2-6 解题过程：

（1）$e(t)=u(t)$，$r(0_-)=1$，$r'(0_-)=2$

方法一：经典时域法：

①求 r_{Zi}：由已知条件，有 $\begin{cases} r_{Zi}''(t)+3r_{Zi}'(t)+2r_{Zi}(t)=0 \\ r_{Zi}'(0_+)=r_{Zi}'(0_-)=2 \\ r_{Zi}'(0_+)=r_{Zi}'(0_-)=1 \end{cases}$

特征方程：$\alpha^2+3\alpha+2=0$ 特征根为：$\alpha_1=-1$，$\alpha_2=-2$

故 $r_{Zi}(t)=\left(A_1e^{-t}+A_2e^{-2t}\right)u(t)$，代入 $r_{Zi}'(0_+)$，$r_{Zi}(0_+)$ 得 $A_1=4$，$A_2=-3$

故 $r_{Zi}(t)=\left(4e^{-t}-3e^{-2t}\right)u(t)$

②求 r_{Zs}： 将 $e(t)=u(t)$ 代入原方程，有 $r_{Zs}''(t)+3r_{Zs}'(t)+2r_{Zs}(t)=\delta(t)+3u(t)$

用冲激函数匹配法，设 $\begin{cases} r_{Zs}''(t)=a\delta(t)+b\Delta u(t) \\ r_{Zs}'(t)=a\Delta u(t) \\ r_{Zs}(t)=at\Delta u(t) \end{cases}$

代入微分方程，平衡 $\delta(t)$ 两边的系数得 $a=1$

故 $r_{Zs}'(0_+)=r_{Zs}'(0_-)+1=1$，$r_{Zs}(0_+)=r_{Zs}(0_-)=0$

再用经典法求 $r_{Zs}(t)$：齐次解 $r_{Zsh}(t)=\left(B_1e^{-t}+B_2e^{-2t}\right)u(t)$

因为 $e(t)=u(t)$ 故设特解为 $r_{Zsp}(t)=C\cdot u(t)$，代入原方程得 $C=\dfrac{3}{2}$

故 $r_{Zs}(t)=r_{Zsh}(t)+r_{Zsp}(t)=\left(B_1e^{-t}+B_2e^{-2t}+\dfrac{3}{2}\right)u(t)$

代入 $r_{Zs}'(0_+)$，$r_{Zs}(0_+)$ 得 $B_1=-2$，$B_2=\dfrac{1}{2}$

故 $r_{Zs}(t)=\left(-2e^{-t}+\dfrac{1}{2}e^{-2t}+\dfrac{3}{2}\right)u(t)$

③全响应：$r(t)=r_{Zi}(t)+r_{Zs}(t)=\left(2e^{-t}-\dfrac{5}{2}e^{-2t}+\dfrac{3}{2}\right)u(t)$

自由响应：$\left(2e^{-t}-\dfrac{5}{2}e^{-2t}\right)u(t)$

受迫响应：$\frac{3}{2}u(t)$

方法二：p 算子法

$$\frac{d^2}{dt^2}r(t)+3\frac{d}{dt}r(t)+2r(t)=\frac{d}{dt}e(t)+3e(t)$$

化为算子形式为：$\left(p^2+3p+2\right)r(t)=(p+3)e(t)$

特征方程：$\alpha^2+3\alpha+2=0$ 特征根为：$\alpha_1=-1$，$\alpha_2=-2$

$r_{Zi}(t)$ 的求法与经典时域法一致，$r_{Zi}(t)=\left(4e^{-t}-3e^{-2t}\right)u(t)$

再求 $r_{Zs}(t)$：$e(t)=u(t)$，$r(t)=\frac{p+3}{(p+1)(p+2)}u(t)=(p+3)\left[e^{-t}u(t)*e^{-2t}u(t)*u(t)\right]$

其中 $e^{-t}u(t)*e^{-2t}u(t)*u(t)=\int_0^t\left(e^{-\tau}-e^{-2\tau}\right)d\tau=\left(\frac{1}{2}-e^{-t}+\frac{1}{2}e^{-2t}\right)u(t)$

$$\therefore r_{Zs}(t)=(p+3)\left(\frac{1}{2}-e^{-t}+\frac{1}{2}e^{-2t}\right)u(t)=\left(-2e^{-t}+\frac{1}{2}e^{-2t}+\frac{3}{2}\right)u(t)$$

$\therefore$ 全响应 $r(t)=r_{Zi}(t)+r_{Zs}(t)=\left(2e^{-t}-\frac{5}{2}e^{-2t}+\frac{3}{2}\right)u(t)$

自由响应：$\left(2e^{-t}-\frac{5}{2}e^{-2t}\right)u(t)$

受迫响应：$\frac{3}{2}u(t)$

综观以上两种方法可发现 p 算子法更简洁，准确性也更高

（2）$e(t)=e^{-3t}u(t)$，$r(0_-)=1$，$r'(0_-)=2$

运用和上题同样的方法，可得

全响应 $r(t)=\left(5e^{-t}-4e^{-2t}\right)u(t)$

零输入响应：$r_{Zi}(t)=\left(4e^{-t}-3e^{-2t}\right)u(t)$

零状态响应：$r_{Zs}(t)=\left(e^{-t}-e^{-2t}\right)u(t)$

自由响应：$\left(5e^{-t}-4e^{-2t}\right)u(t)$

受迫响应：0

2-10 分析：

$$\frac{d}{dx}r(t)+5r(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}e(\tau)f(t-\tau)d\tau-e(t)=e(t)*f(t)-e(t)=e(t)*\left[f(t)-\delta(t)\right]$$

已知冲激函数 $\delta(t)$ 与单位冲激响应 $h(t)$ 为“输入——输出”对，故 $e(t)=\delta(t)$ 时，

$r(t)=h(t)$。类似上题，也可以用经典法和算子法两种思路求解该微分方程。

解题过程：方法一：经典法

代入 $e(t)=\delta(t)$， $f(t)=e^{-t}u(t)+3\delta(t)$ 得到

$$\frac{d}{dt}h(t)+5h(t)=e^{-t}u(t)+2\delta(t)\cdots\cdots(*)$$

对于因果系统 $h(0_-)=0$

先求满足 $\frac{d}{dt}h_1(t)+5h_1(t)=\delta(t)$ 的 $h_1(t)$： $h_1(t)=Ae^{-5t}u(t)$

利用冲激函数匹配法，在 $(0_-,0_+)$ 时间段内

$$\begin{cases}\frac{d}{dx}h_1(t)=a\delta(t)+b\Delta u(t)\\ h_1(t)=a\Delta u(t)\end{cases}\qquad(0_-<t<0_+)$$

$$\Rightarrow a\delta(t)+b\Delta u(t)+5a\Delta u(t)=\delta(t)$$
$$\Rightarrow a=1,b=-5$$
$$\Rightarrow h_1(0_+)=a+h(0_-)=A=1$$
$$\Rightarrow h_1(t)=e^{-5t}u(t)$$

对于 $(*)$ 式：

$$h(t)=h_1(t)*\left[e^{-t}u(t)+2\delta(t)\right]=e^{-5t}u(t)*e^{-t}u(t)+2e^{-5t}u(t)=\left(\frac{1}{4}e^{-t}+\frac{7}{4}e^{-5t}\right)u(t)$$

方法二： p 算子法

（常用关系式：① $\frac{dx(t)}{dt}=px(t)$，② $e^{-\lambda t}u(t)=\frac{1}{p+\lambda}\delta(t)$

③ $\frac{1}{p+\lambda}x(t)=\frac{1}{p+\lambda}\left[\delta(t)*x(t)\right]=\left[\frac{1}{p+\lambda}\delta(t)\right]*x(t)=e^{-\lambda t}u(t)*x(t)$）

引入微分算子 p，$(*)$ 式变成：

$$(p+5)h(t)=\frac{1}{p+1}\delta(t)+2\delta(t)$$

$$\Rightarrow h(t)=\frac{1}{p+5}\cdot\frac{1}{p+1}\delta(t)+\frac{2}{p+5}\delta(t)=\left(\frac{-\frac{1}{4}}{p+5}+\frac{\frac{1}{4}}{p+1}\right)\delta(t)+\frac{2}{p+5}\delta(t)$$

$$\Rightarrow h(t)=\left(\frac{7}{4}e^{-5t}+\frac{1}{4}e^{-t}\right)u(t)$$

注：由本例再次看到，相比经典法，p 算子法形式简洁，易算易记。

2-14 分析：求解两个信号的卷积，可以直接用定义，依照“反转→平移→相乘→求和”的顺序来求，积分式为 $x_1(t)*x_2(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}x_1(\tau)x_2(t-\tau)d\tau$，但是这种依靠定义的基本方法可能不是最简便的。更应该注意灵活运用卷积的性质（卷积的交换律、结合律、分配律；卷积的微分与积分；与冲激函数或阶跃函数的卷积）对表达式进一步的化简，甚至直接得到结果。

解题过程：

（1）$f(t)=u(t)-u(t-1)=u(t)*\left[\delta(t)-\delta(t-1)\right]$

$$\begin{aligned}\therefore s(t)=f(t)*f(t)&=u(t)*\left[\delta(t)-\delta(t-1)\right]*u(t)*\left[\delta(t)-\delta(t-1)\right]\\&=\left[u(t)*u(t)\right]*\left[\delta(t)-2\delta(t-1)+\delta(t-2)\right]\\&=tu(t)*\left[\delta(t)-2\delta(t-1)+\delta(t-2)\right]\\&=tu(t)-2(t-1)u(t-1)+(t-2)u(t-2)\end{aligned}$$

（2）$f(t)=u(t-1)-u(t-2)=u(t)*\left[\delta(t-1)-\delta(t-2)\right]$

$$\begin{aligned}\therefore s(t)=f(t)*f(t)&=u(t)*\left[\delta(t-1)-\delta(t-2)\right]*u(t)*\left[\delta(t-1)-\delta(t-2)\right]\\&=\left[u(t)*u(t)\right]*\left[\delta(t-2)-2\delta(t-3)+\delta(t-4)\right]\\&=tu(t)*\left[\delta(t-2)-2\delta(t-3)+\delta(t-4)\right]\\&=(t-2)u(t-2)-2(t-3)u(t-3)+(t-4)u(t-4)\end{aligned}$$

注：可见（2）中的 $s(t)$ 是（1）中 $s(t)$ 右移两位，不难推出如下结论：

$$s_1(t)=x_1(t)*x_2(t)$$

$$s_2(t)=x_1(t-t_1)*x_2(t-t_2)=s_1(t-t_1-t_2)\qquad(t_1\ge 0,t_2\ge 0)$$

2.15 分析：利用卷积的性质：$f(t)*\left[\delta(t+t_0)+\delta(t-t_0)\right]=f(t+t_0)+f(t-t_0)$ 可画出如下波形：

（1）$s_1(t)=f_1(t)*f_2(t)=f_1(t)*\left[\delta(t+5)+\delta(t-5)\right]=f_1(t+5)+f_2(t-5)$

（2）$s_2(t)=f_1(t)*f_2(t)*f_2(t)=f_1(t)*\left[\delta(t+5)+\delta(t-5)\right]\left[\delta(t+5)+\delta(t-5)\right]$

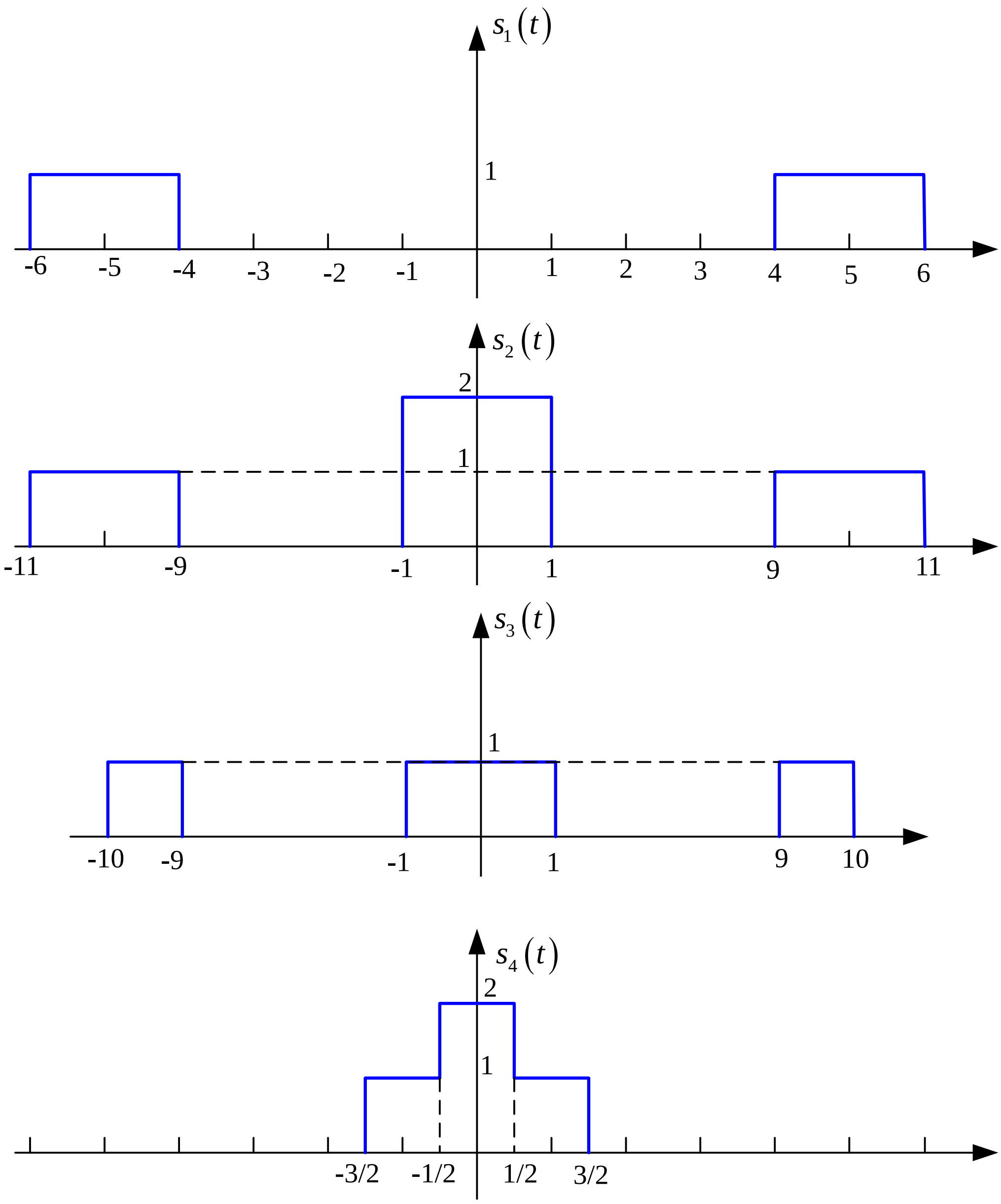
$= f_1(t)*\left[\delta(t+10)+2\delta(t)+\delta(t-10)\right]$

$= f_1(t+10)+2f_1(t)+f_1(t-10)$

（3） $s_3(t)=\left\{\left[f_1(t)*f_2(t)\right]\left[u(t+5)-u(t-5)\right]\right\}*f_2(t)$

由（1）得 $f_1(t)*f_2(t)=s_1(t)$，$\left[u(t+5)-u(t-5)\right]$相当于一个“时间窗”，保留$(-5,5)$内的信号，其它范围内的信号为 0。

（4） $s_4(t)=f_1(t)*f_3(t)$ 发生时域信号的叠加



2-18 分析：本题可以用经典法、算子法或者直接用 LTI 系统的性质求解

解题过程：

方法一：经典法

$\because r(t)=H\left[e(t)\right]=e(t)*h(t)$，$H\left[\frac{d}{dt}e(t)\right]=\frac{d}{dt}\left\{H\left[e(t)\right]\right\}=\frac{d}{dt}r(t)$

$\therefore$ 得到微分方程：$\frac{d}{dt}r(t)+3r(t)=e^{-2t}u(t)$

此方程齐次解 $r_n(t)=Ae^{-3t}u(t)$，特解 $r_p(t)=Be^{-2t}u(t)$

将 $r_p(t)$ 代入上式得到 $B=1$，即 $r_p(t)=e^{-2t}u(t)$

由于 $r(t)$ 是零状态响应，且方程右端无冲激项，故 $r(0_+)=0$，将此初始条件代入

$r(t)=r_h(t)+r_p(t)=\left(Ae^{-3t}+e^{-2t}\right)u(t)$ 得 $A=-1$

$\therefore r(t)=\left(-e^{-3t}+e^{-2t}\right)u(t)$

又 $\because r(t)=e(t)*h(t)$

$\therefore e(t)*h(t)=\left[2e^{-3t}u(t)\right]*h(t)=\left(-e^{-3t}+e^{-2t}\right)u(t)\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$

又 $\frac{d}{dt}\left[e(t)*h(t)\right]=\left[\frac{d}{dt}e(t)\right]*h(t)=\frac{d}{dt}r(t)$

$\therefore\left[-6e^{-3t}u(t)+2\delta(t)\right]*h(t)=\left(3e^{-3t}-2e^{-2t}\right)u(t)\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$

（1）*3+（2）得 $\delta(t)*h(t)=\frac{1}{2}e^{-2t}u(t)$

即 $h(t)=\frac{1}{2}e^{-2t}u(t)$

方法二：p 算子法

$r(t)=H\left(e(t)\right)$

$H\left[\frac{d}{dt}e(t)\right]=H\left[pe(t)\right]=pH\left[e(t)\right]=pr(t)=-3r(t)+e^{-2t}u(t)$

$\therefore(p+3)r(t)=e^{-2t}u(t)$

$\therefore r(t)=\frac{1}{p+3}e^{-2t}u(t)*e^{-2t}u(t)=2e^{-3t}u(t)*\frac{1}{2}e^{-2t}u(t)\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$

又 $\because r(t)=\therefore e(t)*h(t)=2e^{-3t}u(t)*h(t)\cdots\cdots\cdots(4)$

由(3)(4)对比可知 $h(t)=\frac{1}{2}e^{-2t}u(t)$

方法三：直接利用 LTI 系统的性质

$H\left(e\left(t\right)\right)=r\left(t\right)\Rightarrow H\left[2e^{-3t}u\left(t\right)\right]=r\left(t\right)$

$H\left(\frac{d}{dx}e\left(t\right)\right)=H\left[2\delta\left(t\right)-6e^{-3t}u\left(t\right)\right]=-3r\left(t\right)+e^{2t}u\left(t\right)\cdots\cdots\cdots(5)$

（4）*3+（5）$\Rightarrow h\left(t\right)=H\left[\delta\left(t\right)\right]=\frac{1}{2}e^{-2t}u\left(t\right)$

2-20 解题过程：由系统框图知，$r\left(t\right)=e\left(t\right)*h_1\left(t\right)+e\left(t\right)*h_2\left(t\right)*h_1\left(t\right)*h_3\left(t\right)$

$$=e\left(t\right)*\left[h_1\left(t\right)+h_2\left(t\right)*h_1\left(t\right)*h_3\left(t\right)\right]$$
$$=e\left(t\right)*h\left(t\right)$$

$\therefore h\left(t\right)=h_1\left(t\right)+h_2\left(t\right)*h_1\left(t\right)*h_3\left(t\right)$

其中，$h_1\left(t\right)=u\left(t\right)$，$h_2\left(t\right)*h_1\left(t\right)*h_3\left(t\right)=\delta\left(t-1\right)*u\left(t\right)*\left[-\delta\left(t\right)\right]=-u\left(t-1\right)$

$\therefore h\left(t\right)=u\left(t\right)-u\left(t-1\right)$