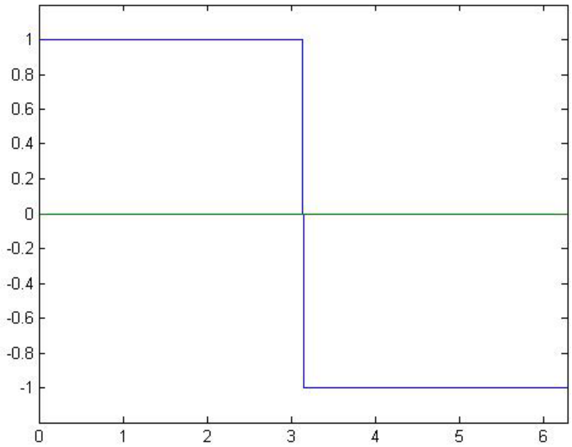
6-1 解题过程：

图 6-5 所示的矩形波如解图所示，它表示为

$$f(t)=\begin{cases}+1 & (0<t<\pi)\\ -1 & (\pi<t<2\pi)\end{cases}$$



在$[0,2\pi]$内

$$\begin{aligned}&\int_0^{2\pi} f(t)\cos(nt)dt\\&=\int_0^{\pi}\cos(nt)dt+\int_0^{\pi}[-\cos(nt)]dt\\&=\frac{1}{n}\sin(nt)\Big|_0^{\pi}-\frac{1}{n}\sin(nt)\Big|_{\pi}^{2\pi}\\&=0\qquad (n=1,2,3\cdots)\end{aligned}$$

故有 $f(t)$ 与信号 $\cos t,\cos(2t),\cdots,\cos(nt)$ 正交（n 为整数）。

6-2 解题过程：

在区间$(0,2\pi)$内，有

$$\begin{aligned}&\int_0^{2\pi}\cos(n_1t)\cos(n_2t)dt\qquad (n_1\neq n_2，且n_1n_2均为不为零的整数)\\&=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}[\cos(n_1+n_2)t+\cos(n_1-n_2)t]dt\\&=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n_1+n_2}\sin(n_1+n_2)t\Big|_0^{2\pi}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n_1-n_2}\sin(n_1-n_2)t\Big|_0^{2\pi}\\&=0\end{aligned}$$

$$\int_0^{2\pi}cos^2(nt)dt=\int_0^{2\pi}\frac{1+\cos(2nt)}{2}dt=\int_0^{2\pi}\frac{1}{2}dt+\int_0^{2\pi}\frac{\cos(2nt)}{2}dt=\pi$$

满足正交函数集的条件，故$\cos t,\cos(2t),\cdots,\cos(nt)$ 正交（n 为整数）是区间$(0,2\pi)$

中的正交函数集。

6-3 解题过程：

在区间$\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$内

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos(n_1t)\cos(n_2t)dt \qquad (n_1\neq n_2\text{，且}n_1n_2\text{均为不为零的整数})$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[\cos(n_1+n_2)t+\cos(n_1-n_2)t\right]dt$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n_1+n_2}\sin(n_1+n_2)t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n_1-n_2}\sin(n_1-n_2)t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n_1+n_2}\sin\left[\frac{\pi(n_1+n_2)}{2}\right]+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n_1-n_2}\sin\left[\frac{\pi(n_1-n_2)}{2}\right]$$

只有当(n_1+n_2)和(n_1-n_2)均为偶数时上式为零，因此不满足函数之间的正交性条件，$\cos t,\cos(2t),\cdots,\cos(nt)$正交（$n$为整数）不是区间$\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$中的正交函数集。

6-4 解题过程：

在区间$(0,1)$内，有

$$\int_0^1 x_ix_jdx \qquad (i\neq j\text{，}i,j\in\{0,1,2,3\})$$

$$=\int_0^1 x^{i+j}dx=\frac{x^{i+j+1}}{i+j+1}\Big|_0^1=\frac{1}{i+j+1}\neq 0$$

不满足正交函数集所要求的第一个条件，故$1,x,x^2,x^3$不是区间$(0,1)$上的正交函数集。

6-5 解题过程：

由题 6-2 结论有$\cos t,\cos(2t),\cdots,\cos(nt)$正交（$n$为整数）是区间$(0,2\pi)$内的正交函数集。以下考察其完备性。

取$x(t)=\sin t$，在区间$(0,2\pi)$内有

$$\int_0^{2\pi}\sin^2 tdt=\int_0^{2\pi}\frac{1-\cos(2t)}{2}dt$$
$$=\pi<\infty$$

且有

$$\int_0^{2\pi}\sin t\cos(nt)\,dt=\int_0^{2\pi}\frac{\sin\left[(n+1)t\right]+\sin\left[(1-n)t\right]}{2}dt$$
$$=-\frac{1}{2}\left[\frac{\cos(n+1)t}{n+1}+\frac{\cos(1-n)t}{1-n}\right]\Bigg|_0^{2\pi}$$
$$=0$$

不符合完备正交函数集的定义，故 $\cos t,\cos(2t),\cdots,\cos(nt)$ 正交（n 为整数）不是区间 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 内的完备正交函数集。

6-9 解题过程：

令 $e^t\approx at^2+bt+c$，则均方误差

$$\overline{\varepsilon^2}=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\left[e^t-at^2+bt+c\right]^2dt$$

$$\frac{\partial\overline{\varepsilon^2}}{\partial a}=\frac{\partial}{\partial a}\left\{\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\left[e^t-at^2+bt+c\right]^2dt\right\}=0$$

$$\int_{-1}^{1}\left(2at^4-2t^2e^t+2bt^3+2ct^2\right)dt=0$$

$$\frac{4}{5}a+\frac{4}{3}c=2e-10e^{-1} \qquad (1)$$

$$\frac{\partial\overline{\varepsilon^2}}{\partial b}=\frac{\partial}{\partial b}\left\{\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\left[e^t-at^2+bt+c\right]^2dt\right\}=0$$

$$\int_{-1}^{1}\left(2bt^2-2te^t+2at^3+2ct^2\right)dt=0$$

$$\frac{4}{3}b+2c=4e^{-1} \qquad (2)$$

$$\frac{\partial\overline{\varepsilon^2}}{\partial c}=\frac{\partial}{\partial c}\left\{\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\left[e^t-at^2+bt+c\right]^2dt\right\}=0$$

$$\int_{-1}^{1}\left(2c-2e^t+2at^2+2bt\right)dt=0$$

$$4c+\frac{4}{3}a=2e-2e^{-1} \qquad (3)$$

（1）（2）（3）式联立有

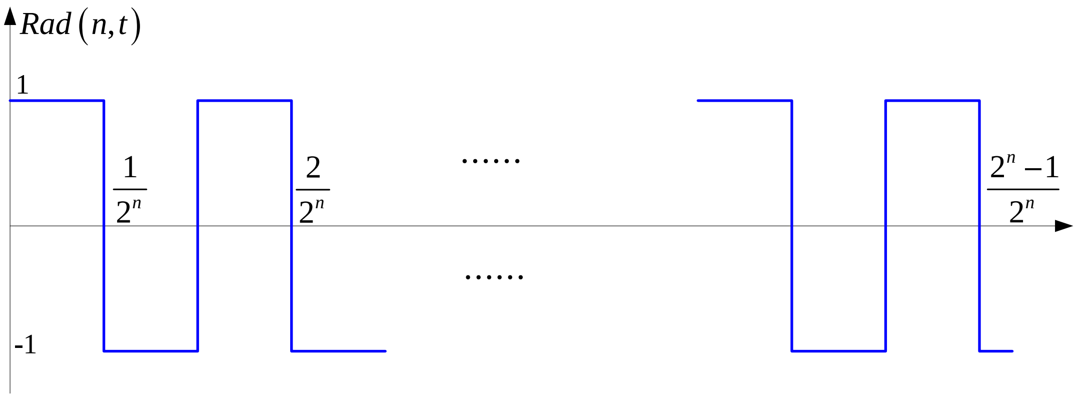
$$\begin{cases} \frac{4}{5}a+\frac{4}{3}c=2e-10e^{-1} \\ \frac{4}{3}b+2c=4e^{-1} \\ 4c+\frac{4}{3}a=2e-2e^{-1} \end{cases} \quad 解得 \quad \begin{cases} a=\frac{15}{4}\left(e-e^{-1}\right) \\ b=3e^{-1} \\ c=\frac{1}{4}\left(-3e+33e^{-1}\right) \end{cases}$$

6-10 解题过程：

取 $x(t)=\cos(2\pi t)$，则 $x(t)$ 满足

$$0<\int_0^1 x^2(t)\,dt<\infty$$

在拉德马赫（Rademacher）函数集中任取一函数 Rad(n,t)，波形如解图



$$\int_0^1 x(t)\,Rad(n,t)\,dt$$

$$=\int_0^{\frac{1}{2^n}}\cos(2\pi t)\,dt-\int_{\frac{1}{2^n}}^{\frac{2}{2^n}}\cos(2\pi t)\,dt+\cdots-\int_{\frac{2^n-1}{2^n}}^{1}\cos(2\pi t)\,dt$$

$$=\frac{1}{2\pi}\left(\sin\frac{\pi}{2^{n-1}}-\sin\frac{2\pi}{2^{n-1}}+\sin\frac{\pi}{2^{n-1}}+\sin\frac{3\pi}{2^{n-1}}-\sin\frac{2\pi}{2^{n-1}}-\cdots+\sin\frac{2^n-1}{2^n}\pi\right)$$

$$=\frac{1}{\pi}\sin\frac{2^{n-1}}{2^{n-1}}\pi=\frac{1}{\pi}\sin\pi=0$$

故存在 $x(t)$ 使 $\int_0^1 x(t)\,Rad(n,t)\,dt$（n 为任意正整数）为 0，拉德马赫函数集不是 $(0,1)$ 上的完备正交函数集。

6-11 解题过程：

当 $f_1(\mathrm{t})=\cos(\omega t)$， $f_2(\mathrm{t})=\sin(\omega t)$ 同时作用于单位电阻时产生的能量

$$E=\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\cos(\omega t)+\sin(\omega t)\right]^2 dt$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\cos^2(\omega t)+2\sin(\omega t)\cos(\omega t)+\sin^2(\omega t)\right]dt$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\left[1+\sin(2\omega t)\right]dt$$

取一个周期$\left(0，T\right)$其中$T=\dfrac{2\pi}{\omega}$，则$\sin\left(2\omega t\right)$在$\left(0，T\right)$内积分为零，有

$$E=\int_0^T\left[1+\sin\left(2\omega t\right)\right]dt=T$$

当$f_1\left(\mathrm{t}\right)$，$f_2\left(\mathrm{t}\right)$分别作用于单位电阻时各自产生的能量为（仍取$\left(0，T\right)$内）

$$E_1=\int_0^T\cos\left(\omega t\right)^2dt=\int_0^T\frac{1+\cos\left(2\omega t\right)}{2}dt=\frac{T}{2}$$

$$E_2=\int_0^T\sin\left(\omega t\right)^2dt=\int_0^T\frac{1-\cos\left(2\omega t\right)}{2}dt=\frac{T}{2}$$

故 $$E_1+E_2=T$$

即两信号同时作用于单位电阻所产生的能量等于$f_1\left(\mathrm{t}\right)$和$f_2\left(\mathrm{t}\right)$分别作用时产生的能量之和。当$f_1\left(\mathrm{t}\right)=\cos\left(\omega t\right)$，$f_2\left(\mathrm{t}\right)=\cos\left(\omega t+45^\circ\right)$时，同时作用时有

$$\begin{aligned}E&=\int_0^T\left[\cos\left(\omega t\right)+\cos\left(\omega t+45^\circ\right)\right]^2dt\\&=\int_0^T\left[2\cos\left(\frac{\omega t+\omega t+45^\circ}{2}\right)\cos\left(\frac{\omega t-\omega t-45^\circ}{2}\right)\right]dt\\&=4\cos^2\frac{\pi}{8}\int_0^T\cos\left(\omega t+\frac{\pi}{8}\right)^2dt\\&=2T\cos^2\frac{\pi}{8}\end{aligned}$$

分开作用时

$$E_1=\int_0^T\cos\left(\omega t\right)^2dt=\int_0^T\frac{1+\cos\left(2\omega t\right)}{2}dt=\frac{T}{2}$$

$$\begin{aligned}E_2&=\int_0^T\cos\left(\omega t+\frac{\pi}{4}\right)^2dt=\int_0^T\frac{1+\cos\left(2\omega t+\frac{\pi}{2}\right)}{2}dt\\&=\int_0^T\frac{1-\sin\left(2\omega t\right)}{2}dt=\frac{T}{2}\end{aligned}$$

$$E_1+E_2\neq E$$

即当$f_1\left(\mathrm{t}\right)=\cos\left(\omega t\right)$，$f_2\left(\mathrm{t}\right)=\cos\left(\omega t+45^\circ\right)$时上述结论不成立，其原因是$\cos\left(\omega t\right)$和$\cos\left(\omega t+45^\circ\right)$相互间不满足正交关系，而$\cos\left(\omega t\right)$和$\sin\left(\omega t\right)$满足正交关系。

6-16 解题过程：

（1）$E=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-2t}u(t)dt=\int_{0}^{+\infty}e^{-2t}dt=\frac{1}{2a}<\infty$

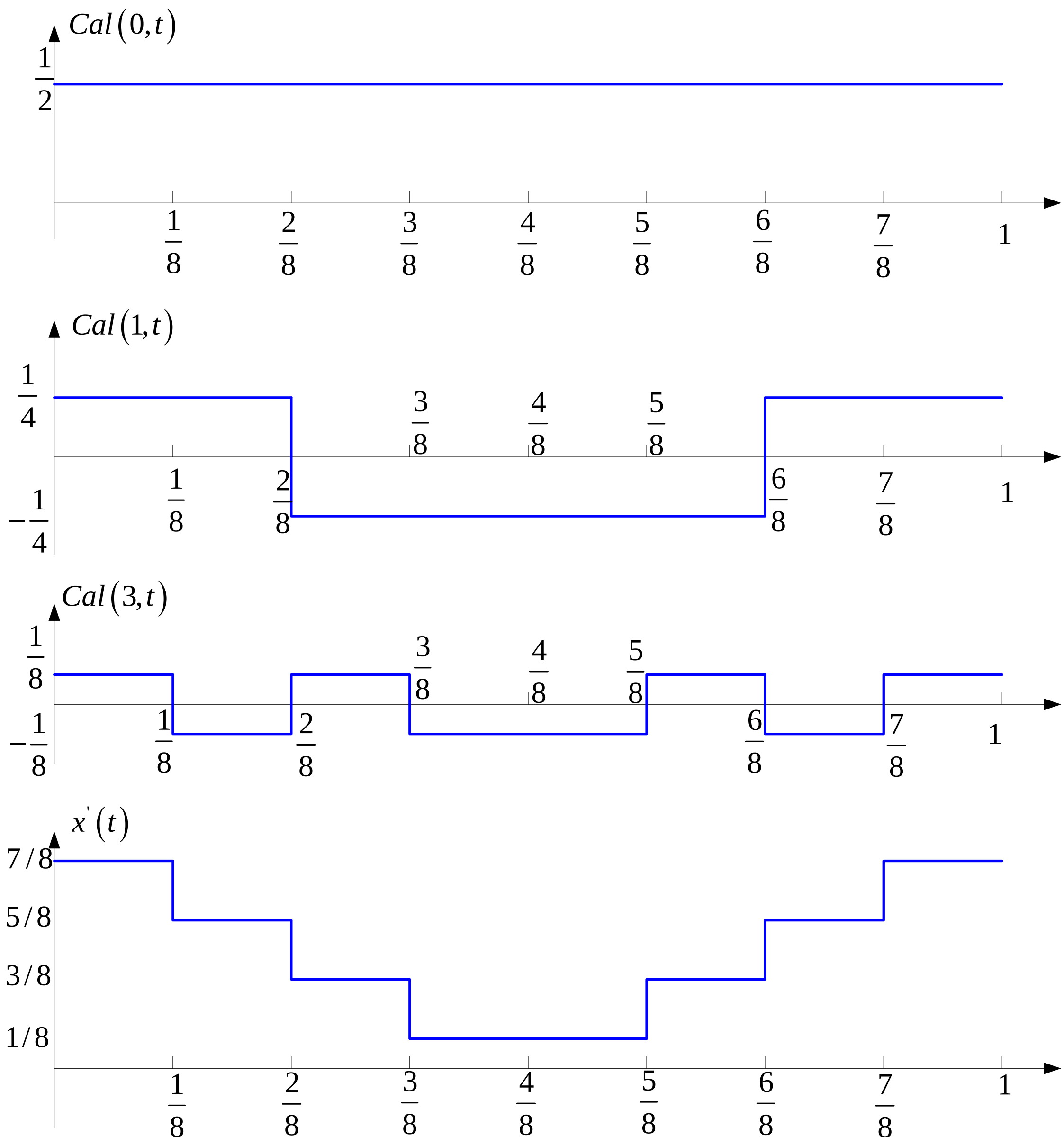
则 $f(t)=e^{-at}u(t)$ 为能量函数。

由 $F(\omega)=\frac{1}{a+j\omega}$ 得

$$\mathscr{F}\left[R(\tau)\right]=\frac{1}{a^2+\omega^2}$$

所以
$$R(\tau)=\mathscr{F}^{-1}\left[\frac{1}{a^2+\omega^2}\right]=\frac{1}{2a}e^{-a|\tau|}$$

（2）对周期余弦函数 $f_1(t)=E\cos\omega_0 t$ 有



$$R_1(\tau)=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f_1(t)\,f_1(t-\tau)\,dt$$
$$=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\left[\int_0^{\frac{T}{2}} f_1(t)\,f_1(t-\tau)\,dt+\int_{-\frac{T}{2}}^{0} f_1(t)\,f_1(t-\tau)\,dt\right]$$
$$=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\left[\int_0^{\frac{T}{2}} f_1(t)\,f_1(t-\tau)\,dt+\int_0^{\frac{T}{2}} f_1(t)\,f_1(t+\tau)\,dt\right]$$
$$=\frac{E^2}{2}\cos\omega_0\tau$$

又 $f(t)=E\cos(\omega_0 t)u(t)=f_1(t)u(t)$

则有

$$R(\tau)=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\,f(t-\tau)\,dt$$
$$=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\,f(t+\tau)\,dt$$
$$=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} f_1(t)\,f_1(t-\tau)\,dt$$
$$=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f_1(t)\,f_1(t+\tau)\,dt$$

所以 $R(\tau)=\frac{1}{2}R_1(\tau)=\frac{E^2}{4}\cos\omega_0\tau$

6-17 解题过程：

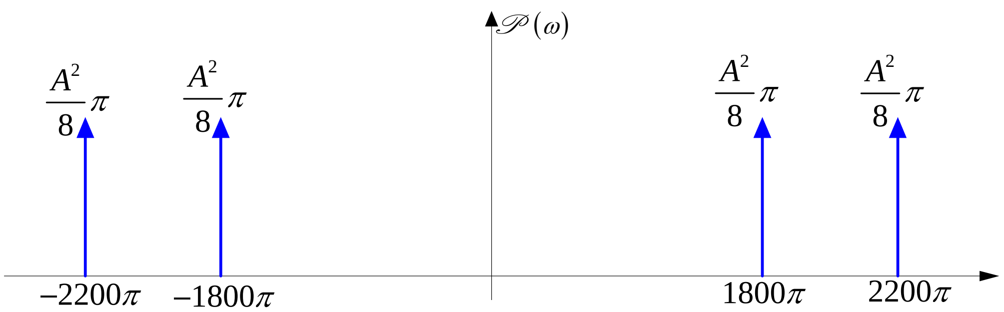
（4） $f(t)=\frac{A}{2}\left[\sin(2200\pi t)-\sin(1800\pi t)\right]$

所以 $P=\frac{A^2}{8}+\frac{A^2}{8}=\frac{A^2}{4}$

功率谱

$$\mathscr{P}(\omega)=\frac{A^2}{8}\pi\left[\delta(\omega+2200\pi)+\delta(\omega-2200\pi)+\delta(\omega+1800\pi)+\delta(\omega-1800\pi)\right]$$

功率谱如图所示



（6） $f(t)=A\cdot\dfrac{1-\cos(400\pi t)}{2}\cos(2000\pi t)$

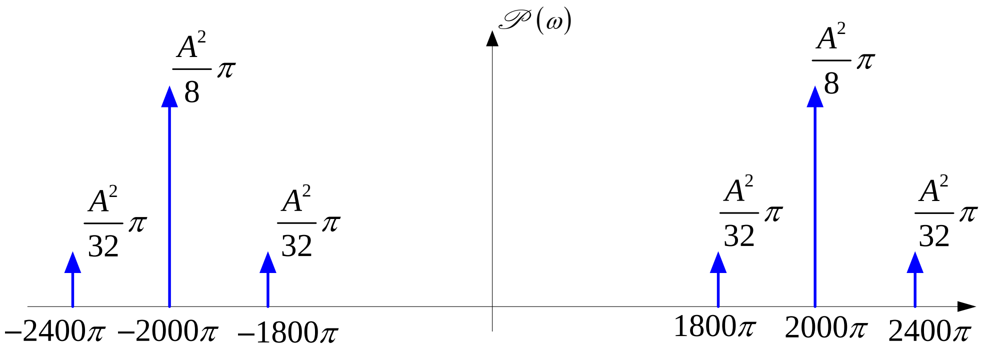
$$=\frac{A}{2}\cos(2000\pi t)-\frac{A}{4}\left[\cos(2400\pi t)+\cos(1600\pi t)\right]$$

所以 $P=\dfrac{A^2}{8}+\dfrac{A^2}{16}=\dfrac{3A^2}{16}$

功率谱

$$\mathscr{P}(\omega)=\frac{A^2}{8}\pi\left[\delta(\omega+2000\pi)+\delta(\omega-2000\pi)\right]+$$
$$\frac{A^2}{32}\pi\left[\delta(\omega+2400\pi)+\delta(\omega-2400\pi)+\delta(\omega+1600\pi)+\delta(\omega-1600\pi)\right]$$

功率谱如图所示



6-21 解题过程：

（1） $r(t)=f(t)*h(t)$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}f(\tau)h(t-\tau)d\tau$$
$$=\int_{-\infty}^{+\infty}f(\tau)s(T+\tau-t)d\tau$$

（2） $t=T$ 时， $r(t)=r(T)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(\tau)s(\tau)d\tau$

（3）由题图 6-21 可知

$$r(T)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(\tau)s(\tau)d\tau$$

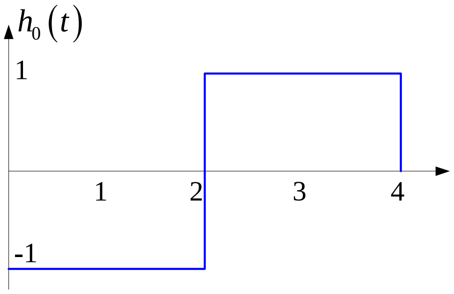
又冲激响应 $h(t)=s(T-t)$ 是信号 $s(t)$ 的匹配滤波器冲激响应，则 $s(t)=0$， $t>T$

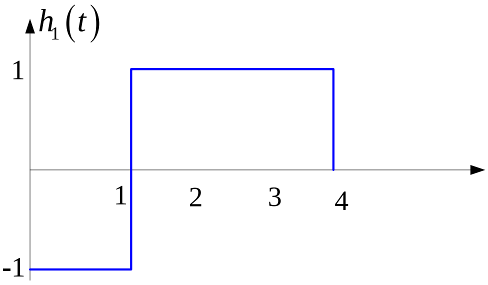
所以第（2）题中

$$r(T)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(\tau)s(\tau)d\tau$$
$$=\int_{-\infty}^{T}f(\tau)s(\tau)d\tau$$

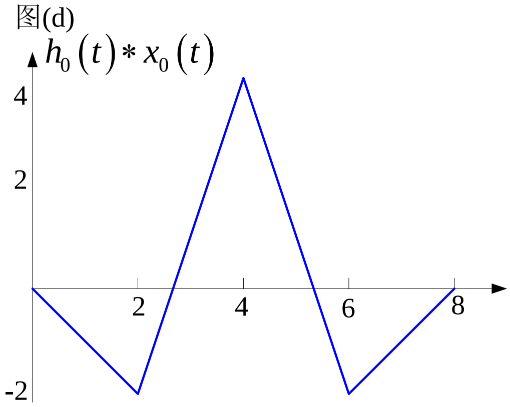
6-22 解题过程：

（1） $h_0(t)=x_0(T-t)$ $h_1(t)=x_1(T-t)$ 波形解如下图

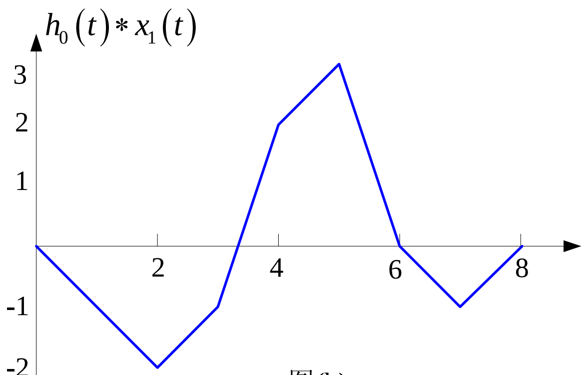




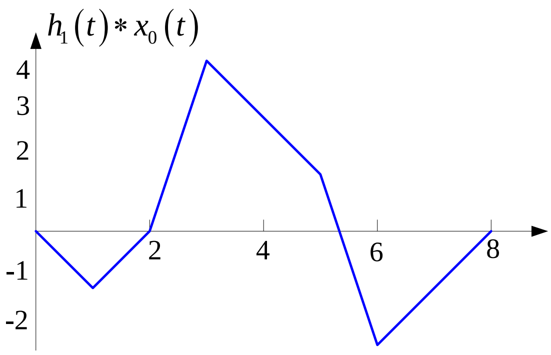
（2） M_0 对 x_0 的响应波形： $h_0(t)*x_0(t)$ 如图(a)； M_0 对 x_1 的响应波形： $h_0(t)*x_1(t)$ 如图(b)； M_1 对 x_0 的响应波形： $h_1(t)*x_0(t)$ 如图(c)； M_1 对 x_1 的响应波形： $h_1(t)*x_1(t)$ 如图(d)



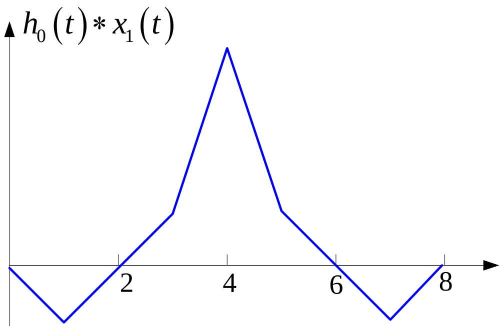
图(a)



图(b)



图(c)



图(d)

（3）由题图可知，M_0 在 $t=4$ 时 $x_0(t)$ 的响应输出为 4，对 $x_1(t)$ 的响应输出为 2；M_1 在 $t=4$ 时对 $x_0(t)$ 的响应输出为 2，对 $x_1(t)$ 的输出响应为 4。若使 $x_0(t)$ 与 $x_1(t)$ 正交，将 $x_0(t)$ 改为如下图(a)，则 M_0 为下图(b)所示。此时 M_0 为 $x_1(t)$ 的响应输出如下图(c)所示， M_1 为 $x_0(t)$ 的输出如下图(d)。在 $t=4$ 时， M_0 对 $x_1(t)$ 和 M_1 对 $x_0(t)$ 的响应为零。

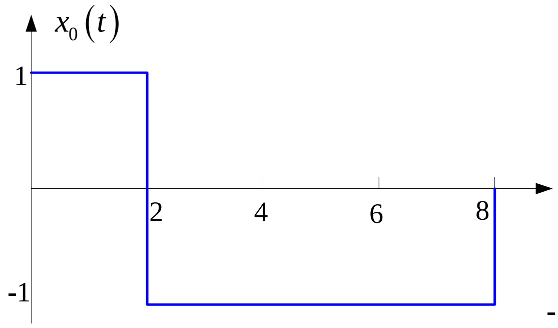


图 (a)

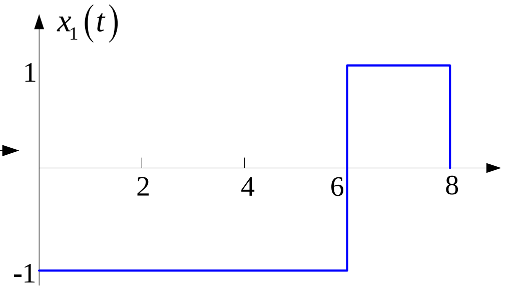


图 (b)

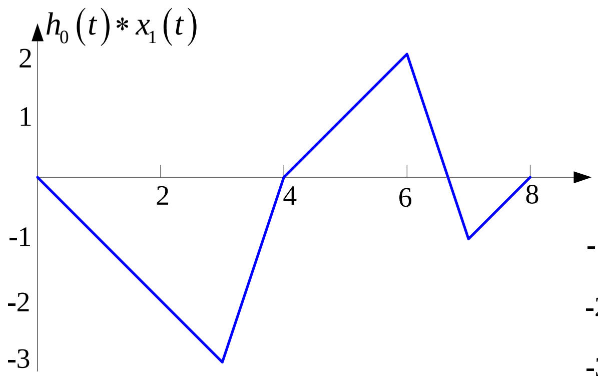


图 (c)

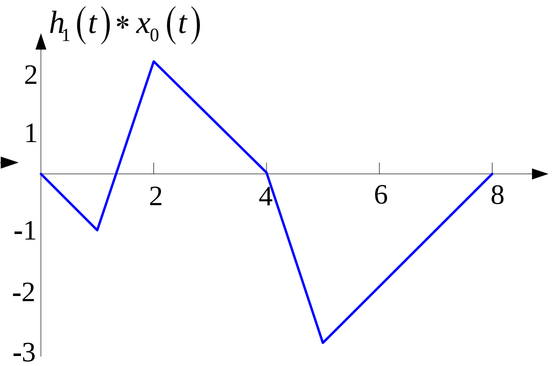


图 (d)