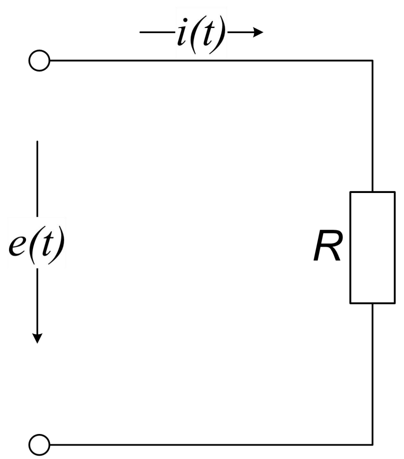
Chapter 2 连续时间线性定常系统时域分析

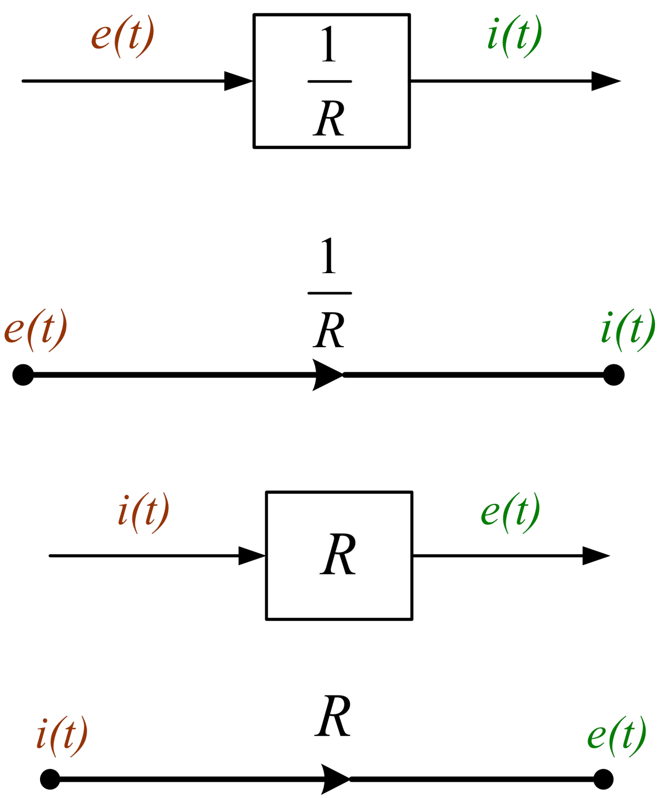
- §2.1 系统的数学模型
- §2.2 LTI系统的响应
- §2.3 LTI系统的冲激响应与阶跃响应
- §2.4 卷积

§2.1 系统的数学模型

- **模型1：*R*、*L*、*C*上的$e(t) \sim i(t)$关系**

(1)



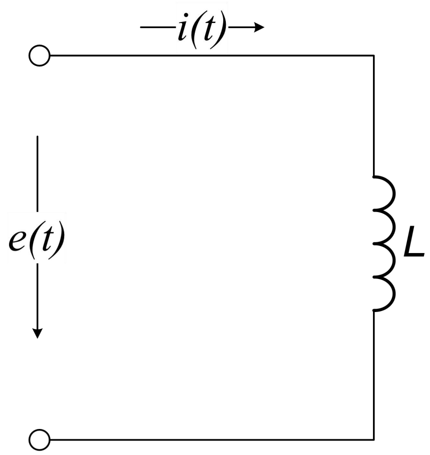


$$i(t) = \frac{1}{R} e(t)$$

$$e(t) = Ri(t)$$

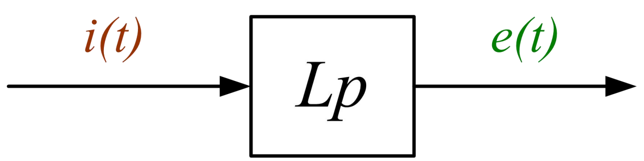
框图；流图：相乘关系

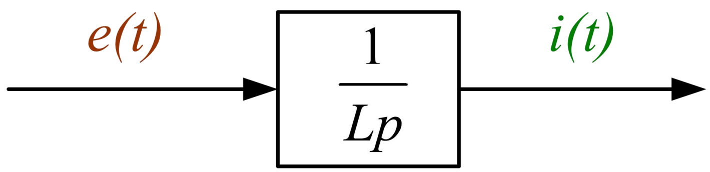
(2)

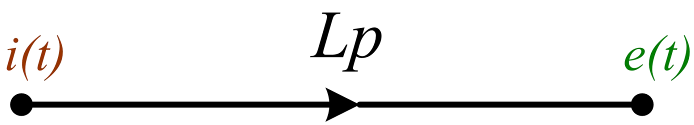


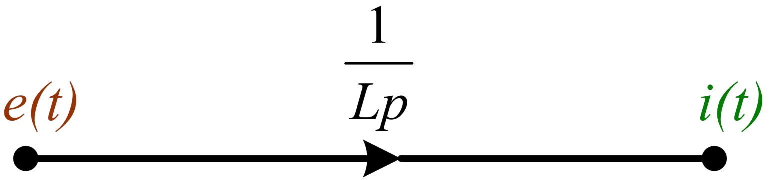
$$e(t)=L\frac{di(t)}{dt}=Lpi(t)$$

$$i(t)=\frac{1}{L}\int_{-\infty}^{t}e(\tau)d\tau=\frac{1}{Lp}e(t)$$

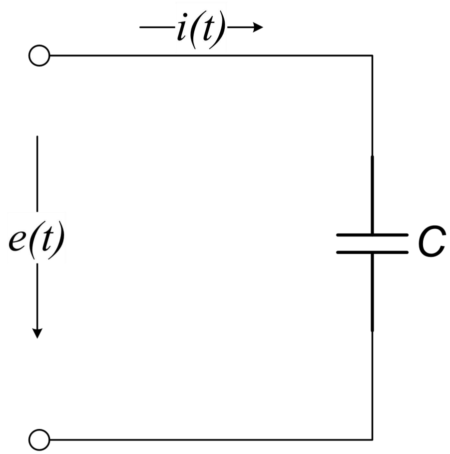






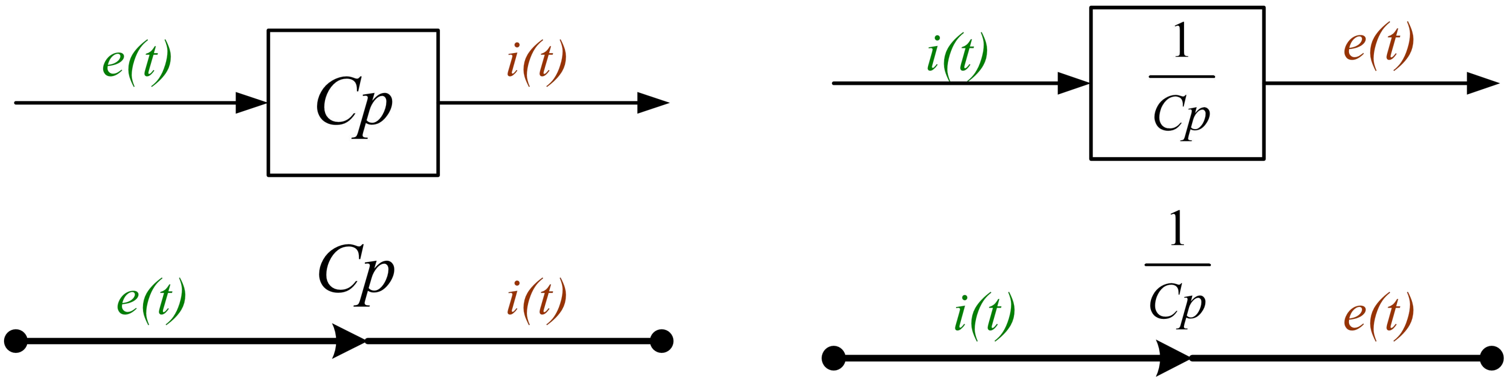


(3)

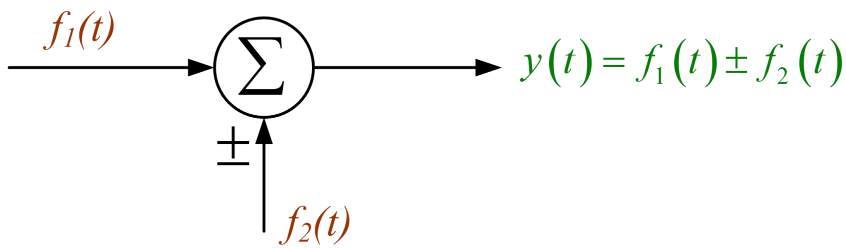


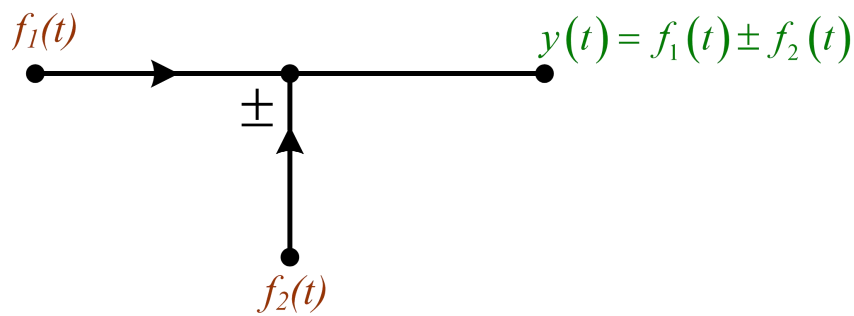
$$i(t) = C\frac{de(t)}{dt} = Cpe(t)$$

$$e(t) = \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} i(\tau)\,d\tau = \frac{1}{Cp}i(t)$$



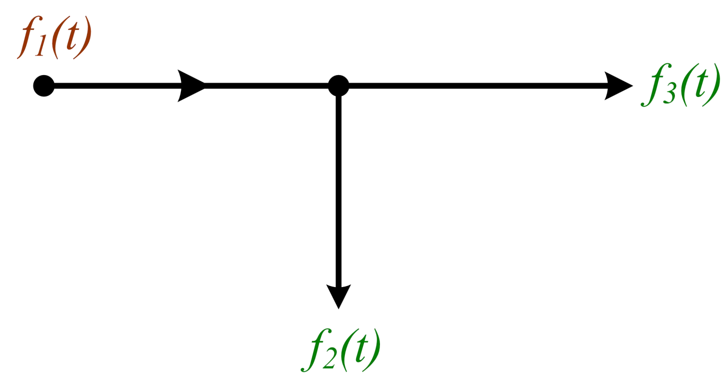
(4) 求和 $y(t)=f_1(t)\pm f_2(t)$



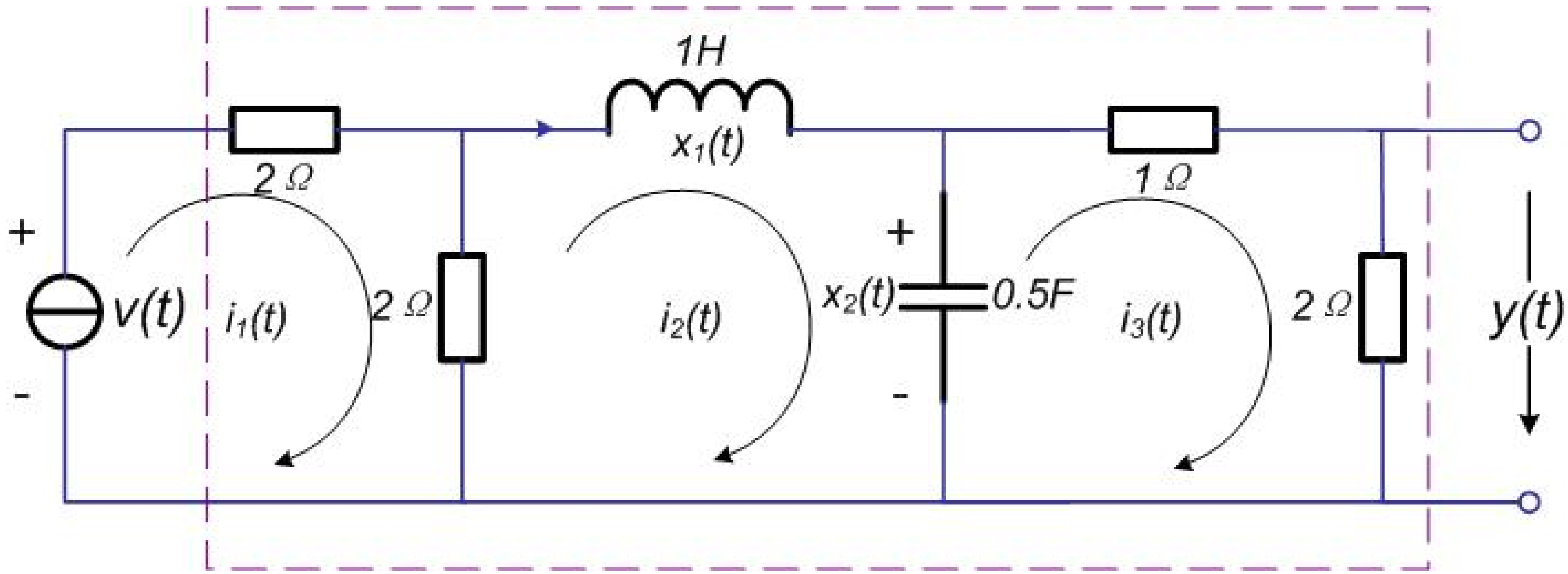


(5) 分支

$$f_1(t)=f_2(t)=f_3(t)$$



- 模型2：LTI 连续时间系统的状态空间模型
- 例1. $x_1(t)$为电感上的电流，$x_2(t)$为电容上的电压



- 问题：(1) $y(t) \sim v(t)$； (2) $x_1(t)$、$x_2(t) \sim v(t)$

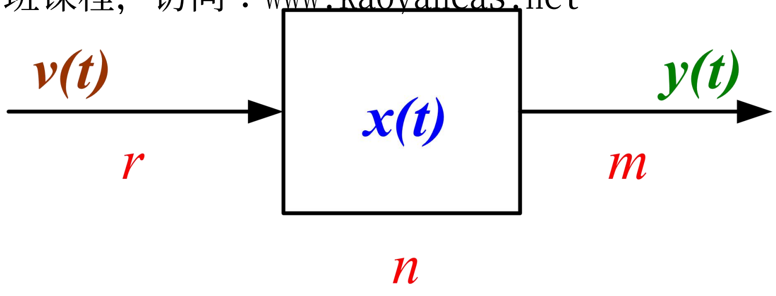
- **解：列出电压、电流方程**

$$
\begin{cases}
v(t)=4i_1(t)-2i_2(t), & \text{回路1电压} \\
\dot{x}_1(t)+x_2(t)+2\left[i_2(t)-i_1(t)\right]=0, & \text{回路2电压} \\
x_2(t)-3i_3(t)=0, & \text{回路3电压} \\
x_1(t)=i_2(t), & \text{电感状态} \\
\dfrac{1}{2}\dot{x}_2(t)=i_2(t)-i_3(t), & \text{电容状态} \\
y(t)=2i_3(t), & \text{输出电压}
\end{cases}
$$

消去i_1、i_2、i_3，得状态方程、输出方程。

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 2 & -\frac{2}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \end{bmatrix} v(t) \cdots\cdots \text{状态方程} \\ y(t) = \begin{bmatrix} 0 & \frac{2}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + 0 \times v(t) \quad \cdots\cdots\cdots \text{观测方程} \\ \text{（输出方程）} \end{cases}$$

• 状态空间模型的一般形式



输入向量

$$\boldsymbol{v}(\boldsymbol{t}) = \begin{bmatrix} v_1(t) \\ \vdots \\ \vdots \\ v_r(t) \end{bmatrix} \in L_r^2[t_0, t_\alpha]$$

输出向量

$$\boldsymbol{y}(\boldsymbol{t}) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ \vdots \\ \vdots \\ y_m(t) \end{bmatrix} \in L_m^2[t_0, t_\alpha]$$

状态向量

$$\boldsymbol{x}(\boldsymbol{t}) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix} \in L_n^2[t_0, t_\alpha]$$

状态向量

$$\dot{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{t}) = \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \vdots \\ \vdots \\ \dot{x}_n(t) \end{bmatrix} \in L_n^2[t_0, t_\alpha]$$

- $$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{t}) = A_{n\times n}\boldsymbol{x}(\boldsymbol{t}) + B_{n\times r}\boldsymbol{v}(\boldsymbol{t}) \cdots\cdots & \text{状态方程} \\ \boldsymbol{y}(\boldsymbol{t}) = C_{m\times n}\boldsymbol{x}(\boldsymbol{t}) + D_{m\times r}\boldsymbol{v}(\boldsymbol{t}) \cdots\cdots & \text{观测方程} \end{cases}$$

$$\boldsymbol{v}(\boldsymbol{t}) \in L_r^2[t_0, t_\alpha],\ \boldsymbol{x}(\boldsymbol{t}) \in L_n^2[t_0, t_\alpha],\ \boldsymbol{y}(\boldsymbol{t}) \in L_m^2[t_0, t_\alpha]$$

状态的零输入响应　　状态的零状态响应

- **解：**
$$\begin{cases} \boldsymbol{x}(\boldsymbol{t}) = e^{At}\boldsymbol{x_0} + \int_0^t e^{A(t-\tau)}B\boldsymbol{v}(\tau)d\tau \\ \boldsymbol{y}(\boldsymbol{t}) = Ce^{At}\boldsymbol{x_0} + \int_0^t \left[Ce^{A(t-\tau)}B + D\delta(t-\tau)\right]\boldsymbol{v}(\tau)d\tau \end{cases}$$

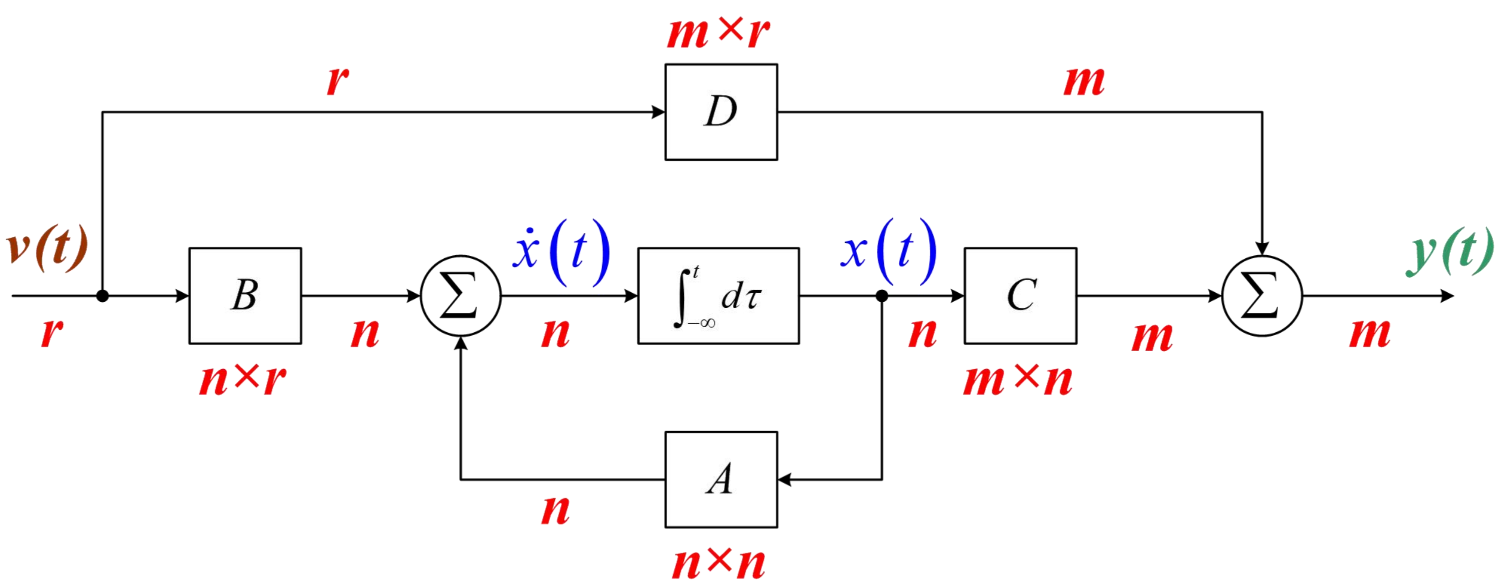
输出的零输入响应　　输出的零状态响应

其中：$\boldsymbol{x}(\boldsymbol{t})\big|_{t=0} = \boldsymbol{x_0}$

$\boldsymbol{v}(\boldsymbol{t}) = \boldsymbol{v}(\boldsymbol{t})u(t)$为因果信号。$\boldsymbol{e}^{At}$为矩阵指数函数：

$$\boldsymbol{e}^{At} = \boldsymbol{I} + \boldsymbol{At} + \frac{1}{2!}\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{t}^2 + \cdots\cdots = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\boldsymbol{A}^k\boldsymbol{x}^k$$

系统的状态空间模型：



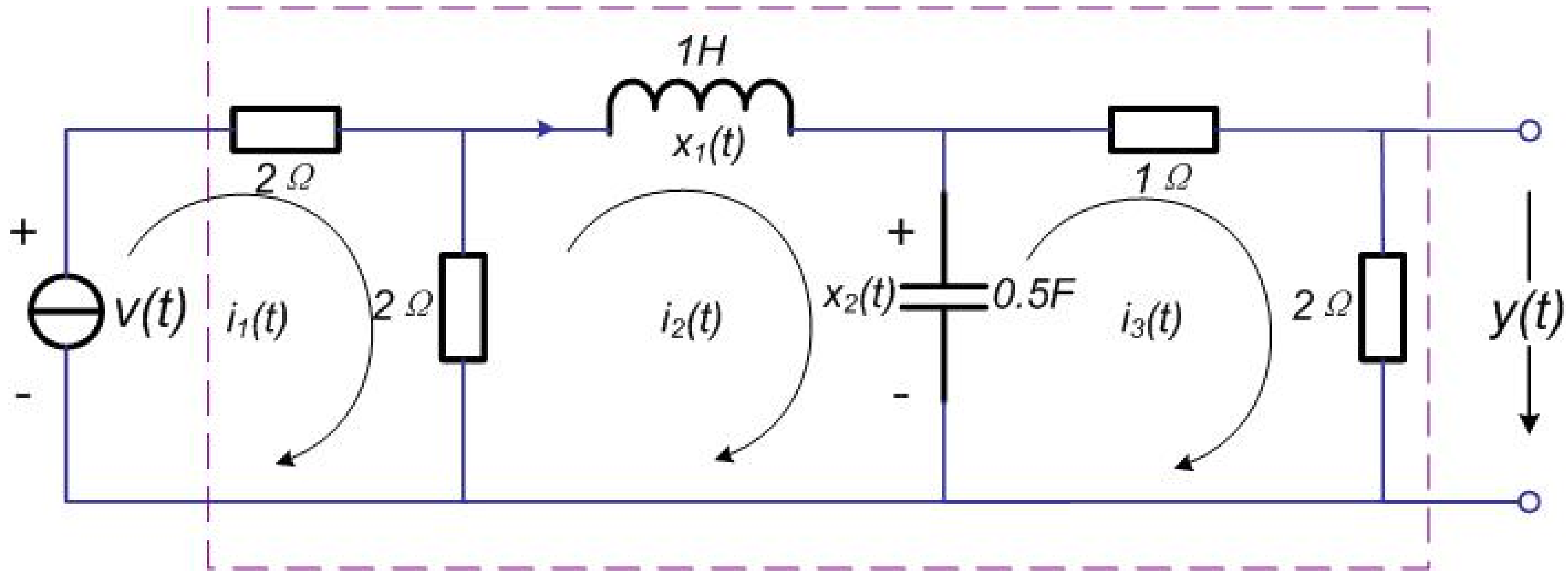
$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A_{n\times n}x(t) + B_{n\times r}v(t) \cdots\cdots\cdots\cdots \text{状态方程} \\ y(t) = C_{m\times n}x(t) + D_{m\times r}v(t) \cdots\cdots\cdots\cdots \text{观测方程} \end{cases}$$

若 $r=1$、$m=1$，则成为单输入单输出（SISO）系统。

- 状态：能够完全表征系统时域动力学行为的一组最小的内部变量组。
- 状态的维数
  dim $\boldsymbol{x}(t)$ = 系统中独立储能元件的个数
- 状态的选择不唯一
  - 电容串联或电感并联则不独立；
  - 独立储能元件个数：把电压源断路、电流源短路，串并联仍不能简化的储能元件的个数。

前例系统：

系统状态的维数 $\dim x(t) = 2$



- 模型3：LTI 系统的微分方程模型

有 n 个独立储能元件的单输入单输出（SISO）系统，列微分方程：

$$y^{(n)}(t)+a_{n-1}y^{(n-1)}(t)+\ldots+a_1y^{(1)}(t)+a_0y^{(0)}(t)$$

$$=b_mv^{(m)}(t)+b_{m-1}v^{(m-1)}(t)+\ldots+b_1v^{(1)}(t)+b_0v^{(0)}(t)$$

已知：$v(t)$；$y(0),\ldots,y^{(n-1)}(0)$，系统在$t\in[0,\infty)$上因果

求：$y(t)=?$

由系统的状态向量 $\mathbb{X}(\boldsymbol{0})=[x_1(0),\ldots,x_n(0)]^T$ 可推得其输出初值 $\mathbb{Y}(\boldsymbol{0})=\left[y(0),\cdots,y^{(n-1)}(0)\right]^T$，二者是线性关系。

- **模型4：LTI 系统的系统算子模型**

令： $p=\dfrac{d}{dt},\dots,p^n=\dfrac{d^n}{dt^n}$，则系统的微分方程化为：

$$\left[p^n+a_{n-1}p^{n-1}+\dots+a_1p+a_0\right]y(t)=\left[b_mp^m+\dots+b_1p+b_0\right]v(t)$$

令： $D(p)\triangleq p^n+a_{n-1}p^{n-1}+\dots+a_1p+a_0$

$N(p)\triangleq b_mp^m+\dots+b_1p+b_0$

有：$y(t)=\dfrac{N(p)}{D(p)}v(t)\triangleq H(p)v(t)$，称为算子方程。

其中，$H(p)=\dfrac{N(p)}{D(p)}$为系统算子。

• LTI 系统方程求解

算子方程为：

$$\left[p^n + a_{n-1}p^{n-1} + \ldots + a_1 p + a_0\right]y(t) = \left[b_m p^m + \ldots + b_1 p + b_0\right]v(t)$$

完全解 = 齐次解 + 特解

齐次解：等号右边各项均为零的齐次方程的解。

(1)当有n个不同特征根α_i时，$y_h(t) = \sum_{i=1}^{n} A_i e^{\alpha_i t}$，$A_i$待定。

(2)当有一个k重根α_1时，它对应的解是：$y_1 = \left(\sum_{i=1}^{k} A_i t^{k-i}\right)e^{\alpha_1 t}$

特解：将$v(t)$代入右端，选取特解形式，求待定系数，即可得到特解$y_p(t)$。

注：

1. $D(p)$与$N(p)$的公因式不可相消，即不可零极相消。

2. $\dfrac{1}{p}$与 p 一般不可交换。

3. 对于不同的物理系统，其输入-输出方程可能相同。

4. 对$H(p)$进行因式分解，其基本单元为：

$$\frac{1}{p+\alpha}v(t) \overset{\text{零状态}}{=} \int_0^t e^{-\alpha(t-\tau)}v(\tau)d\tau = e^{-\alpha t} * v(t)$$

证明：两边施以$p+\alpha$算子，即可得证。

§2.2 LTI系统的响应

- **1. 关于系统响应的若干概念**

$$y^{(n)}(t)+a_{n-1}y^{(n-1)}(t)+\cdots+a_1y^{(1)}(t)+a_0y(t)$$
$$=b_mv^{(m)}(t)+\cdots+b_1v^{(1)}(t)+b_0v(t)$$

- 讨论$[0,+\infty)$时间内的系统输出
- 起始状态（0_-状态）：$\left[y(0_-),\ldots,y^{(n-1)}(0_-)\right]^T$ 或$\mathbb{Y}(0_-)$
- 初始状态（0_+状态）：$\left[y(0_+),\ldots,y^{(n-1)}(0_+)\right]^T$ 或$\mathbb{Y}(0_+)$
- 一般地：$\mathbb{Y}(0_+)\neq\mathbb{Y}(0_-)$

关于零输入与零状态的讨论：

–零输入响应 $y_{zi}(t)$：

$v(t)\equiv 0$，由非零起始状态 $\mathbb{Y}(0_-)\neq 0$所产生的响应

–零状态响应 $y_{zs}(t)$：

系统储能 $\mathbb{Y}(0_-)=0$，由$v(t)=v(t)u(t)$产生的响应

–对于零输入，$\mathbb{Y}(0_+)=\mathbb{Y}(0_-)$，

储能元件的演化是连续的

–对于零状态，$\mathbb{Y}(0_+)\neq\mathbb{Y}(0_-)=0$

当有信号加入时，系统储能发生了跳变！

Q：电容上电压、电感上电流何时能发生跳变？

- **2. 求解零输入响应 $y_{zi}(t)$**

$$D(p)y(t)=0$$

$$\Updownarrow$$

$$y^{(n)}(t)+a_{n-1}y^{(n-1)}(t)+\cdots+a_1y^{(1)}(t)+a_0y(t)=0$$

– 互异特征根 $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$ （无重根）

$$y_{zi}(t)=\sum_{i=1}^{n}A_ie^{\alpha_it}u(t)\Big|_{\mathbb{Y}(0_+)=\mathbb{Y}(0_-)}$$

– k 重根，该根所对应的响应有k项，参阅教材。

- **3. 求解零状态响应** $y_{zs}(t)$

$$\mathbb{Y}(0_-)=0,\quad v(t)=v(t)u(t)\neq 0,\quad D(p)y(t)=N(p)v(t)$$

$$y_{zs}(t)=\frac{N(p)}{D(p)}v(t)\triangleq H(p)v(t)=\frac{N(p)}{\prod_{i=1}^{n}(p-\alpha_i)}v(t)$$

$$=N(p)[e^{\alpha_n t}*\cdots*e^{\alpha_1 t}*v(t)] \qquad (*)$$

其中，α_i互异；

$$y_{zs}(t)=\text{齐次解项}\sum_{i=1}^{n}A_i e^{\alpha_i t}+\text{特解项}\ B(t)$$

结论：系统响应 $y(t)=y_{zi}(t)+y_{zs}(t)$

- **4. 系统响应 = 自由响应 + 强迫响应**

$$y(t)=\text{零输入响应}\,y_{zi}(t)+\text{零状态响应}\,y_{zs}(t)$$

$$=\underbrace{\text{齐次解}\sum_{i=1}^{n}A_i e^{\alpha_i t}}_{\text{自由响应}}+\underbrace{\text{特解}B(t)}_{\text{强迫响应}}\Big|_{\text{带入}\ y(0_+)\neq y(0_-)=0}$$

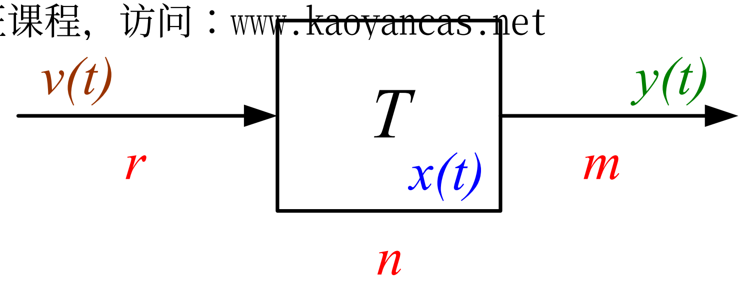
$$y_{zi}(t)=\sum_{k}A_{zik}e^{\alpha_k t}，\ A_{zik}\text{由}\,\mathbb{Y}(0_-)=\mathbb{Y}(0_+)\text{代入求得；}$$

$$y_{zs}(t)=\left\{\text{齐次解}\sum_{k}A_{zsk}e^{\alpha_k t}+\text{特解}B(t)\right\},$$

注意：$y_{zs}(t)$中的齐次解与$y_{zi}(t)$构成自由响应；

A_{zsk}由 $\mathbb{Y}(0_+)$代入 $y_{zs}(t)$ 式求得。

• 5. 非零状态线性系统



– 定义（非零状态线性系统）：

对T，若：$\begin{cases}\{x_1(0_-),\ v_1(t)\}\Rightarrow\{x_1(t),\ y_1(t)\}\\ \{x_2(0_-),\ v_2(t)\}\Rightarrow\{x_2(t),\ y_2(t)\}\end{cases}$

有：$\alpha\{x_1(0_-),\ v_1(t)\}+\beta\{x_2(0_-),\ v_2(t)\}$

$\Rightarrow\alpha\{x_1(t),\ y_1(t)\}+\beta\{x_2(t),\ y_2(t)\}$

则称T为非零状态线性系统。

– 推论：线性系统响应 = 零状态响应 + 零输入响应

– 说明：

$$\{x_1(t),y_1(t)\}+\{x_2(t),y_2(t)\}$$

$$\{x(0_-),v(t)\}=\{\boldsymbol{0}_n+x(0_-);\ v(t)+\boldsymbol{0}_r\}=\{\boldsymbol{0}_n,v(t)\}+\{x(0_-),\boldsymbol{0}_r\}$$

非零状态线性系统 ⇔ 零状态线性系统 + 零输入线性系统

复习提示：

- 抽一段不间断时间（大约 2~4 小时），安静地把教材 2.3—2.4 共10页详细研读两遍、三遍、四遍、……，直到四个例题独立完成，达到对所涉及的概念完全深入理解的程度。
- 上册，pp48-57
- 例2-9、2-10可巩固冲激函数匹配法求0+
- 订正… …

§ 2.3 LTI系统的冲激响应与阶跃响应

- 冲激响应 $h(t)$：输入为单位冲激函数时的零状态响应。

$$h(t)=T\delta(t)$$

- 阶跃响应 $y_s(t)$：输入为单位阶跃函数时的零状态响应。

$$y_s(t)=Tu(t)$$

$$y_s(t)=\mathrm{T}u(t)=\mathrm{T}\frac{1}{\mathrm{p}}\delta(t)\overset{零状态}{=}\frac{1}{\mathrm{p}}\mathrm{T}\delta(t)=\int_{-\infty}^{t}h(\tau)\mathrm{d}\tau$$

$$h(t)=\mathrm{T}\delta(t)=\mathrm{Tp}u(t)\overset{零输入}{=}\mathrm{pT}u(t)=\mathrm{p}y_s(t)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}y_s(t)$$

- **解算子方程求 $h(t)$：**

$$y_{zs}(t)=H(p)v(t)=\frac{N(p)}{D(p)}v(t),\quad v(t)=\delta(t),\quad h(t)=\frac{N(p)}{D(p)}\delta(t)$$

$$\text{degree } N(p)=\text{degree } D(p)+q,\quad q\geq 0$$

真分式

$$\therefore\ H(p)=\frac{N(p)}{D(p)}=\beta_q p^q+\beta_{q-}p^{q-1}+\ldots+\beta_1 p+\beta_0+\frac{E(p)}{D(p)}$$

$$=\sum_{i=0}^{q}\beta_i p^i+\sum_{j=1}^{n}\frac{b_j}{p-\alpha_j}$$，上式中 $D(p)=\prod_{j=1}^{n}(p-\alpha_j)$

$$\therefore\ h(t)=H(p)\delta(t)=\sum_{i=0}^{q}\beta_i p^i\delta^{(i)}(t)+\sum_{j=1}^{n}b_j e^{\alpha_j t}u(t)$$

§2.4 卷积

- 对任意两个信号$f_1(t)$、$f_2(t)$，两者的卷积运算定义为：

$$f_1(t)*f_2(t)\triangleq\int_{-\infty}^{\infty}f_1(\tau)f_2(t-\tau)d\tau$$

- 性质
  - 代数性质
  - 拓扑性质

设 $\forall f(t)$、$g(t)$、$h(t)\in L^1(\Omega)$

定义：$L^1(\Omega)$，是绝对可积函数的集合。

卷积的性质：

- 代数性质（课后可自行推导）
  - $f(t)*g(t)=g(t)*f(t)$ （可交换性）
  - $f(t)*\{g(t)*h(t)\}=\{f(t)*g(t)\}*h(t)$ （可结合性）
  - $\{\alpha f(t)+\beta g(t)\}*h(t)=\alpha f(t)*h(t)+\beta g(t)*h(t)$ （线性）
  - 定义： $\|f(t)\|_1=\int_\Omega |f(t)|dt$ 为$f(t)$的L_1范数

    有 $\|f(t)*g(t)\|_1\le\|f(t)\|_1\|g(t)\|_1$ （应习惯于这种推倒）
  - $f(t)*\delta(t)=f(t)$
  - $\int_\Omega |\delta(t)|dt=\int_\Omega \delta(t)dt=1,$ （既非黎曼积分，也非勒贝格积分）

- 拓扑性质（课后可自行推导）

- 微分：$\frac{d}{dt}[f(t)*g(t)]=[\frac{d}{dt}f(t)]*g(t)=f(t)*[\frac{d}{dt}g(t)]$

- 积分：$\int_{-\infty}^{t}[f(\lambda)*g(\lambda)]d\lambda=f(t)*[\int_{-\infty}^{t}g(\lambda)d\lambda]$

$$=[\int_{-\infty}^{t}f(\lambda)d\lambda]*g(t)$$

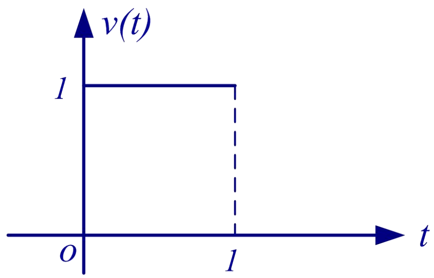
- 与冲激偶卷积：$f(t)*\delta'(t)=f'(t)$

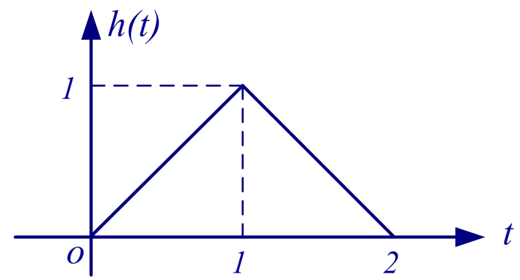
$$f(t)*\delta^{(n)}(t)=f^{(n)}(t)$$

- 与阶跃函数卷积：$f(t)*u(t)=\int_{-\infty}^{\infty}f(\tau)u(t-\tau)d\tau$

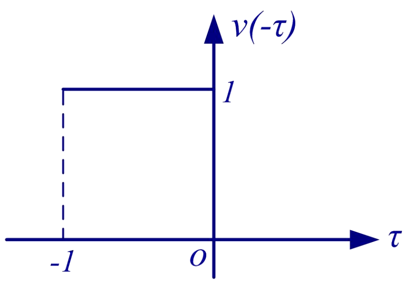
$$=\int_{-\infty}^{t}f(\tau)d\tau=\frac{1}{p}f(t)$$

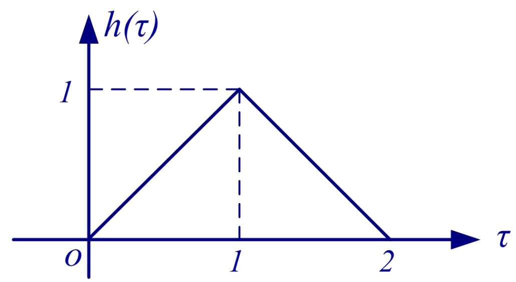
卷积例子：

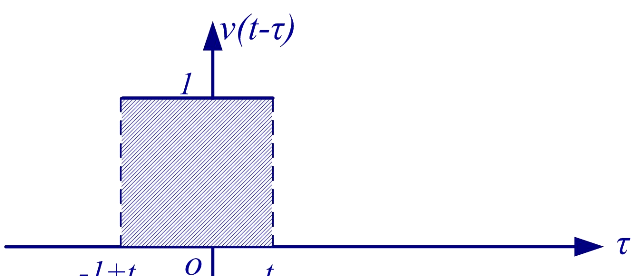


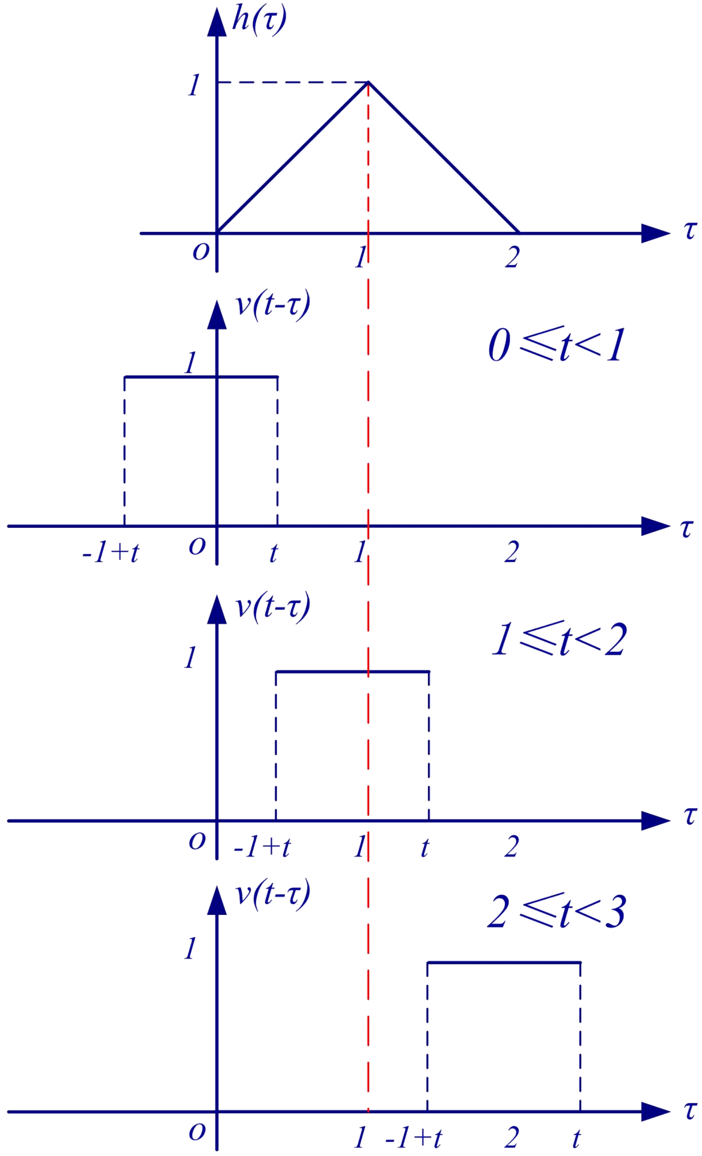


$$y(t)=v(t)*h(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}h(\tau)v(t-\tau)\,d\tau$$









$$y(t)=\begin{cases}\frac{1}{2}t^2 & ,\ 0\le t<1\\ -\left(t-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{3}{4} & ,\ 1\le t<2\\ \frac{1}{2}(\text{t-3})^2 & ,\ 2\le t<3\\ 0 & ,\ \text{其它}\end{cases}$$

（请研究书图2-14卷积图解例子）

End of Chapter 2

Thx~ 4 Ur Attention.

A Bow here ……