第二章 静电场（9课时）

节次	节　　名	小节标题
2.1	基本方程和唯一性定理	基本方程，静电势及其微分方程，边值关系，定解条件，静电场的唯一性定理
2.2	分离变数法	由泊松方程到拉普拉斯方程，直角坐标下二维问题的分离变量解，圆柱坐标下二维问题的分离变量解，球坐标下二维问题的分离变量解
2.3	格林函数法	定解问题，格林函数，格林函数法，格林函数及格林函数法应用举例
2.4	多极子电场	小带电体静电场的多极展开，参考点选择的影响，点电荷丛的多级矩，四极矩及四极场电势计算举例，电多极子在外电场中所受的力和力矩
2.5	静电能	静电能基本公式，小带电体在外电场中的静电能，静电场热力学

- 静电场的典型解法：分离变量法，格林函数法，泰勒展开法
- 严格证明电磁学提到但未曾给出严格证明的结论

1. 静电场解的唯一性定理
2. 静电场两条定理与库仑定律的等效性

- 静电场能量

1. 静电场能量表达式的严格推导
2. 静电场热力学

一　基本方程
(分区均匀线性
各向同性介质)

$$\nabla\times\boldsymbol{E}=0 \qquad (2.1.1)$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{D}=\rho_0 \qquad (2.1.2)$$

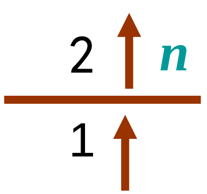
$$\boldsymbol{D}=\varepsilon\boldsymbol{E} \qquad (2.1.3)$$

二　静电势及其微分方程

$$\boldsymbol{E}=-\nabla\varphi \qquad (2.1.4)$$

$$\nabla^2\varphi=-\frac{\rho_0}{\varepsilon} \qquad \text{泊松方程} \qquad (2.1.5)$$

三　边值关系



$$\boldsymbol{n}\times(\boldsymbol{E}_2-\boldsymbol{E}_1)=0 \quad\Rightarrow\quad \varphi_1=\varphi_2 \qquad (2.1.8)$$

$$\boldsymbol{n}\cdot(\boldsymbol{D}_2-\boldsymbol{D}_1)=\sigma_0 \quad\Rightarrow\quad \varepsilon_1\frac{\partial\varphi_1}{\partial n}-\varepsilon_2\frac{\partial\varphi_2}{\partial n}=\sigma_0 \qquad (2.1.9)$$

【备注】齐次边值关系用于直接求解；非齐次关系事后用来计算界面电荷密度（题目给定非零 σ_0 的情况例外）

四 定解条件（实现解的唯一、存在）

- 边界条件：解域边界上外加条件

  标定边界条件的三个原则：

1. 可测（控）性：标定的物理量可以测量，或可以控制
2. 自洽性：与基本方程和边值关系不矛盾
3. 定解问题的适定性：解唯一存在

- 正则条件

1. 解域内电势处处单值、有限（点电荷或线电荷上例外）
2. 无限远处的渐近条件

(1) 电势趋于零（无外场及有限电荷分布情况）

(2) 均匀场条件，例如： $\boldsymbol{E} = E_0 \boldsymbol{e}_z \Rightarrow \varphi \to -E_0 z$

(3) 解域内存在无限长柱状电荷： $\varphi \to -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0} \ln r$ （λ:线电荷密度）

五　静电场唯一性定理

- 采用“倒叙法”：要使解唯一，至少要加上什么边界条件？

1. 所提边界条件的依据是什么？
2. 边界条件是否过分而导致无解？
3. 有几种可供选择的标定边界条件的方案？

- 待加边界条件的定解问题

分区均匀介质，解域：V，边界 S；

各介质区体积：V_i，边界 S_i　　$V=\sum_i V_i$，　$S_{ij}=S_i\bigcap S_j$

满足

$$\nabla^2\varphi=-\frac{\rho_0}{\varepsilon},\qquad \varphi_i\big|_{S_{ij}}=\varphi_j\big|_{S_{ij}},\quad \varepsilon_i\frac{\partial\varphi_i}{\partial n}\bigg|_{S_{ij}}-\varepsilon_j\frac{\partial\varphi_j}{\partial n}\bigg|_{S_{ij}}=\sigma_0$$

的静电场解，至少需在边界 S 给 φ 加上何种边界条件才保证解的唯一性？（注意：ρ_0 和 σ_0 事先给定，可以为零）

- 回答：反证法．设有两个解：φ_1 和 φ_2；令 $\Phi=\varphi_1-\varphi_2$, 则

$$\nabla^2\Phi=0,\quad \begin{cases} \Phi_i\big|_{S_{ij}}=\Phi_j\big|_{S_{ij}}, \\ \varepsilon_i\dfrac{\partial\Phi_i}{\partial n}\bigg|_{S_{ij}}-\varepsilon_j\dfrac{\partial\Phi_j}{\partial n}\bigg|_{S_{ij}}=0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{\varepsilon_i\left(\Phi_i\frac{\partial\Phi_i}{\partial n}\right)_{S_{ij}}=\varepsilon_j\left(\Phi_j\frac{\partial\Phi_j}{\partial n}\right)_{S_{ij}}}$$

将第三格林公式用于第 i 介质区, 得

$$\oiint_{S_i}\varepsilon_i\Phi\nabla\Phi\cdot d\boldsymbol{\sigma}=\iiint_{V_i}\varepsilon_i(\nabla\Phi)^2dV+\iiint_{V_i}\Phi\varepsilon_i\nabla^2\Phi dV$$

式中右边第二项消失, 据此求得 $\iiint_{V_i}\varepsilon_i(\nabla\Phi)^2dV=\oiint_{S_i}\varepsilon_i\Phi\nabla\Phi\cdot d\boldsymbol{\sigma}$

对各区求和得

$$\iiint_V\varepsilon(\nabla\Phi)^2dV=\oiint_S\varepsilon\Phi\frac{\partial\Phi}{\partial n}d\sigma \qquad (2.1.13)$$

合适的边界条件应确保上式右边面积分为零，从而解唯一

$$\iiint_V \varepsilon(\nabla\Phi)^2 dV = \oiint_S \varepsilon\Phi\frac{\partial\Phi}{\partial n}d\sigma \qquad (2.1.13)$$

1. 第一类边界条件：给定边界电势 $\Rightarrow \ \Phi_S = 0;$
2. 第二类边界条件：给定边界电势的法向导数 $\Rightarrow (\partial\Phi/\partial n)_S = 0;$

［ 满足高斯定理自洽条件： $\oiint_S \varepsilon\partial\Phi/\partial n d\sigma = \iiint_V \rho_0 dV$ ，参见式(2. 1. 17) ］

1. 混合边界条件：一部分边界第一类；另一部分边界第二类
2. 给定各导体的电量

$$\oiint_S \varepsilon\frac{\partial\varphi}{\partial n}d\sigma = Q_0 \quad (2.1.18) \Longrightarrow \oiint_S \varepsilon\frac{\partial\Phi}{\partial n}d\sigma = 0 \qquad (2.1.18)$$

证明：

$$\Phi|_S = \Phi_0 \Longrightarrow \oiint_S \varepsilon\Phi\frac{\partial\Phi}{\partial n}d\sigma = \Phi_0\oiint_S \varepsilon\frac{\partial\Phi}{\partial n}d\sigma = 0$$

证毕

【说明】不能认定$\Phi_0 = 0$，否则用不上条件(2.1.18)！

- 方法实质：将偏微分方程化为若干个常微分方程分别求解
- 适用范围：线性齐次偏微分方程

一　由泊松方程到拉普拉斯方程

泊松方程：　$\nabla^2\varphi' = -\dfrac{\rho_0}{\varepsilon}$，　特解：$\varphi_0 = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon}\iiint \dfrac{\rho_0(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}dV'$

令　$\varphi = \varphi' - \varphi_0$，则 φ 满足拉普拉斯方程(齐次)：　$\nabla^2\varphi = 0$

【备注】 以下限于二维问题，电势仅为两个空间坐标的函数

1. 与三维问题分离变量法求解过程类似
2. 电动力学课程一般不涉及三维问题
3. 基本不涉及数理方程中出现的复杂特殊函数

建议：在学习数理方程课程中，可参考有关电动力学参考书，适当扩大分离变量处理复杂问题的范围。例如：

J. D. Jackson, 经典电动力学,高等教育出版社,北京, 2002.

二 直角坐标（x, y, z）下二维问题的分离变量解

$$\varphi=\varphi(x,y): \qquad \nabla^2\varphi=0 \Longrightarrow \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}=0$$

$$\varphi(x,y)=X(x)Y(y) \Longrightarrow Y\frac{d^2X}{dx^2}+X\frac{d^2Y}{dy^2}=0$$

$$\frac{1}{X}\frac{d^2X}{dx^2}+\frac{1}{Y}\frac{d^2Y}{dy^2}=0 \Longrightarrow \frac{1}{X}\frac{d^2X}{dx^2}=-\alpha^2, \qquad \frac{1}{Y}\frac{d^2Y}{dy^2}=\alpha^2$$

$$X_\alpha=a_\alpha\sin\alpha x+b_\alpha\cos\alpha x=a'_\alpha e^{i\alpha x}+b'_\alpha e^{-i\alpha x}$$

$$Y_\alpha=c_\alpha e^{\alpha y}+d_\alpha e^{-\alpha y}=c'_\alpha\sinh\alpha y+d'_\alpha\cosh\alpha y$$

$$\varphi=\sum_\alpha(a_\alpha\sin\alpha x+b_\alpha\cos\alpha x)(c_\alpha e^{\alpha y}+d_\alpha e^{-\alpha y}) \qquad (2.2.9)$$

本征值 α 由齐次边界条件确定(可能为虚数），系数由边值关系和定解条件（边界条件和正则条件）确定

例2.1　如图2—1所示，电场局限于由间距为a的两个半无限平行导体平板和与之垂直、宽度为a的无限长导体端板构成的区域之中，端板和平行板之间彼此绝缘．将两平行导体平板接地，端板加上电势 V_0，求该区域内的电势分布．

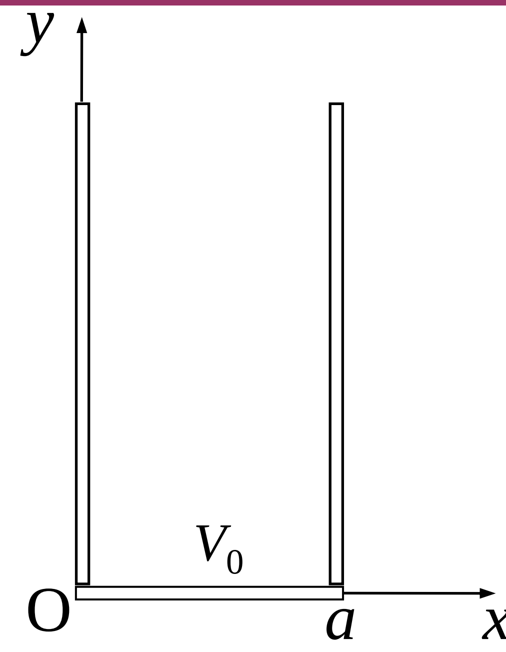


图2—1

解　采用直角坐标，写出通解：

$$\varphi=\sum_{\alpha}(a_\alpha \sin\alpha x+\cancel{b_\alpha \cos\alpha x})(\cancel{c_\alpha e^{\alpha y}}+\cancel{d}_\alpha e^{-\alpha y})$$

列出边界条件和正则条件：

$$\varphi|_{x=0}=\varphi|_{x=a}=0,\quad \varphi|_{y=0}=V_0,\quad \varphi|_{y\to\infty}=0$$

由齐次边界条件(第1个)确定本征值 α 和 b_α：

$$\alpha=n\pi/a,\quad n=1,2,\cdots;\quad b_\alpha=0$$

由第3个条件得 $c_\alpha=0$；不妨令 $d_\alpha=1$. 最后由第2个条件确定a_α：

$$\varphi=\sum_{\alpha}a_\alpha \sin\alpha x\, e^{-\alpha y} \Longrightarrow \varphi|_{y=0}=\sum_n a_n \sin(n\pi x/a)=V_0$$

(续解例2.1)

$$\varphi = \sum_n a_n \sin(n\pi x/a)\exp(-n\pi y/a)$$

$$\varphi|_{y=0} = \sum_n a_n \sin(n\pi x/a) = V_0$$

利用正弦函数的级数展开系数计算公式得

$$a_n = \frac{2}{a}\int_0^a V_0 \sin(n\pi x/a)dx = \begin{cases} 4V_0/(n\pi), & n\text{为奇数}; \\ 0, & n\text{为偶数}. \end{cases}$$

$$\varphi = \frac{4V_0}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}\sin\left[\frac{(2n-1)\pi x}{a}\right]e^{-\frac{2n-1}{a}\pi y}$$

解毕

三　圆柱坐标（ρ, ϕ, z）下二维问题的分离变量解

$$\varphi=\varphi(\rho,\phi):\qquad \nabla^2\varphi=0 \Rightarrow \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial\varphi}{\partial\rho}\right)+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\phi^2}=0$$

$$\varphi(\rho,\phi)=R(\rho)\Phi(\phi) \Rightarrow \frac{\Phi}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial R}{\partial\rho}\right)+\frac{R}{\rho^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\phi^2}=0$$

$$\frac{\rho^2}{\rho R}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial R}{\partial\rho}\right)+\frac{1}{\Phi}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\phi^2}=0 \Rightarrow \frac{1}{\rho}\frac{d}{d\rho}\left(\rho\frac{dR}{d\rho}\right)=\frac{m^2}{\rho^2}R,\qquad \frac{d^2\Phi}{d\phi^2}=-m^2\Phi$$

$$R_m=\begin{cases}a_0+b_0\ln\rho, & m=0,\\ a_m\rho^m+b_m\rho^{-m}, & m\neq 0;\end{cases}\qquad \Phi_m=\begin{cases}c_0+d_0\phi, & m=0,\\ c_m\cos m\phi+d_m\sin m\phi, & m\neq 0.\end{cases}$$

$$\varphi=(a_0+b_0\ln\rho)(c_0+d_0\phi)+\sum_{m\neq 0}(a_m\rho^m+b_m\rho^{-m})(c_m\cos m\phi+d_m\sin m\phi), \tag{2.2.14}$$

本征值m由周期边界条件确定(0≤ϕ≤2π),系数由边值关系和定解条件确定

例2.2 半径为 a 的无限长导体圆柱置于均匀电场E_0之中，该电场与圆柱轴线垂直，单位长度圆柱所带电荷为 λ . 设柱外为真空，求空间电势分布.

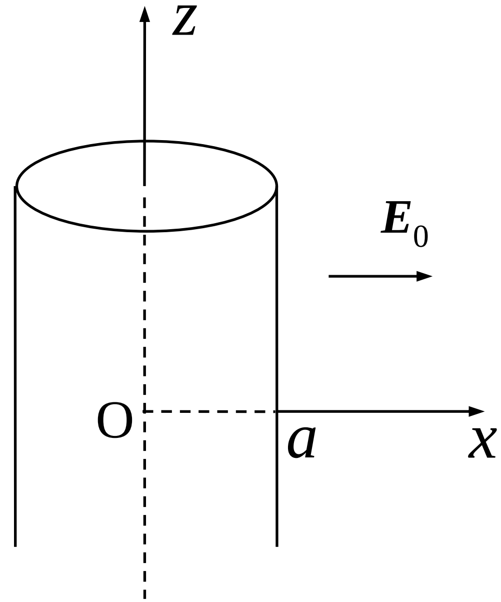


图2－2

解 取圆柱坐标系，尝试取通解中m=0,1的项：

$$\varphi = b_0 \ln(\rho/\rho_0) + (a_1\rho + b_1\rho^{-1})\cos\phi$$

列出边界条件和正则条件：

1. 周期边界条件(已体现在通解的选择之中)
2. 远处渐近条件：均匀场＋长直线电荷场（部分体现）
3. 导体带电量和导体表面为等势面(尚未使用)

利用远处（$\rho \to \infty$）均匀场条件定出：$\varphi|_{\rho\to\infty} \to -E_0\rho\cos\phi \Rightarrow a_1 = -E_0$

利用导体表面为等势面的条件定出：$a_1 a + b_1/a = 0 \Rightarrow b_1 = -a_1 a^2 = E_0 a^2$

利用单位长度导体电量为λ的条件确定 b_0：

$$\varepsilon_0 a \int_0^{2\pi} \frac{\partial\varphi}{\partial\rho} d\phi = -\lambda \quad \Longrightarrow \quad b_0 = -\lambda/(2\pi\varepsilon_0)$$

(续解例2.2)

$$\varphi = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln\left(\frac{\rho_0}{\rho}\right) - E_0\rho\cos\phi + \frac{E_0 a^2}{\rho}\cos\phi$$

式中无关紧要的常数 ρ_0 可通过适当选择电势零点确定. 解毕

四 球坐标（r, θ, ϕ）下二维问题的分离变量解

$$\varphi = \varphi(r,\theta): \quad \nabla^2\varphi = 0 \Rightarrow \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}\right) = 0$$

$$\varphi(r,\theta) = R(\rho)\Theta(\theta) \Rightarrow \frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial R}{\partial r}\right) + \frac{1}{\Theta\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\Theta}{\partial\theta}\right) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR}{dr}\right) = n(n+1)R, \qquad \frac{1}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{d\Theta}{d\theta}\right) = -n(n+1)\Theta$$

$$R_n = a_n r^n + b_n r^{-(n+1)}, \qquad \Theta_n = \underbrace{P_n(\cos\theta)}_{\text{勒尚德多项式}} = \frac{1}{2^n n!}\left(\frac{d^n}{dx^n}[(x^2-1)^n]\right)_{x=\cos\theta}$$

$$\varphi=\sum_{n=0}^{\infty}[a_n r^n+b_n r^{-(n+1)}]P_n(\cos\theta) \qquad (2.2.21)$$

1. 本征值 n 由关于 $\theta=0$ 和 π 电势有限的条件确定：n 为正整数；
2. 对于简单问题，只需取通解中的头几项（系数由边值关系和定解条件确定）：

$$P_0(\cos\theta)=1,$$

$$P_1(\cos\theta)=\cos\theta,$$

$$P_2(\cos\theta)=\frac{1}{2}(3\cos^2\theta-1).$$

可直接验证它们分别满足

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{d\Theta}{d\theta}\right)=-n(n+1)\Theta$$

例2.3　半径为a、介电常量为 ε 的均匀介质球，置于均匀电场 $\boldsymbol{E}_0$ 之中，球外真空，求空间电势和电场分布.

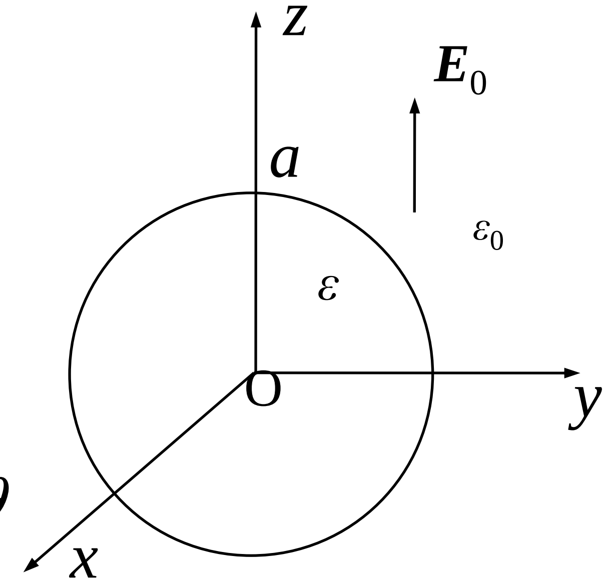


图2—3

解　取球坐标系，尝试取通解中$m=0,1$的项：

球内（$r<a$）：$\varphi_1 = a_0 + a_1 r\cos\theta$

球外（$r>a$）：$\varphi_2 = a_0' + a_1' r\cos\theta + \dfrac{b_0'}{r} + \dfrac{b_1'}{r^2}\cos\theta$

共6个待定系数. 列出正则条件和边值关系：

1. 球内电势处处有限（已体现在 φ_1 的选择之中）
2. 远处渐近条件: 均匀场（部分体现）
- 球面上的边值关系（尚未使用）

$$\varphi_1\big|_{r=a} = \varphi_2\big|_{r=a}, \qquad \varepsilon\left.\frac{\partial\varphi_1}{\partial r}\right|_{r=a} = \varepsilon_0\left.\frac{\partial\varphi_2}{\partial r}\right|_{r=a}$$

(续解例2.3) 利用远处（$r\to\infty$）均匀场条件定出： $a_1'=-E_0$，且不妨令 $a_0'=0$. 余下**4**个系数由边值关系确定：

$$a_0+a_1a\cos\theta=-E_0a\cos\theta+\frac{b_0'}{a}+\frac{b_1'}{a^2}\cos\theta$$

$$\varepsilon a_1\cos\theta=-\varepsilon_0(E_0\cos\theta+\frac{b_0'}{a^2}+\frac{2b_1'}{a^3}\cos\theta)$$

将上述两式按是否含因子 $\cos\theta$ 用整理如下：

$$(a_1a+E_0a-\frac{b_1'}{a^2})\cos\theta=-a_0+\frac{b_0'}{a}$$

$$(\varepsilon a_1+\varepsilon_0E_0+\frac{2\varepsilon_0b_1'}{a^3})\cos\theta=-\frac{\varepsilon_0b_0'}{a^2}$$

左右两边分别等于零，得**4**个方程；从中解得余下**4**个系数：

$$a_0=b_0'=0,\quad a_1=-\frac{3\varepsilon_0E_0}{\varepsilon+2\varepsilon_0},\quad b_1'=\frac{(\varepsilon-\varepsilon_0)E_0a^3}{\varepsilon+2\varepsilon_0}$$

(续解例2.3)

1. 电势：

$$\varphi=\begin{cases}-\dfrac{3\varepsilon_0 E_0 r\cos\theta}{\varepsilon+2\varepsilon_0}, & r\le a;\\ -E_0 r\cos\theta+\dfrac{(\varepsilon-\varepsilon_0)E_0 a^3\cos\theta}{(\varepsilon+2\varepsilon_0)r^2}, & r>a.\end{cases}\qquad(2.2.24)$$

2. 电场：

$$\boldsymbol{E}=\begin{cases}\boldsymbol{E}_1=\dfrac{3\varepsilon_0\boldsymbol{E}_0}{\varepsilon+2\varepsilon_0}, & r\le a;\\ \boldsymbol{E}_2=\boldsymbol{E}_0-\dfrac{\boldsymbol{p}}{4\pi\varepsilon_0 r^3}+\dfrac{3\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^5}\boldsymbol{r}, & r>a;\end{cases}\qquad(2.2.25)$$

式中：

$$\boldsymbol{p}=\frac{4\pi a^3}{3}\boldsymbol{P},\qquad \boldsymbol{P}=(\varepsilon-\varepsilon_0)\boldsymbol{E}_1=\frac{3\varepsilon_0(\varepsilon-\varepsilon_0)}{\varepsilon+2\varepsilon_0}\boldsymbol{E}_0\qquad(2.2.26)$$

【备注】从(2.2.25)减去$\boldsymbol{E}_0$，得均匀极化球的场（见教材），解毕

启示：小带电体近似：$\boldsymbol{p}\to 0$，因极化或感应造成的相互影响可以忽略

小　结

- 分量变量法步骤

1. 列出通解（无穷级数）或猜解（级数的头1至2项）
2. 列出全部边值关系、边界条件和正则条件
3. 确定本征值和待定系数

- 注意三个问题

1. 能进行变量分离的正交曲线坐标系只有11种，参见
   P. M. Morse and H. Feshbach, Methods of Theoretical Physics, 2 Pts., McGraw-Hill, New York, 1953;

或：P. Moon and D. E. Spencer, Field Theory Handbook, Springer Verlag, 1961.

2. 分离变量法所得特解的正交完备性质需要证明
3. 分离变量法适用于其他线性齐次方程，例如第四章将要提到的波动方程（赫姆霍兹方程）

- 方法实质：将一般定解问题约化为点源、齐次方程的定解问题
- 物理含义：体现静电场的叠加原理,解写成类似库仑积分的形式
- 数学手段：第二格林公式

一 定解问题

$$\nabla^2\varphi = -\frac{1}{\varepsilon}\rho_0(\mathbf{r}),$$

第一类边值问题： $\varphi|_S = f$ 第二类边值问题： $\left.\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right|_S = g$

(法向 $\mathbf{n}$ 指向解域外部; S 为解域内边界)

二 格林函数

1. 定义 (**r** ：场点； **r′** ：源点)

$$\begin{cases}\nabla^2 G(\mathbf{r};\mathbf{r}') = -\frac{1}{\varepsilon}\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}') \\ G(\mathbf{r};\mathbf{r}')|_{r\in S} = 0 \end{cases} \quad (2.3.5)$$

$$\begin{cases}\nabla^2 G(\mathbf{r};\mathbf{r}') = -\frac{1}{\varepsilon}\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}') & (2.3.4) \\ \left.\frac{\partial G(\mathbf{r};\mathbf{r}')}{\partial n}\right|_{r\in S} = 0 & (2.3.6)\end{cases}$$

第一类边值问题的格林函数 第二类边值问题的格林函数；

第二类问题限于内边界 S 外的无限解域，高斯定理自洽条件自动满足

2. 对称性

$$\begin{cases} \nabla^2 G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}') = -\dfrac{1}{\varepsilon}\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}') \\ G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}')\big|_{r\in S} = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \nabla^2 G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}') = -\dfrac{1}{\varepsilon}\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}') \\ \left.\dfrac{\partial G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}')}{\partial n}\right|_{r\in S} = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}') = G(\boldsymbol{r}';\boldsymbol{r}) \qquad (2.3.7)$$

1. 物理学中有趣的互易原理（有条件，但普遍存在）

位于 $\boldsymbol{r}'$ 的源在 $\boldsymbol{r}$ 处产生的场等于位于 $\boldsymbol{r}$ 的源在 $\boldsymbol{r}'$ 处产生的场

- 检验格林函数正确性的一个有用判据
- 对于有限解域的第二类边值问题的格林函数，可通过适当变换维持格林函数的对称性，参见：

[1] K. J. Kim and J. D. Jackson, Am. J. Phys., 61(12),1144-1146,1993.

[2] J. D. Jackson, Classical Electrodynamics, 高等教育出版社，北京，2004，p.52, 习题1.14

格林函数对称性的证明：

$$\iiint_V (\psi\nabla^2\varphi - \varphi\nabla^2\psi)dV = \oiint_S \left(\psi\frac{\partial\varphi}{\partial n} - \varphi\frac{\partial\psi}{\partial n}\right)d\sigma$$

令 $\psi = G(\mathbf{r};\mathbf{r}'),\quad \varphi = G(\mathbf{r};\mathbf{r}'')$

① 由格林函数满足的微分方程

左边①$= -\frac{1}{\varepsilon}\iiint_V G(\mathbf{r};\mathbf{r}')\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}'')dV + \frac{1}{\varepsilon}\iiint_V G(\mathbf{r};\mathbf{r}'')\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')dV$

$$= -\frac{1}{\varepsilon}[G(\mathbf{r}'';\mathbf{r}') - G(\mathbf{r}';\mathbf{r}'')],$$

右边$= \oiint_S \left[G(\mathbf{r};\mathbf{r}')\frac{\partial G(\mathbf{r};\mathbf{r}'')}{\partial n} - G(\mathbf{r};\mathbf{r}'')\frac{\partial G(\mathbf{r};\mathbf{r}')}{\partial n}\right]d\sigma \overset{②}{=} 0$

② 由格林函数满足的边界条件

$$\Rightarrow \quad G(\mathbf{r}'';\mathbf{r}') = G(\mathbf{r}';\mathbf{r}'')$$

证毕

三 格林函数法

将原格林函数定义方程中的 $\boldsymbol{r}$ 和 $\boldsymbol{r}'$ 互换：

$$\begin{cases} \nabla^2 G(\mathbf{r};\mathbf{r}') = -\dfrac{1}{\varepsilon}\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}') \\ G(\mathbf{r};\mathbf{r}')\big|_{\mathbf{r}\in S} = 0 \\ \left.\dfrac{\partial G(\mathbf{r};\mathbf{r}')}{\partial n}\right|_{\mathbf{r}\in S} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \nabla'^2 G(\mathbf{r}';\mathbf{r}) = -\dfrac{1}{\varepsilon}\delta(\mathbf{r}'-\mathbf{r}) \\ G(\mathbf{r}';\mathbf{r})\big|_{\mathbf{r}'\in S} = 0 \\ \left.\dfrac{\partial G(\mathbf{r}';\mathbf{r})}{\partial n'}\right|_{\mathbf{r}'\in S} = 0 \end{cases}$$

问题：为何要做这种互换？

回答：使得微分和下面即将利用的格林公式中的积分对 $\boldsymbol{r}'$ 进行，从而作为积分结果的电势解为 $\boldsymbol{r}$ 的函数。

利用第二格林公式：

$$\iiint_V (\psi\nabla'^2\varphi-\varphi\nabla'^2\psi)dV'=\oiint_S\left(\psi\frac{\partial\varphi}{\partial n'}-\varphi\frac{\partial\psi}{\partial n'}\right)d\sigma'$$

令 φ 为待求电势， $\psi=G(\mathbf{r}';\mathbf{r})$， 得

$$\boxed{\nabla'^2\psi(\mathbf{r}';\mathbf{r})=-\frac{1}{\varepsilon}\delta(\mathbf{r}'-\mathbf{r})}$$

$$\text{左边}=-\frac{1}{\varepsilon}\iiint_V\rho_0(\mathbf{r}')G(\mathbf{r}';\mathbf{r})dV'+\frac{1}{\varepsilon}\iiint_V\varphi(\mathbf{r}')\delta(\mathbf{r}'-\mathbf{r})dV'$$

$$=\frac{1}{\varepsilon}\varphi(\mathbf{r})-\frac{1}{\varepsilon}\iiint_V\rho_0(\mathbf{r}')G(\mathbf{r}';\mathbf{r})dV',$$

$$\text{右边}=\oiint_S\left(G(\mathbf{r}';\mathbf{r})\frac{\partial\varphi(\mathbf{r}')}{\partial n'}-\varphi(\mathbf{r}')\frac{\partial G(\mathbf{r}';\mathbf{r})}{\partial n'}\right)d\sigma'$$

$$\varphi(\mathbf{r})=\iiint_V\rho_0(\mathbf{r}')G(\mathbf{r}';\mathbf{r})dV'+\varepsilon\oiint_S\left(G(\mathbf{r}';\mathbf{r})\frac{\partial\varphi(\mathbf{r}')}{\partial n'}-\varphi(\mathbf{r}')\frac{\partial G(\mathbf{r}';\mathbf{r})}{\partial n'}\right)d\sigma'$$

上述表达式只能视为电势的形式解，并非实际边值问题的电势解

理由：在边界 S 上只需标定电势或其法向导数之一，即得唯一解

1. 第一类边值问题的解(G_1 为第一边值问题的格林函数)

$$G_1(\mathbf{r}';\mathbf{r})|_{\mathbf{r}'\in S}=0:\quad \varphi(\mathbf{r})=\iiint_V \rho_0(\mathbf{r}')G_1(\mathbf{r}';\mathbf{r})dV'-\varepsilon\oiint_S \varphi(\mathbf{r}')\frac{\partial G_1(\mathbf{r}';\mathbf{r})}{\partial n'}d\sigma' \tag{2.3.11}$$

2. 第二类边值问题的解(G_2 为第二边值问题的格林函数)

$$\left.\frac{\partial G_2(\mathbf{r}';\mathbf{r})}{\partial n'}\right|_{\mathbf{r}'\in S}=0:\quad \varphi(\mathbf{r})=\iiint_V \rho_0(\mathbf{r}')G_2(\mathbf{r}';\mathbf{r})dV'+\varepsilon\oiint_S \frac{\partial \varphi(\mathbf{r}')}{\partial n'}G_2(\mathbf{r}';\mathbf{r})d\sigma' \tag{2.3.12}$$

3. 利用格林函数的对称性

$$G(\mathbf{r};\mathbf{r}')=G(\mathbf{r}';\mathbf{r})$$

$$\varphi(\mathbf{r})=\iiint_V \rho_0(\mathbf{r}')G_1(\mathbf{r};\mathbf{r}')dV'-\varepsilon\oiint_S \varphi(\mathbf{r}')\frac{\partial G_1(\mathbf{r};\mathbf{r}')}{\partial n'}d\sigma' \tag{2.3.11a}$$

$$\varphi(\mathbf{r})=\iiint_V \rho_0(\mathbf{r}')G_2(\mathbf{r};\mathbf{r}')dV'+\varepsilon\oiint_S \frac{\partial \varphi(\mathbf{r}')}{\partial n'}G_2(\mathbf{r};\mathbf{r}')d\sigma' \tag{2.3.12a}$$

- 修改后的解自然体现了源和场的关系和静电场的叠加原理
- 不能认为体积分代表实际体源、面积分代表实际面源的贡献！（举个反例）
- 体积分满足非齐次方程齐次边界条件，面积分满足齐次方程非齐次边界条件

四 格林函数及格林函数法应用举例

- 格林函数的计算

1. 求解格林函数的定解问题—积分或级数形式的格林函数
2. 电像法（本课程限于这种情况）

- 无限空间的格林函数

$$G(\mathbf{r};\mathbf{r}') = \frac{1}{4\pi\varepsilon R} \qquad (2.3.13)$$

$$R = |\mathbf{r}-\mathbf{r}'| = [(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2]^{1/2} \qquad (2.3.14)$$

【说明1】相当于单位点电荷的静电场(不做第一、二类区分)

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\iiint_V \frac{\rho_0(\mathbf{r}')}{R}dV' \qquad (2.3.15)$$

【说明2】即库仑电势积分；我们从静电场方程出发导出了库仑定律，从而严格证明了库仑定律（及叠加原理）与静电场两条定理完全等效（对比1.1节通过矢量场唯一性定理给出的证明）