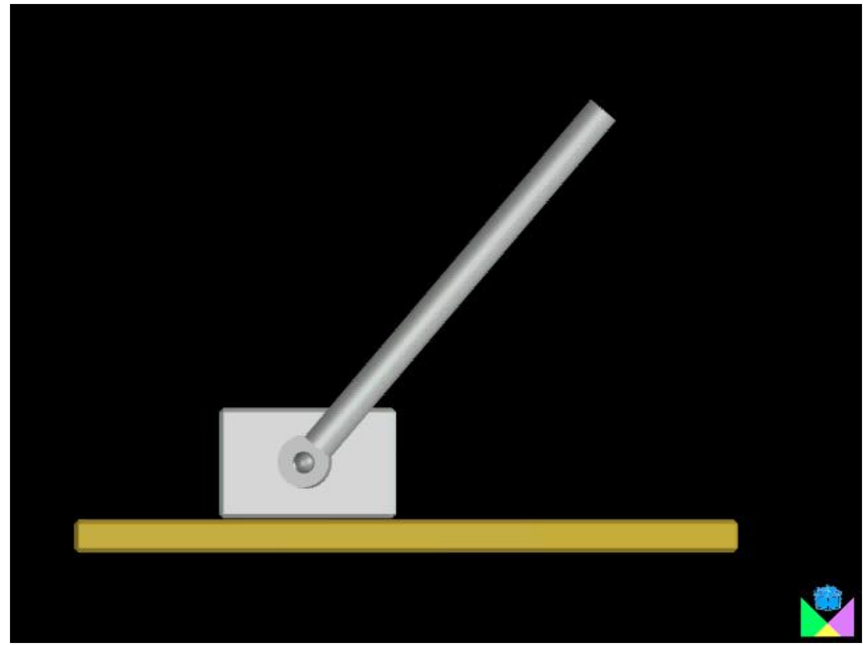
本章只讨论定常的双侧、完整、几何约束.

$$f_i\left(x_1, y_1, z_1, \cdots, x_n, y_n, z_n\right)=0 \quad i=1,2,\cdots,s$$

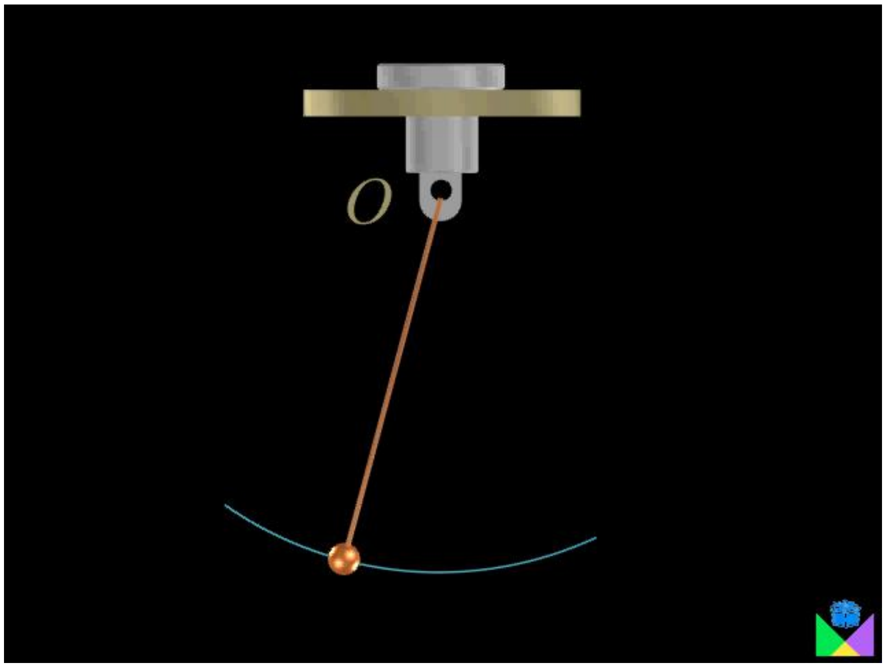
n为质点数，s 为约束方程数.



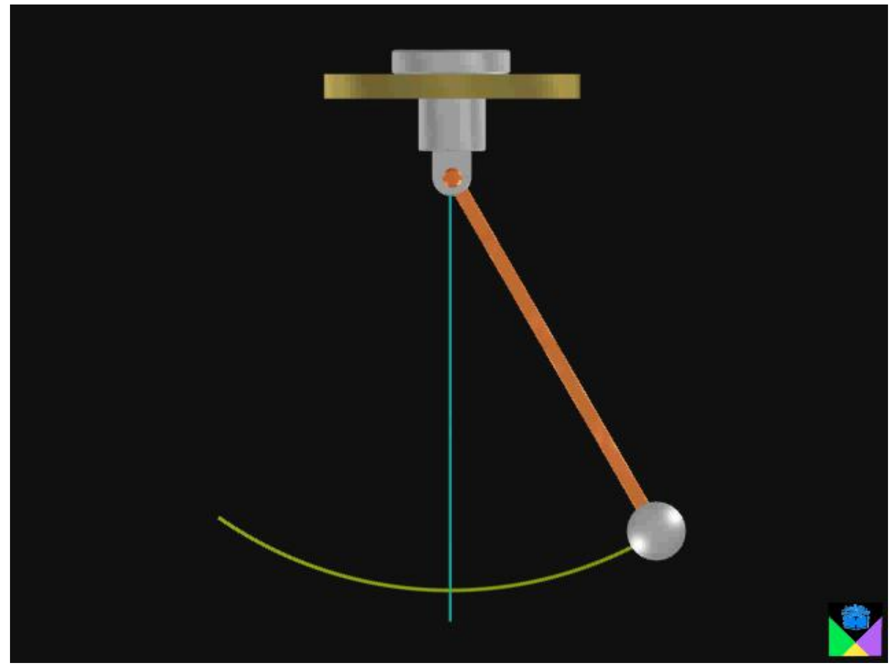
双侧约束



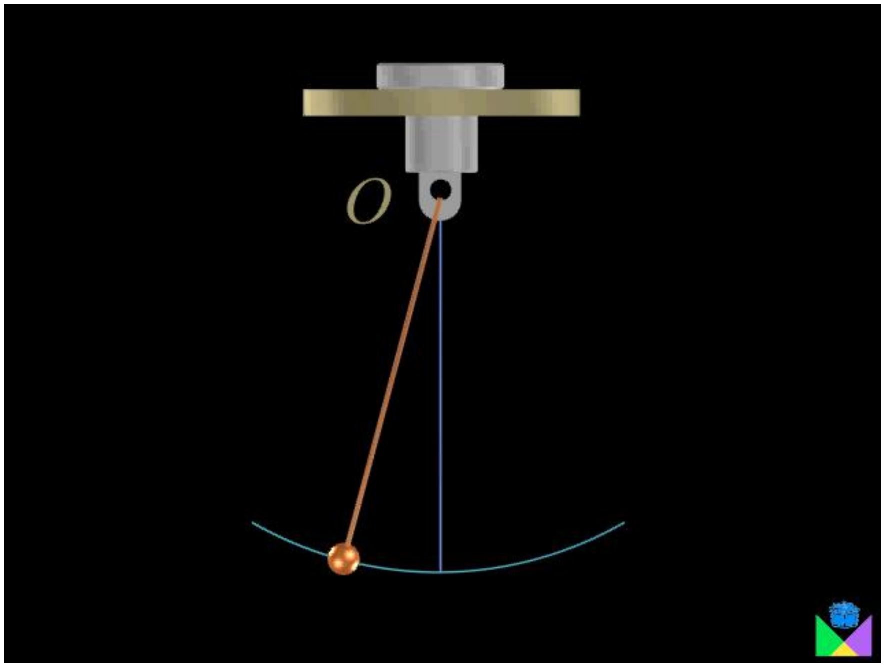
单侧约束



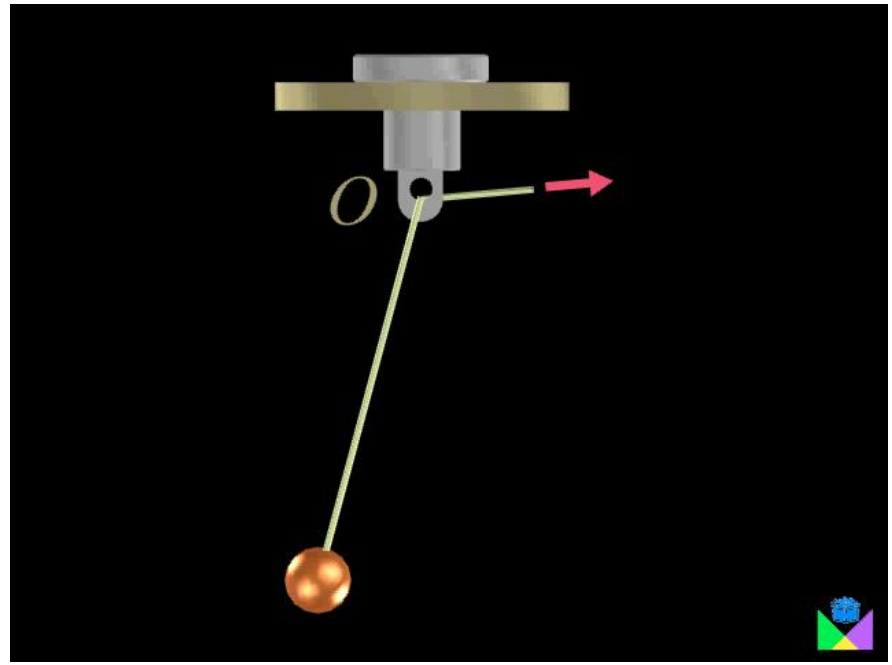
单侧约束



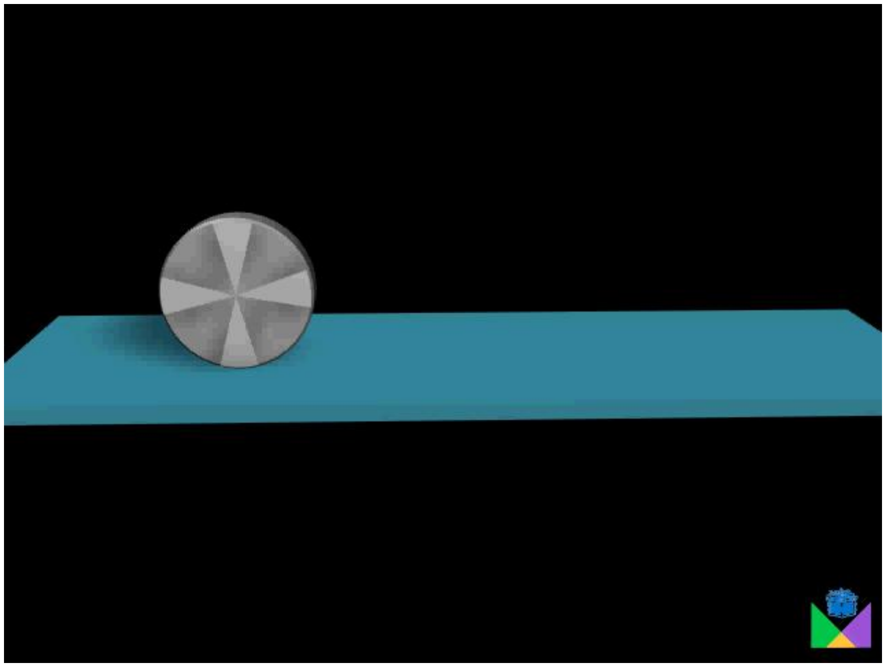
双侧约束



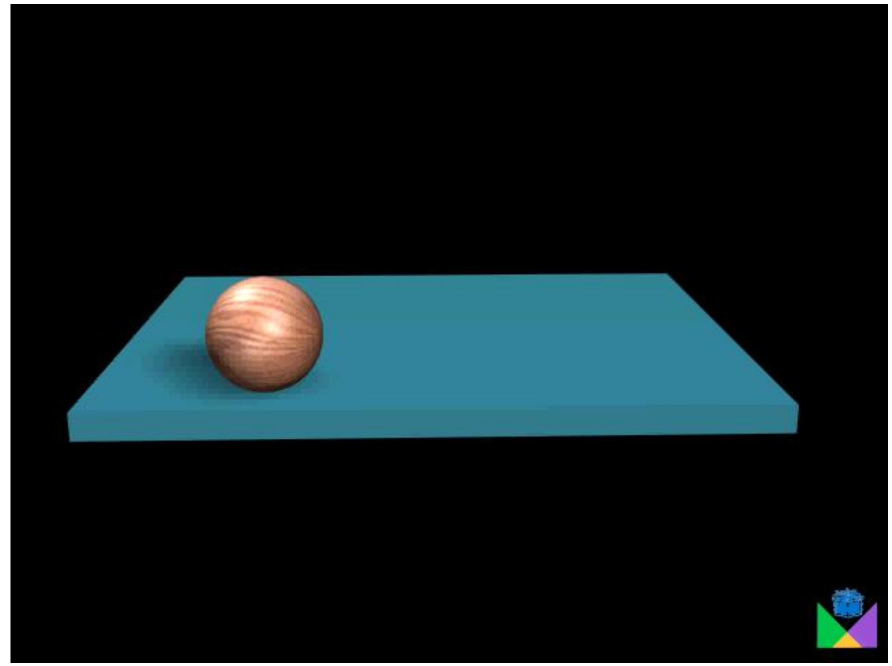
定常约束



非定常约束



完整约束



非完整约束

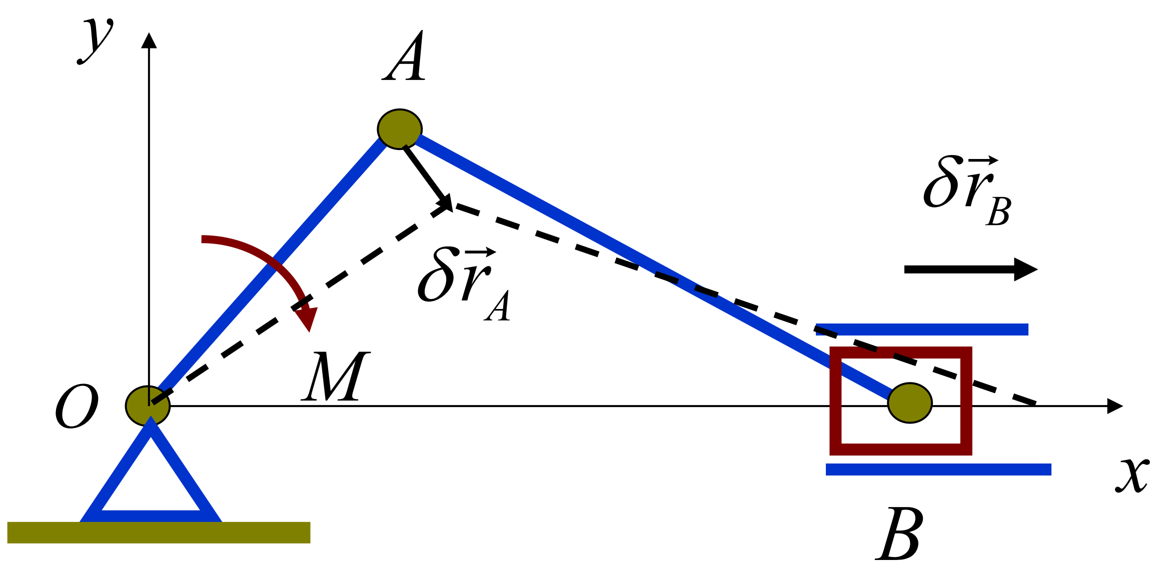
导弹追踪敌机的可控系统

非完整约束

2　虚位移

在某瞬时，质点系在约束允许的条件下，可能实现的任何无限小的位移称为**虚位移**．只与约束条件有关.

虚位移　$\delta\vec{r}, \delta x, \delta\varphi$　等

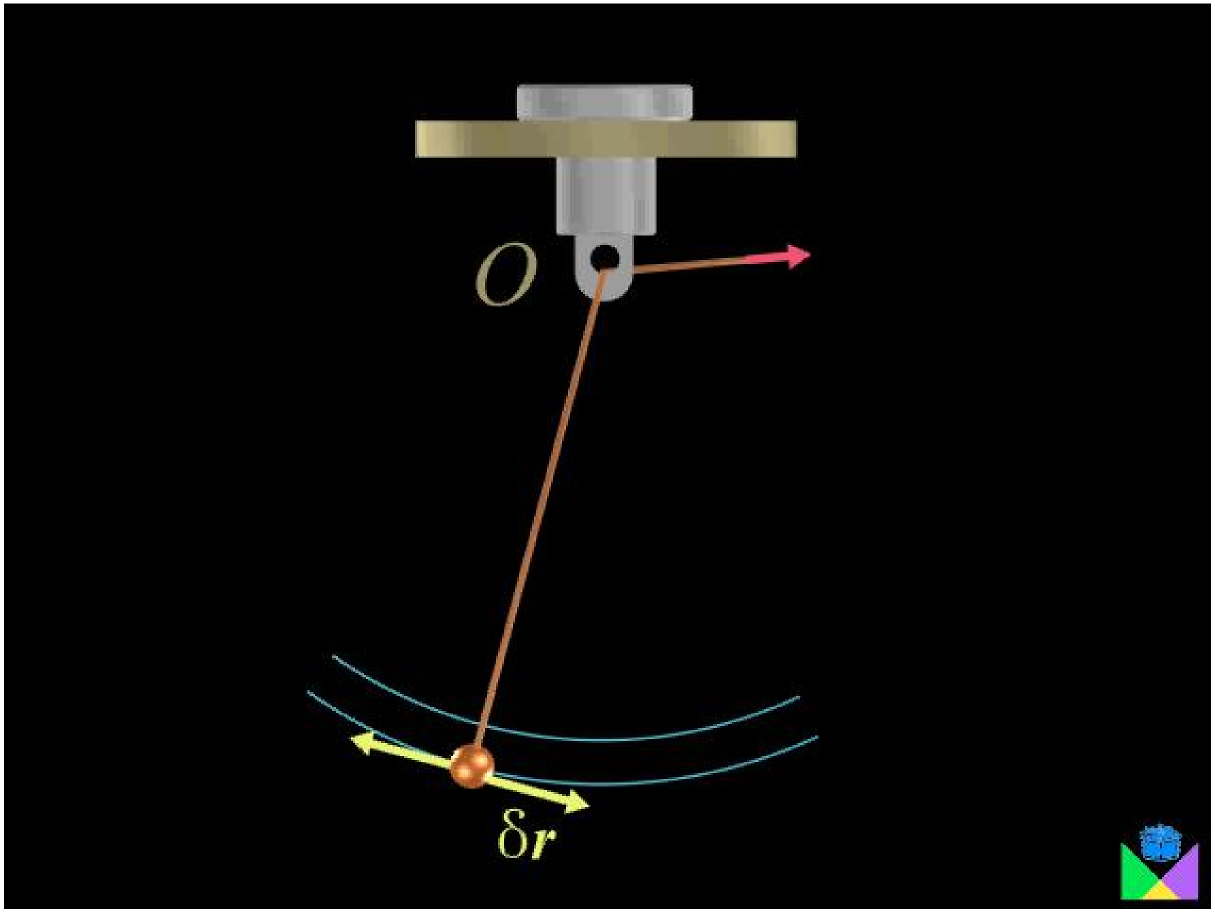


实位移是质点系真实实现的位移，它与约束条件、时间、主动力以及运动的初始条件有关．

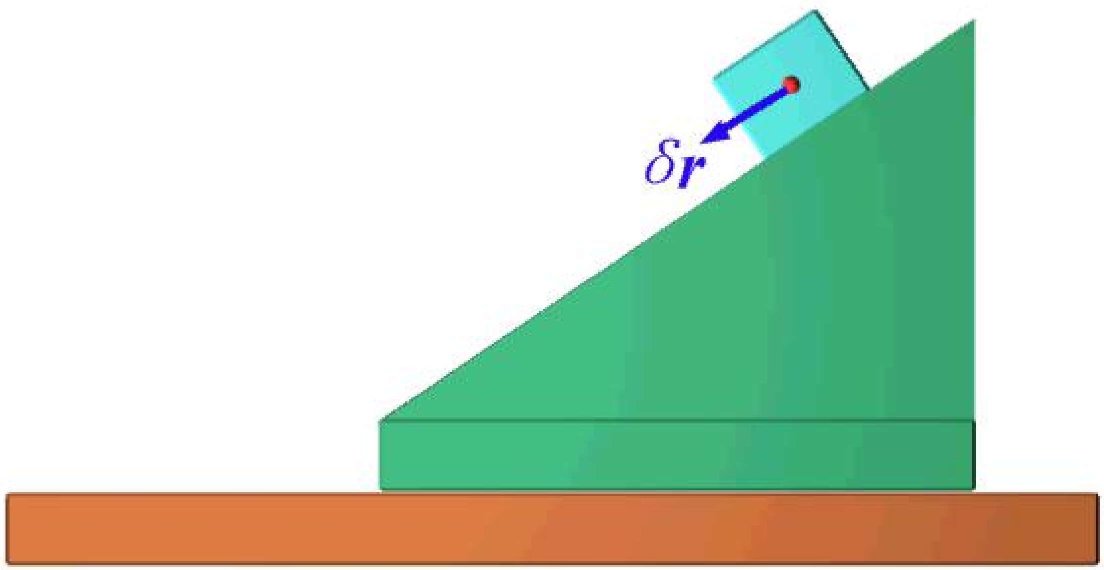
实位移　$\mathrm{d}\vec{r}, \mathrm{d}x, \mathrm{d}\varphi$　等

思考：实位移与虚位移的区别？

- 虚位移是假想的，实位移是实际发生的。
- 虚位移是瞬时的，实位移是有时间经历的。
- 虚位移可朝约束允许的任意方向运动，实位移只朝某一方向运动。
- 质点系静止时，可有虚位移，而无实位移。
- 虚位移与运动的初始条件无关，而虚位移与运动的初始条件有关。
- 定常约束中，实位移是所有虚位移中的一个，对于非定常约束，某瞬时的虚位移是指将时间固定，约束所允许的无限小位移，而实位移是不能固定时间的，所以虚位移不是实位移中的一个。



虚位移与实位移



虚位移与实位移

3 虚功

力在虚位移上作的功称虚功.

$$\delta W = \vec{F} \cdot \delta \vec{r} \qquad \delta W = M \delta \varphi$$

4 理想约束

如果在质点系的任何虚位移中，所有约束力所作虚功的和等于零，称这种约束为理想约束.

$$\delta W_{\mathrm{N}} = \sum \delta W_{\mathrm{N}i} = \sum \vec{F}_{\mathrm{N}i} \cdot \delta \vec{r}_i = 0$$

光滑固定面约束、光滑铰链、无重刚杆，不可伸长的柔索、固定端等约束为理想约束.

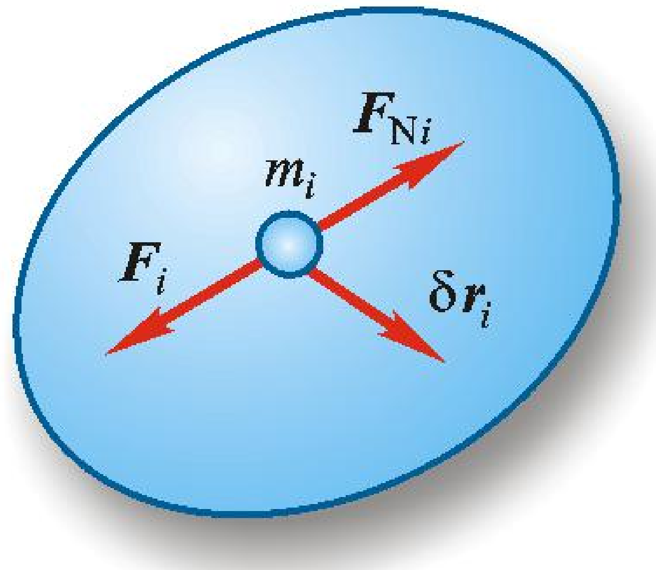
§ 14-2 虚位移原理

设质点系处于平衡，有

$$\vec{F}_i + \vec{F}_{Ni} = 0$$

$$\vec{F}_i \cdot \delta\vec{r}_i + \vec{F}_{Ni} \cdot \delta\vec{r}_i = 0$$

$$\sum \vec{F}_i \cdot \delta\vec{r}_i + \boxed{0} = 0$$



即 $$\sum \vec{F}_i \cdot \delta\vec{r}_i = 0$$

或记为 $$\sum \delta W_{Fi} = 0$$

此方程称**虚功方程**，其表达的原理称**虚位移原理或虚功原理**.

对于具有理想约束的质点系，其平衡的充分必要条件是：**作用于质点系的所有主动力在任何虚位移中所作的虚功的和等于零**.

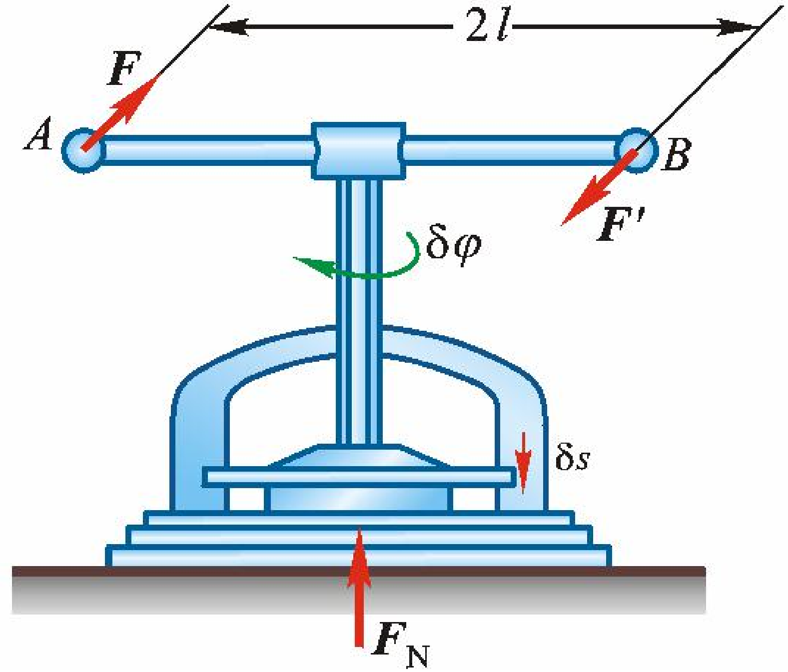
解析式为 $$\sum\left(F_{xi}\delta x_i + F_{yi}\delta y_i + F_{zi}\delta z_i\right) = 0$$

例14-1

已知：如图所示，在螺旋压榨机的手柄AB上作用一在水平面内的力偶（$\vec{F}$，$\vec{F}'$），其力矩 $M = 2Fl$，螺杆的导程为h.

求：机构平衡时加在被压物体上的力.

解： 以手柄、螺杆和压板组成的系统为研究对象受力如图.



给虚位移 $\delta\varphi$ 与 δs

$$\frac{\delta\varphi}{2\pi}=\frac{\delta s}{h}$$

$$\sum\delta W_F=-F_N\delta s+2Fl\delta\varphi=0$$

$$\sum\delta W_F=\left(2Fl-\frac{F_N h}{2\pi}\right)\delta\varphi=0$$

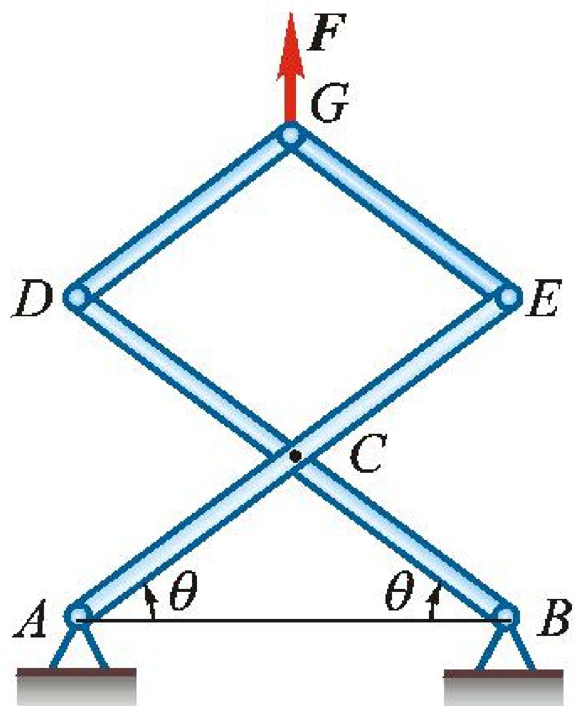
因 $\delta\varphi$ 是任意的

$$2Fl-\frac{F_N h}{2\pi}=0\qquad F_N=\frac{4\pi l}{h}F$$

例14-2

已知：图中所示结构，各杆自重不计，在 G 点作用一铅直向上的力 F，$AC = CE = CD = CB = DG = GE = l$。

求：支座 B 的水平约束力.



解: 解除B端水平约束, 以力代替.

$$\delta W_F = F_{Bx}\delta x_B + F\delta y_G = 0$$

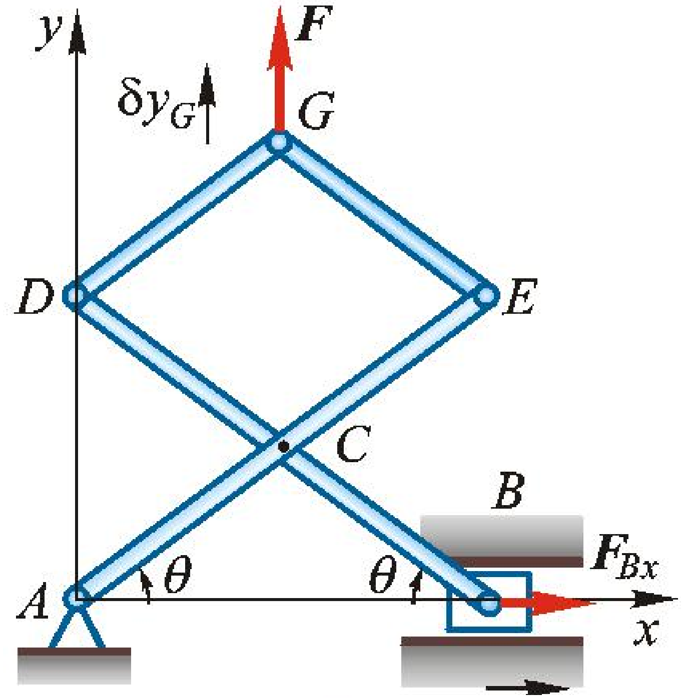
$$x_B = 2l\cos\theta,\ \ y_G = 3l\sin\theta$$

$$\delta x_B = -2l\sin\delta\theta,\ \ \delta y_G = 3l\cos\theta\delta\theta$$

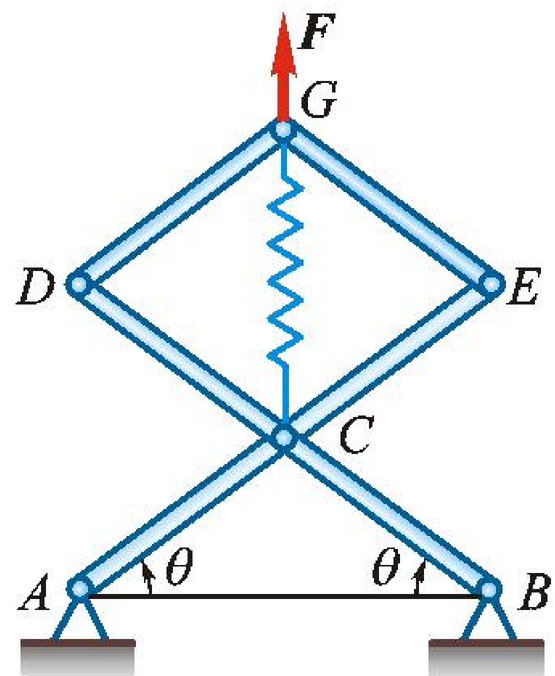
代入虚功方程

$$F_{Bx}\left(-2l\sin\theta\delta\theta\right) + F\cdot 3l\cos\theta\delta\theta = 0$$

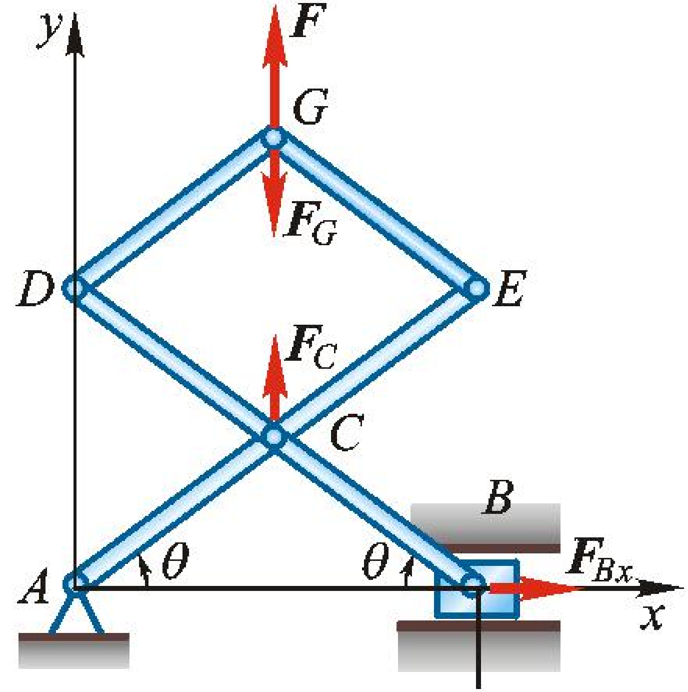
$$F_{Bx} = \frac{3}{2}F\cot\theta$$



问题： 如图在CG间加一弹簧, 刚度k，且已有伸长量δ_0, 仍求F_{Bx} .



在弹簧处也代之以力，如图.



$$F_C = F_G = k\delta_0$$

$$\delta W_F = 0$$

$$F_{Bx} \cdot \delta x_B + F_C \cdot \delta y_C - F_G \cdot \delta y_G$$

$$+F \cdot \delta y_G = 0$$

$$x_B = 2l\cos\theta, \quad y_C = l\sin\theta, \quad y_G = 3l\sin\theta$$

$$\delta x_B = -2l\sin\theta\delta\theta, \quad \delta y_C = l\cos\theta\delta\theta, \quad \delta y_G = 3l\cos\theta\delta\theta$$

$$F_{Bx}(-2l\sin\theta\delta\theta) + k\delta_0 l\cos\theta\delta\theta - k\delta_0 3l\cos\delta\theta + F3l\cos\theta\delta\theta = 0$$

$$\Rightarrow \quad F_{Bx} = \frac{3}{2}F\cot\theta - k\delta_0\cot\theta$$ ——解析法

例14-3

已知：如图所示椭圆规机构中，连杆AB长为l，滑块A，B与杆重均不计，忽略各处摩擦，机构在图示位置平衡.

求：主动力F_A与F_B之间的关系。

解：（1） 给虚位移 $\delta\vec{r}_A, \delta\vec{r}_B$，

$$\sum \vec{F}_i \cdot \delta\vec{r}_i = 0 \qquad F_A \delta r_A - F_B \delta r_B = 0$$

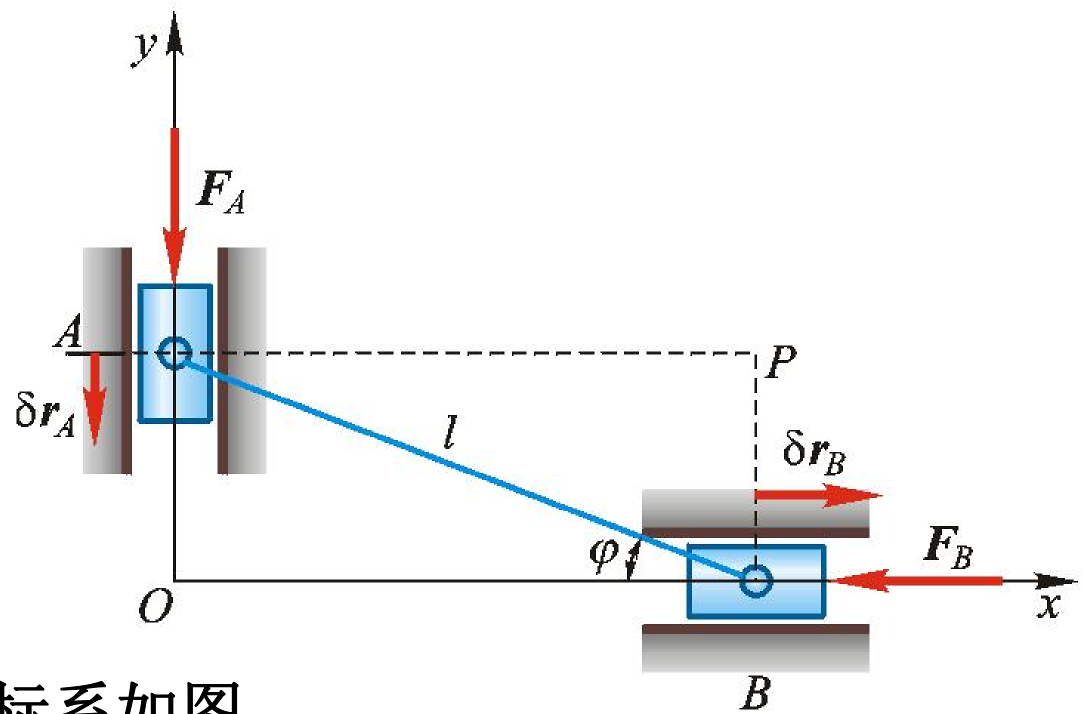
由 $\delta r_B \cos\varphi = \delta r_A \sin\varphi$（$\delta\vec{r}_A, \delta\vec{r}_B$ 在 A，B 连线上投影相等）

代入虚功方程，有

$$F_A \delta r_B \cot\varphi = F_B \delta r_B$$

$$F_A = F_B \tan\varphi$$

——直接法（几何法）



（2） 解析法 建立坐标系如图.

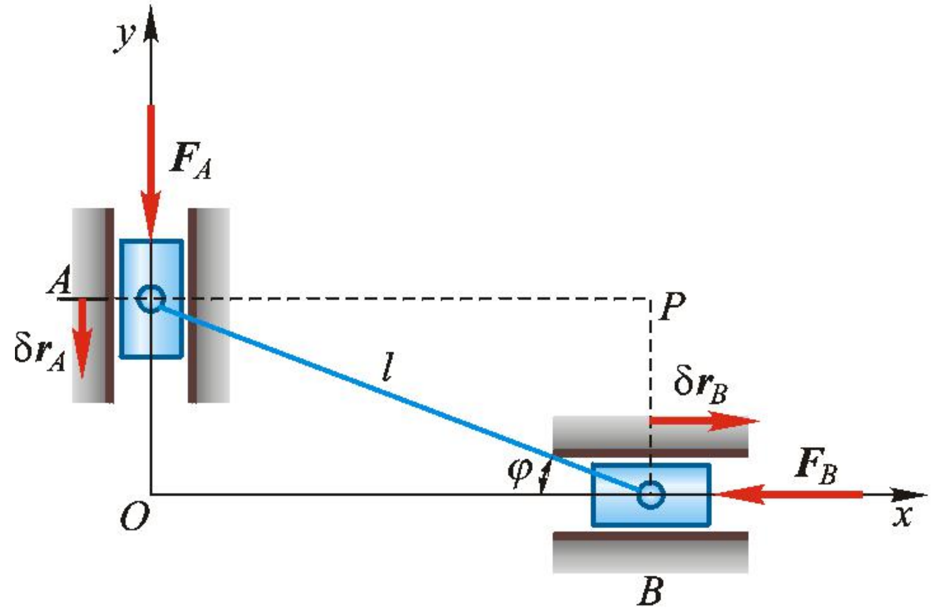
$$\sum \left(F_{xi}\delta x_i + F_{yi}\delta y_i + F_{zi}\delta z_i \right) = 0$$

$$-F_B\delta x_B - F_A\delta y_A = 0$$

$$x_B = l\cos\varphi,\quad y_A = l\sin\varphi$$

$$\delta x_B = -l\sin\varphi\delta\varphi$$

$$\delta y_A = -l\cos\varphi\delta\varphi$$



$\Rightarrow$ $F_A = F_B\tan\varphi$

(3) 虚速度法

定义： $\vec{v}_A = \dfrac{\delta\vec{r}_A}{\mathrm{d}t}$， $\vec{v}_B = \dfrac{\delta\vec{r}_B}{\mathrm{d}t}$ 为虚速度

代入到 $\sum\vec{F}_i\cdot\delta\vec{r}_i = 0$ 中，得 $F_Bv_B - F_Av_A = 0$

由速度投影定理，有 $v_B\cos\varphi = v_A\sin\varphi$

$\Rightarrow$ $F_A = F_B\tan\varphi$

例14-4

已知：如图所示机构，不计各构件自重与各处摩擦.

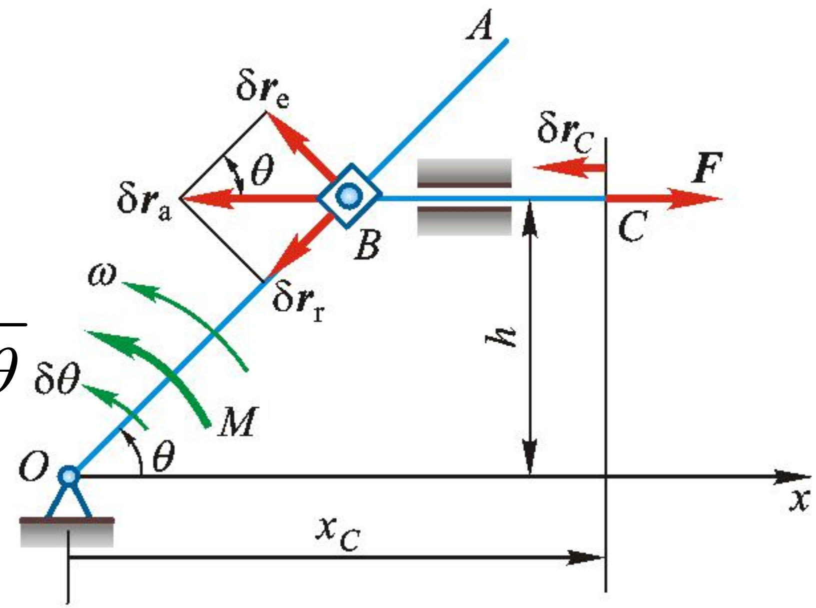
求：机构在图示位置平衡时，主动力偶矩 M 与主动力 F 之间的关系.

解: 给虚位移 $\delta\theta, \delta r_C$

$$\sum \delta W_F = M\delta\theta - F\delta r_c = 0 \qquad \delta r_a = \frac{\delta r_e}{\sin\theta}$$

$$\delta r_e = OB\delta\theta = \frac{h}{\sin\theta}\delta\theta, \quad \delta r_C = \delta r_a = \frac{h\delta\theta}{\sin^2\theta}$$

$$\Rightarrow \quad M = \frac{Fh}{\sin^2\theta}$$



虚速度法:

$$v_e = OB\cdot\omega = \frac{h}{\sin\theta}\omega, \quad v_a = v_C = \frac{h\omega}{\sin^2\theta}$$

$$M\omega - Fv_C = 0 \qquad M = \frac{Fh}{\sin^2\theta}$$

解析法:

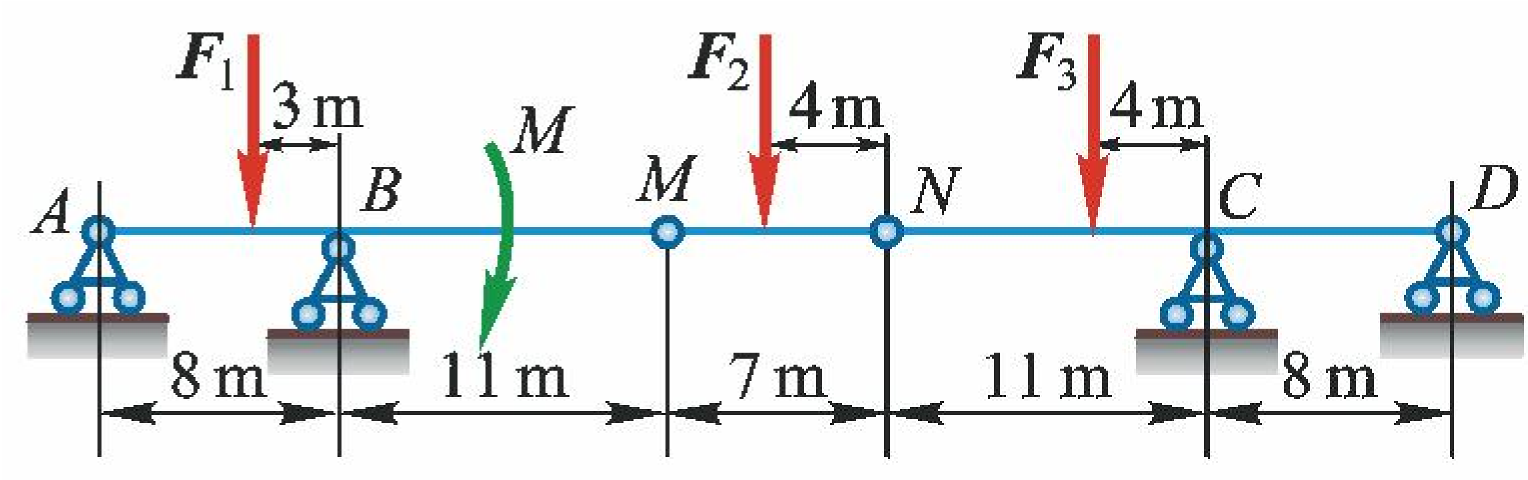
$$M\delta\theta + F\delta x_C = 0$$

$$x_C = h\cot\theta + BC \qquad \Rightarrow \qquad M = \frac{Fh}{\sin^2\theta}$$

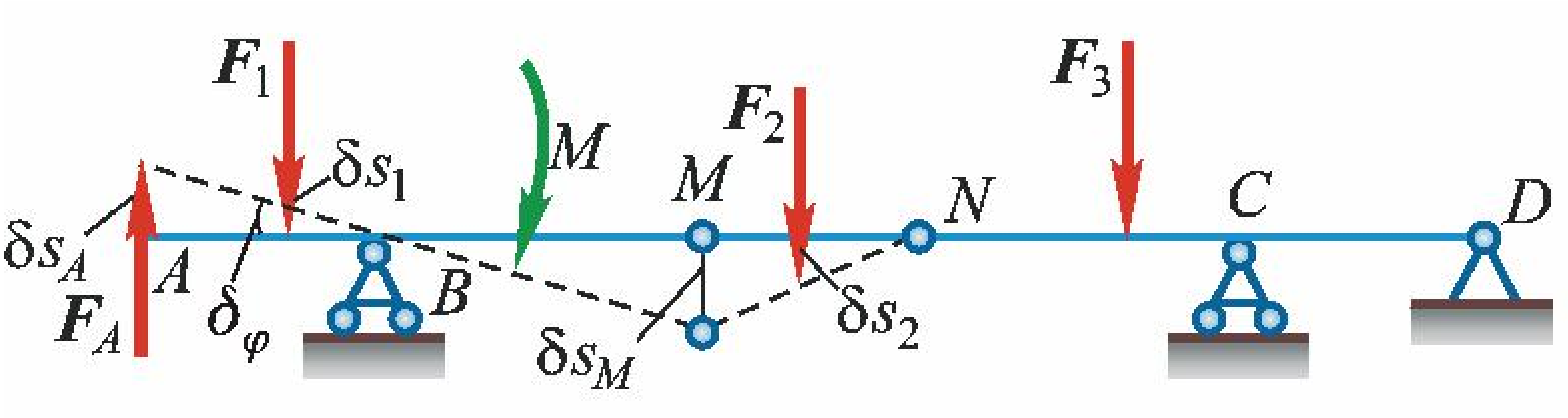
$$\delta x_C = -\frac{h\delta\theta}{\sin^2\theta}$$

例14-5

求图所示无重组合梁支座 A 的约束力.



解：解除A处约束，代之 F_A ，给虚位移，如图



$$\delta W_F = F_A \delta s_A - F_1 \delta s_1 + M\delta\varphi + F_2 \delta s_2 = 0$$

$$\delta\varphi = \frac{\delta s_A}{8}, \quad \delta s_1 = 3\delta\varphi = \frac{3}{8}\delta s_A, \quad \delta s_M = 11\delta\varphi = \frac{11}{8}\delta s_A$$

$$\delta s_2 = \frac{4}{7}\delta s_M = \frac{4}{7}\cdot\frac{11}{8}\delta s_A = \frac{11}{14}\delta s_A$$

$$\Rightarrow \quad F_A = \frac{3}{8}F_1 - \frac{11}{14}F_2 - \frac{1}{8}M$$