

第18章 均匀传输线

本章重点

- | | |
|------|---------------|
| 18.1 | 分布参数电路 |
| 18.2 | 均匀传输线及其方程 |
| 18.3 | 均匀传输线方程的正弦稳态解 |
| 18.4 | 均匀传输线的原参数和副参数 |
| 18.5 | 无损耗传输线 |
| 18.6 | 无损耗线方程的通解 |
| 18.7 | 无损耗线的波过程 |

● 重点：

1. 分布参数电路的概念
2. 均匀传输线的方程及其正弦稳态解
3. 无损耗传输线的波过程

18.1 分布参数电路

1. 传输线的定义和分类

① 定义

用以引导电磁波，最大效率的将电磁能或电磁信号从一点定向地传输到另一点的电磁器件称为传输线。

② 分类

- a) 传递横电磁波（TEM波）的平行双线、同轴电缆、平行板等双导体系统传输线。工作频率为米波段（受限于辐射损耗）。

b) 传递横电波（TE波）或横磁波（TM波）的单导体系统，如金属波导和介质波导等。工作频率为厘米波段。

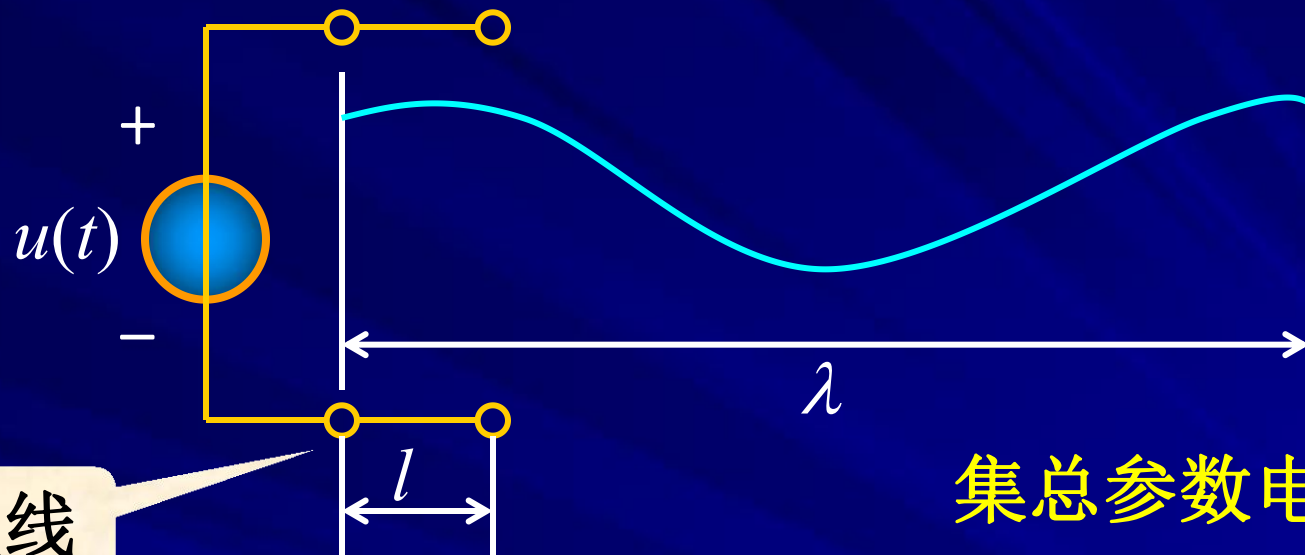


注意 本章讨论的是双导体系统传输线。

2. 传输线的电路分析方法

① 集总电路的分析方法

当传输线的长度 $l \ll \lambda$ ，称为短线，可以忽略电磁波沿线传播所需的时间，即不计滞后效应，可用集中参数的电路来描述。

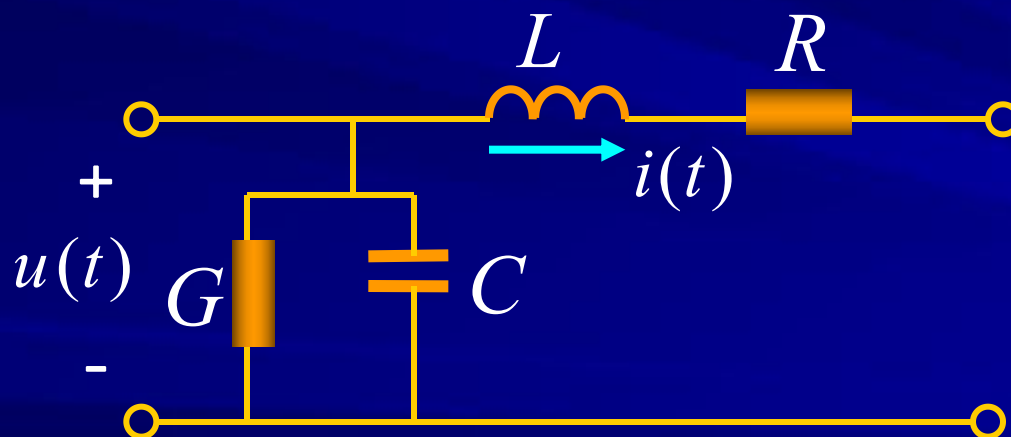


短线

集总参数电路中

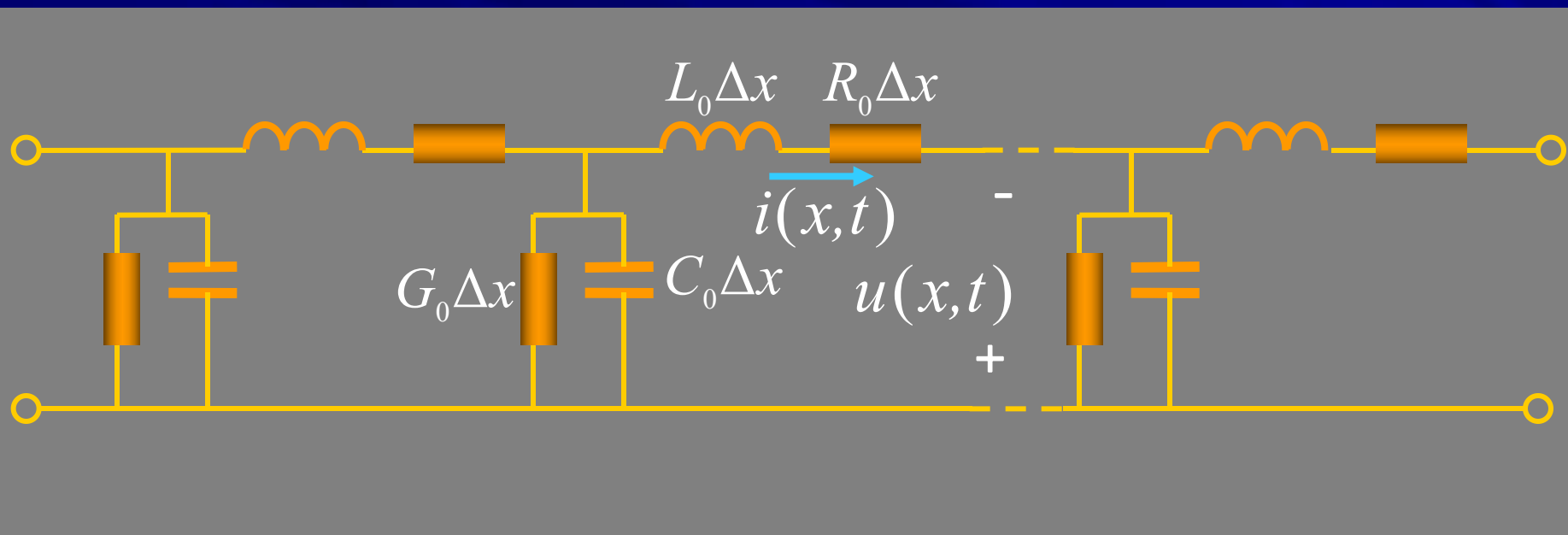
电场 $\rightarrow C$ 磁场 $\rightarrow L$ 热 $\rightarrow R$

导线——只流通电流



② 分布电路的分析方法

当传输线的长度 $l \approx \lambda$ ，称为长线，电磁波的滞后效应不可忽视，沿线传播的电磁波不仅是时间的函数，而且是空间坐标的函数，必须用分布参数电路来描述。



例

$$f=50 \text{ Hz} \quad \lambda = \frac{v}{f} = \frac{3 \times 10^8}{50} = 6000 \text{ km}$$

$$f=1000 \text{ MHz} \quad \lambda = \frac{v}{f} = \frac{3 \times 10^8}{10^9} = 0.3 \text{ m}$$



注意

当传输线的长度 $l \approx \lambda$ ，严格地讲，这是一个电磁场的计算问题。在一定的条件下可作为电路问题来考虑。求解这类问题需要解偏微分方程。

18.2 均匀传输线及其方程

1. 均匀传输线

均匀传输线沿线的电介质性质、导体截面、导体间的几何距离处处相同。



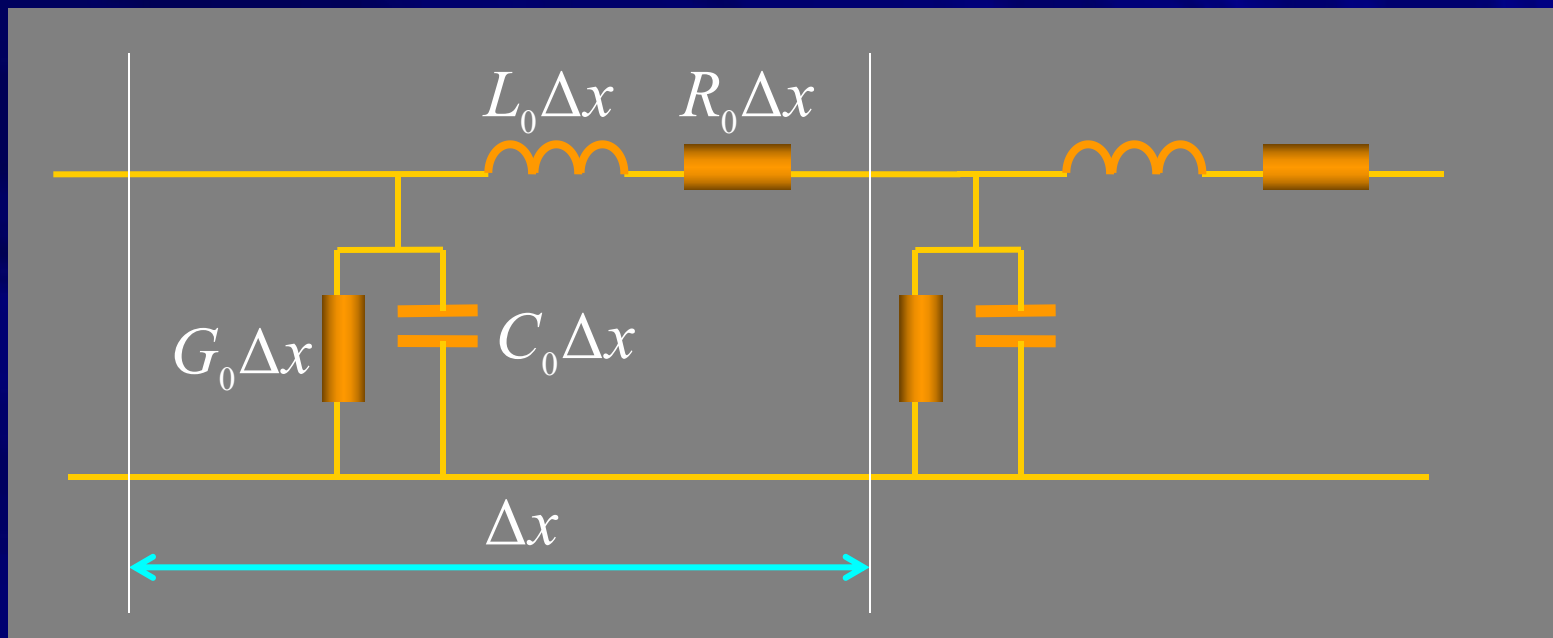
均匀传输线的特点

- ① 电容、电感、电阻、电导连续且均匀地分布在
整个传输线上；可以用单位长度的电容 C_0 、电
感 L_0 、电阻 R_0 、电导 G_0 来描述传输线的电气性
质；

R_0 G_0 L_0 C_0

传输线原参数

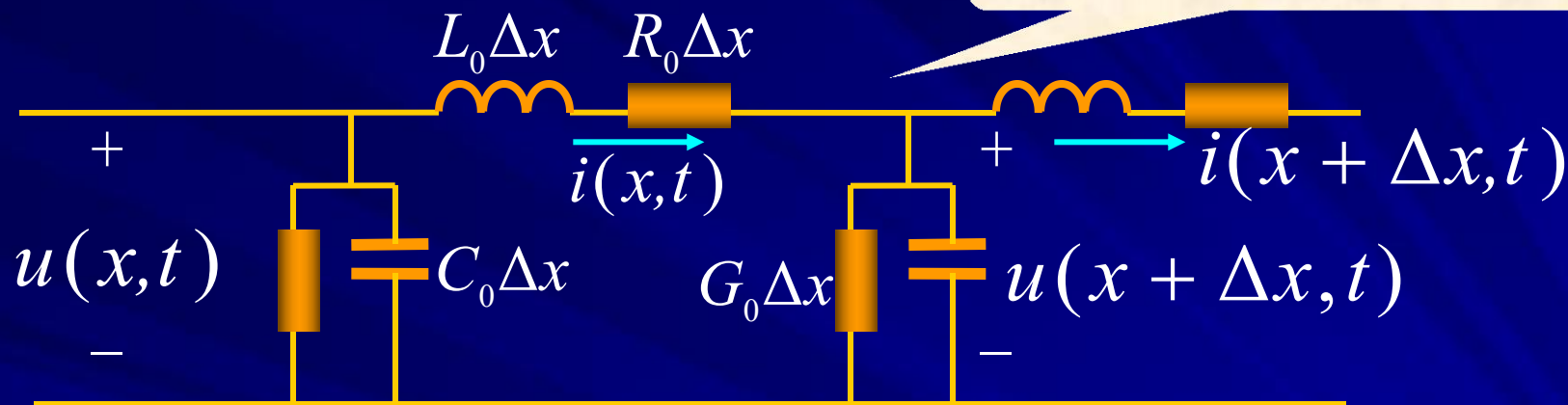
② 整个传输线可以看成是由许许多多微小的线元 Δx 级联而成；



③ 每一个线元可以看成是集总参数的电路，因而可以将基尔霍夫定律应用到这个电路的回路和结点。

2. 均匀传输线的方程

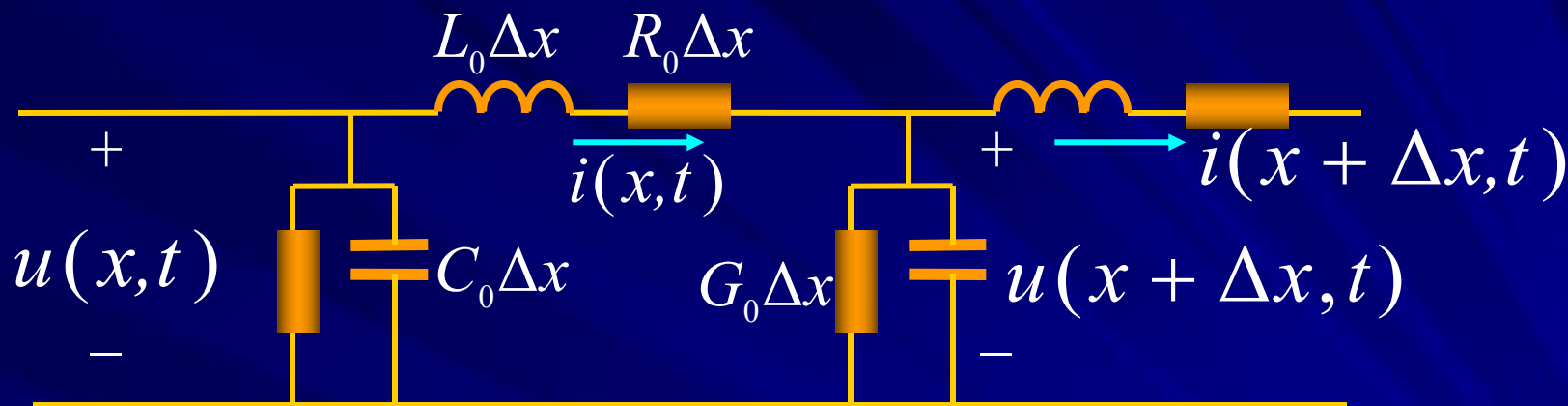
传输线电路模型



KVL方程

$$L_0 \Delta x \frac{\partial i(x, t)}{\partial t} + R_0 \Delta x i(x, t) + u(x + \Delta x, t) = u(x, t)$$

$$\Delta x \rightarrow 0 \quad \frac{\partial u}{\partial x} + L_0 \frac{\partial i}{\partial t} + R_0 i = 0$$



KCL方程

$$C_0 \Delta x \frac{\partial u(x + \Delta x, t)}{\partial t} + G_0 \Delta x u(x + \Delta x, t) + i(x + \Delta x, t) - i(x, t) = 0$$

$$\Delta x \rightarrow 0 \quad \frac{\partial i}{\partial x} + C_0 \frac{\partial u}{\partial t} + G_0 u = 0$$

均匀传输线方程

$$\frac{\partial u}{\partial x} + L_0 \frac{\partial i}{\partial t} + R_0 i = 0, \quad \frac{\partial i}{\partial x} + C_0 \frac{\partial u}{\partial t} + G_0 u = 0$$



注意

- ① 均匀传输线方程也称为电报方程，反映沿线电压电流的变化。
- ② 均匀传输线沿线有感应电势存在，导致两导体间的电压随距离 x 而变化；沿线有位移电流存在，导致导线中的传导电流随距离 x 而变化；
- ③ 均匀传输线方程适用于任意截面的由理想导体组成的二线传输线。

18.3 均匀传输线方程的正弦稳态解

均匀传输线工作在正弦稳态时，沿线的电压、电流是同一频率的正弦时间函数，因此，可以用相量法分析沿线的电压和电流。

1. 均匀传输线方程的正弦稳态解

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} + L_0 \frac{\partial i}{\partial t} + R_0 i = 0 \\ \frac{\partial i}{\partial x} + C_0 \frac{\partial u}{\partial t} + G_0 u = 0 \end{cases} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} \frac{d\dot{U}}{dx} = -(j\omega L_0 + R_0)\dot{I} \\ \frac{d\dot{I}}{dx} = -(j\omega C_0 + G_0)\dot{U} \end{cases}$$

方程的相量形式

$$\begin{cases} \frac{d\dot{U}}{dx} = -(\mathrm{j}\omega L_0 + R_0)\dot{I} \\ \frac{d\dot{I}}{dx} = -(\mathrm{j}\omega C_0 + G_0)\dot{U} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -\frac{d\dot{U}}{dx} = Z_0\dot{I} \\ -\frac{d\dot{I}}{dx} = Y_0\dot{U} \end{cases}$$

$$\text{令: } Z_0 = R_0 + \mathrm{j}\omega L_0$$

单位长度复阻抗

$$Y_0 = G_0 + \mathrm{j}\omega C_0$$

单位长度复导纳



注意

$$Z_0 \neq \frac{1}{Y_0}$$

$$\begin{cases} -\frac{d\dot{U}}{dx} = Z_0 \dot{I} \\ -\frac{d\dot{I}}{dx} = Y_0 \dot{U} \end{cases} \xrightarrow{\text{两边求导}} \begin{cases} -\frac{d^2 \dot{U}}{dx^2} = Z_0 Y_0 \dot{U} = \gamma^2 \dot{U} \\ -\frac{d^2 \dot{I}}{dx^2} = Z_0 Y_0 \dot{I} = \gamma^2 \dot{I} \end{cases}$$

传播常数

$$\gamma = \sqrt{Z_0 Y_0} = \alpha + j\beta = \sqrt{(j\omega L_0 + R_0)(j\omega C_0 + G_0)}$$

通解

$$\dot{U}(x) = A_1 e^{-\gamma x} + A_2 e^{\gamma x}$$

$$\dot{I}(x) = B_1 e^{-\gamma x} + B_2 e^{\gamma x}$$

2. 积分常数之间的关系

$$-\frac{d\dot{U}}{dx} = Z_0 \dot{I} \quad \longrightarrow \quad \dot{I} = -\frac{1}{Z_0} \frac{d\dot{U}}{dx} = \frac{\gamma}{Z_0} (A_1 e^{-\gamma x} - A_2 e^{\gamma x})$$

$$\text{令: } \frac{\gamma}{Z_0} = \frac{\sqrt{Z_0 Y_0}}{Z_0} = \sqrt{\frac{Y_0}{Z_0}} = \frac{1}{Z_c}$$

$$Z_c = \sqrt{\frac{Z_0}{Y_0}}$$

特性阻抗

$$\text{得: } \begin{cases} B_1 = \frac{\gamma}{Z_0} A_1 = \frac{1}{Z_c} A_1 \\ B_2 = -\frac{\gamma}{Z_0} A_2 = -\frac{1}{Z_c} A_2 \end{cases}$$



注意

A_1 、 A_2 、 B_1 、 B_2 由边界条件确定。

3. 给定边界条件下传输线方程的解

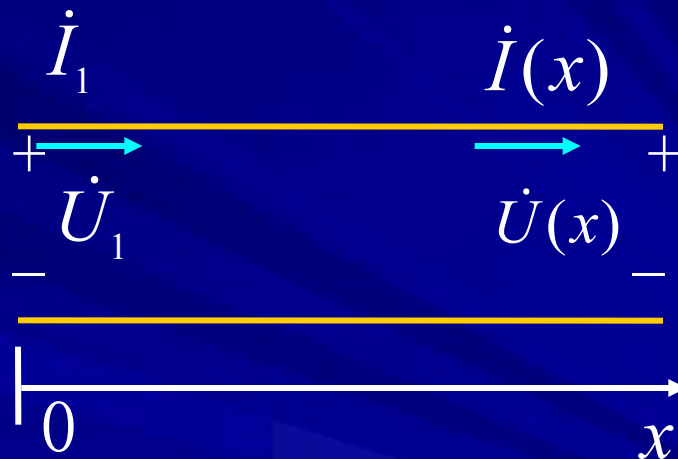
选取传输线始端为坐标原点， x 坐标自传输线的始端指向终端。

① 已知始端($x=0$)的电压 $\dot{U}_1$ 和电流 $\dot{I}_1$ 的解

$$\dot{U}(x) = A_1 e^{-\gamma x} + A_2 e^{\gamma x}$$

$$\dot{I}(x) = \frac{A_1}{Z_c} e^{-\gamma x} - \frac{A_2}{Z_c} e^{\gamma x}$$

$$\dot{U}(x=0) = \dot{U}_1, \quad \dot{I}(x=0) = \dot{I}_1$$



$$\rightarrow \begin{cases} A_1 + A_2 = \dot{U}_1 \\ A_1 - A_2 = Z_c \dot{I}_1 \end{cases}$$

解得： $A_1 = \frac{1}{2}(\dot{U}_1 + Z_c \dot{I}_1) \quad A_2 = \frac{1}{2}(\dot{U}_1 - Z_c \dot{I}_1)$

x 处的电压电流为：

$$\begin{cases} \dot{U}(x) = \frac{1}{2}(\dot{U}_1 + Z_c \dot{I}_1)e^{-\gamma x} + \frac{1}{2}(\dot{U}_1 - Z_c \dot{I}_1)e^{\gamma x} \\ \dot{I}(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{\dot{U}_1}{Z_c} + \dot{I}_1\right)e^{-\gamma x} - \frac{1}{2}\left(\frac{\dot{U}_1}{Z_c} - \dot{I}_1\right)e^{\gamma x} \end{cases}$$

可写为

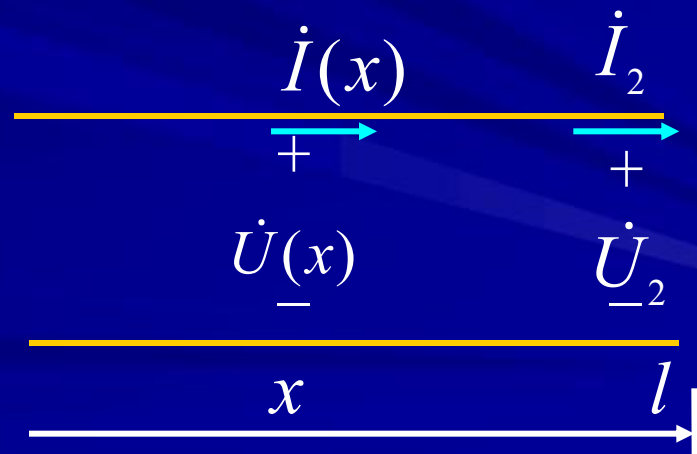
$$\begin{cases} \dot{U}(x) = \frac{1}{2}\dot{U}_1(e^{-\gamma x} + e^{\gamma x}) + \frac{1}{2}Z_c \dot{I}_1(e^{-\gamma x} - e^{\gamma x}) \\ \dot{I}(x) = \frac{1}{2}\frac{\dot{U}_1}{Z_c}(e^{-\gamma x} - e^{\gamma x}) + \frac{1}{2}\dot{I}_1(e^{-\gamma x} + e^{\gamma x}) \end{cases}$$

双曲函数： $ch\gamma x = \frac{1}{2}(e^{\gamma x} + e^{-\gamma x})$ $sh\gamma x = \frac{1}{2}(e^{\gamma x} - e^{-\gamma x})$

→
$$\begin{cases} \dot{U}(x) = \dot{U}_1 ch\gamma x - Z_c \dot{I}_1 sh\gamma x \\ \dot{I}(x) = -\frac{\dot{U}_1}{Z_c} sh\gamma x + \dot{I}_1 ch\gamma x \end{cases}$$

② 已知终端($x=l$)的电压 $\dot{U}_2$ 和电流 $\dot{I}_2$ 的解

$$\begin{cases} \dot{U}_2 = A_1 e^{-\gamma l} + A_2 e^{\gamma l} \\ \dot{I}_2 = \frac{1}{Z_c} (A_1 e^{-\gamma l} - A_2 e^{\gamma l}) \end{cases}$$

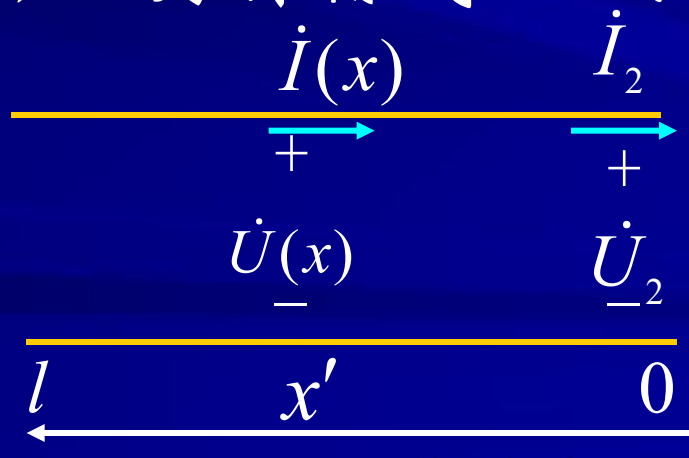


解得： $A_1 = \frac{1}{2}(\dot{U}_2 + Z_C \dot{I}_2)e^{\gamma l}$ $A_2 = \frac{1}{2}(\dot{U}_2 - Z_C \dot{I}_2)e^{-\gamma l}$

x 处的电压电流为：

$$\begin{cases} \dot{U}(x) = \frac{1}{2}(\dot{U}_2 + Z_C \dot{I}_2)e^{\gamma(l-x)} + \frac{1}{2}(\dot{U}_2 - Z_C \dot{I}_2)e^{-\gamma(l-x)} \\ \dot{I}(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{\dot{U}_2}{Z_C} + \dot{I}_2\right)e^{\gamma(l-x)} - \frac{1}{2}\left(\frac{\dot{U}_2}{Z_C} - \dot{I}_2\right)e^{-\gamma(l-x)} \end{cases}$$

令 $x' = l - x$ ， x' 为传输线上一点到终点的距离。



以终端
为零点

$$\begin{cases} \dot{U}(x') = \frac{1}{2}(\dot{U}_2 + Z_c \dot{I}_2) e^{\gamma x'} + \frac{1}{2}(\dot{U}_2 - Z_c \dot{I}_2) e^{-\gamma x'} \\ \dot{I}(x') = \frac{1}{2}\left(\frac{\dot{U}_2}{Z_c} + \dot{I}_2\right) e^{\gamma x'} - \frac{1}{2}\left(\frac{\dot{U}_2}{Z_c} - \dot{I}_2\right) e^{-\gamma x'} \end{cases}$$



$$\begin{cases} \dot{U}(x') = \dot{U}_2 \operatorname{ch} \gamma x' + Z_c \dot{I}_2 \operatorname{sh} \gamma x' \\ \dot{I}(x') = \frac{\dot{U}_2}{Z_c} \operatorname{sh} \gamma x' + \dot{I}_2 \operatorname{ch} \gamma x' \end{cases}$$

例1 已知一均匀传输线 $Z_0 = 0.427 \angle 79^\circ \Omega/\text{km}$,
 $Y_0 = 2.7 \times 10^{-6} \angle 90^\circ \text{S}/\text{km}$. $\dot{U}_2 = 220 \text{kV}$, $\dot{I}_2 = 455 \text{A}$
求 $f = 50 \text{Hz}$, **距终端900km处的电压和电流。**

解

$$\begin{cases} \dot{U}(x') = \dot{U}_2 \operatorname{ch} \gamma x' + Z_c \dot{I}_2 \operatorname{sh} \gamma x' \\ \dot{I}(x') = \frac{\dot{U}_2}{Z_c} \operatorname{sh} \gamma x' + \dot{I}_2 \operatorname{ch} \gamma x' \end{cases}$$

$$Z_c = \sqrt{\frac{Z_0}{Y_0}} = 398 \angle -5.5^\circ (\Omega)$$

$$\gamma = \sqrt{Z_0 Y_0} = 1.073 \times 10^{-3} \angle 84.5^\circ \text{ 1/km}$$

$$\gamma x' = 900 \times 1.073 \times 10^{-3} = 965.7 \times 10^{-3} \angle 84.5^\circ$$

$$\operatorname{sh} \gamma x' = \frac{1}{2} (e^{\gamma x'} - e^{-\gamma x'}) = 0.824 \angle 86.4^\circ$$

$$\operatorname{ch} \gamma x' = \frac{1}{2} (e^{\gamma x'} + e^{-\gamma x'}) = 0.581 \angle 7.4^\circ$$

$$\therefore \dot{U}(x') = \dot{U}_2 \operatorname{ch} \gamma x' + Z_C \dot{I}_2 \operatorname{sh} \gamma x' = 222 \angle 47.5^\circ \text{ V}$$

$$\dot{I}(x') = \frac{\dot{U}_2}{Z_C} \operatorname{sh} \gamma x' + \dot{I}_2 \operatorname{ch} \gamma x' = 548 \angle 63.2^\circ \text{ A}$$

$$\begin{cases} u = 222\sqrt{2} \sin(314t + 47.5^\circ) \text{ V} \\ i = 548\sqrt{2} \sin(314t + 63.2^\circ) \text{ A} \end{cases}$$

4. 均匀传输线上的行波

$$\begin{cases} \dot{U}(x) = A_1 e^{-\gamma x} + A_2 e^{\gamma x} = \dot{U}^+ e^{-\gamma x} + \dot{U}^- e^{\gamma x} \\ \dot{I}(x) = \frac{A_1}{Z_c} e^{-\gamma x} - \frac{A_2}{Z_c} e^{\gamma x} = \dot{I}^+ e^{-\gamma x} + \dot{I}^- e^{\gamma x} \end{cases}$$

$$\begin{cases} A_1 = \dot{U}^+ = \frac{1}{2}(\dot{U}_1 + Z_c \dot{I}_1) = |\dot{U}^+| \angle \varphi_+ \\ A_2 = \dot{U}^- = \frac{1}{2}(\dot{U}_1 - Z_c \dot{I}_1) = |\dot{U}^-| \angle \varphi_- \end{cases}$$

$$Z_c = \frac{\dot{U}^+}{\dot{I}^+} = -\frac{\dot{U}^-}{\dot{I}^-} = |Z_c| \angle \varphi_z$$

瞬时式 $u(x, t) = u^+ + u^-$

$$= \sqrt{2} |\dot{U}^+| e^{-\alpha x} \cos(\omega t - \beta x + \varphi_+)$$

$$+ \sqrt{2} |\dot{U}^-| e^{\alpha x} \cos(\omega t + \beta x + \varphi_-)$$

$i(x, t) = i^+ + i^-$

$$= \sqrt{2} \frac{|\dot{U}^+|}{|Z_c|} e^{-\alpha x} \cos(\omega t - \beta x + \varphi_+ - \varphi_z)$$

$$- \sqrt{2} \frac{|\dot{U}^-|}{|Z_c|} e^{\alpha x} \cos(\omega t + \beta x + \varphi_- - \varphi_z)$$

考察 u^+ 和 i^+

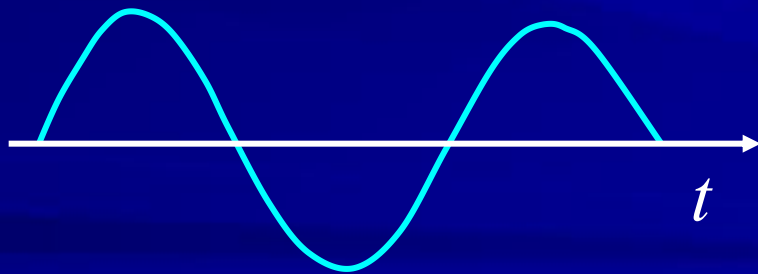
$$u^+(x,t) = \sqrt{2} |\dot{U}^+| e^{-\alpha x} \cos(\omega t - \beta x + \varphi_+)$$

$$i^+ = \sqrt{2} \frac{|\dot{U}^+|}{|Z_c|} e^{-\alpha x} \cos(\omega t - \beta x + \varphi_+ - \varphi_z)$$

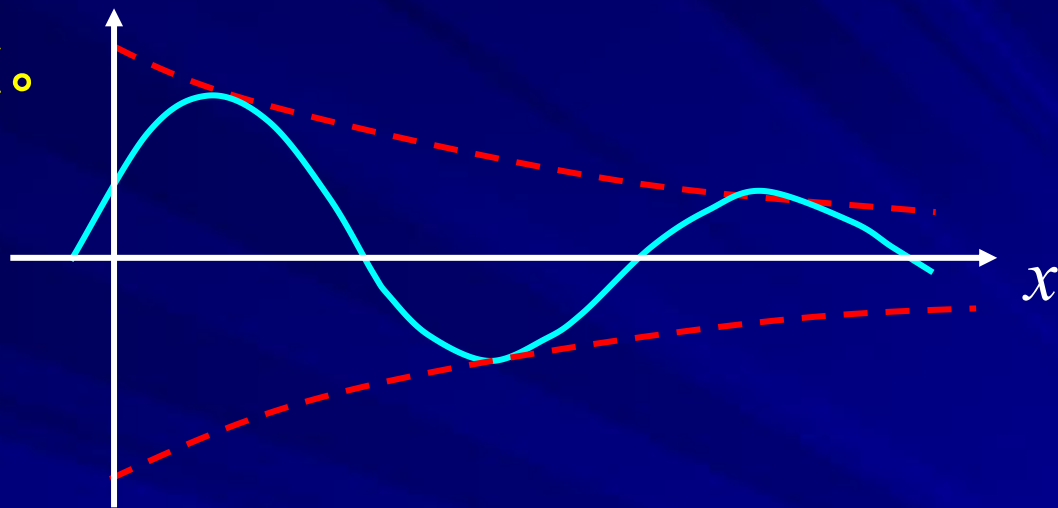


特点

- ① 传输线上电压和电流既是时间 t 的函数，又是空间位置 x 的函数，任一点的电压和电流随时间作正弦变化。



② 某一瞬间 t ，电压和电流沿线分布为衰减的正弦函数。

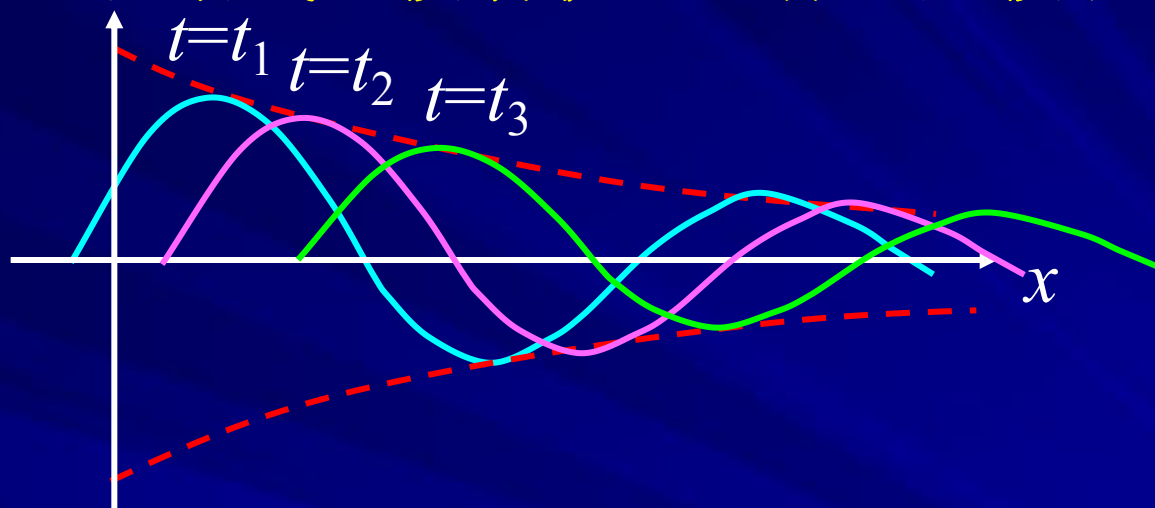


α → 经过单位距离幅度衰减的量值，称衰减常数。

③ 随距离 x 的增加，电压和电流的相位不断滞后；

β → 经过单位距离相位滞后的量值，称相位常数。

④ 电压和电流沿线呈波动状态，称电压波和电流波；



$u+$ 、 $i+$ 为随时间增加向 x 增加方向（即从线的始端向终端的方向）运动的衰减波。将这种波称为电压或电流入射波、直波或正向行波。

考察最大点的相位：

$$u^+(x, t) = \sqrt{2} |\dot{U}^+| e^{-\alpha x} \cos(\omega t - \beta x + \varphi_+)$$

$$\omega t_1 - \beta x_1 + \varphi_+ = \frac{\pi}{2} \quad \omega t_2 - \beta x_2 + \varphi_+ = \frac{\pi}{2}$$

$$\rightarrow \omega(t_1 - t_2) = \beta(x_1 - x_2)$$

相位速度

得同相位移动的速度：

$$v = \frac{(x_1 - x_2)}{(t_1 - t_2)} = \frac{\omega}{\beta}$$

波传播方向上，相位差为 2π 的相邻两点间的距离称为波长 λ 。

$$\omega t - \beta x + \varphi_+ - (\omega t - \beta(x + \lambda) + \varphi_+) = 2\pi$$

$$\longrightarrow \lambda = \frac{2\pi}{\beta} \longrightarrow v = \frac{\omega}{\beta} = \lambda f = \lambda / T$$

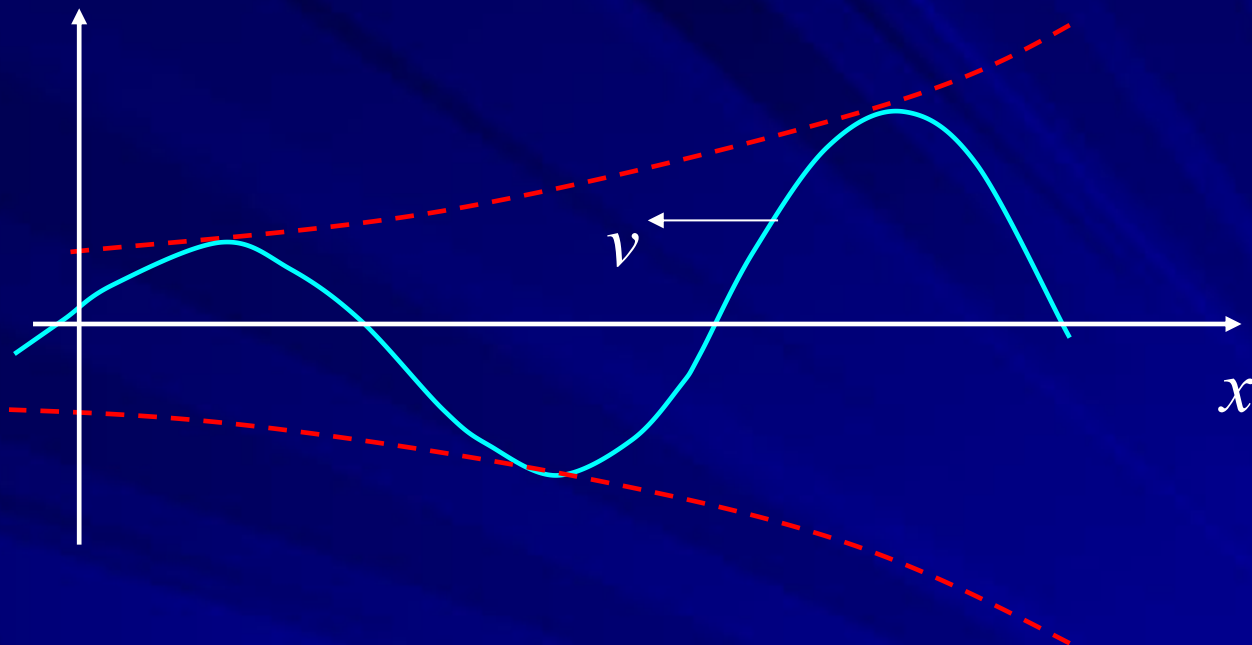
⑤ 沿线传播的功率

$$P = U^+ I^+ \cos \varphi_Z = \frac{U^{+2}}{Z_C} e^{-2\alpha x} \cos \varphi_Z$$

同理考察 u^- 和 i^-

$$u^-(x, t) = \sqrt{2} |\dot{U}^-| e^{\alpha x} \cos(\omega t + \beta x + \varphi_-)$$

$$i^-(x, t) = -\sqrt{2} \frac{|\dot{U}^-|}{|Z_C|} e^{\alpha x} \cos(\omega t + \beta x + \varphi_- - \varphi_Z)$$



u^- 、 i^- 为随时间增加向 x 减小方向（即从线的终端向始端的方向）运动的衰减波。将这种波称为电压或电流反射波、或反向行波。

5. 反射系数

定义反射系数为沿线任意点处反射波电压相量与入射波电压相量之比。

$$n_x = \frac{\text{反射波电压}}{\text{入射波电压}} = \frac{\dot{U}^- e^{j\beta x}}{\dot{U}^+ e^{-j\beta x}} = n e^{2j\beta x}$$

任一点的反射系数

$$n = \frac{\dot{U}^-}{\dot{U}^+} = \frac{\frac{1}{2}(\dot{U}_2 - Z_C \dot{I}_2)}{\frac{1}{2}(\dot{U}_2 + Z_C \dot{I}_2)} = \frac{(\dot{U}_2 - Z_C \dot{I}_2)}{(\dot{U}_2 + Z_C \dot{I}_2)} = \frac{Z_2 - Z_C}{Z_2 + Z_C} = |n| e^{j\varphi_L}$$

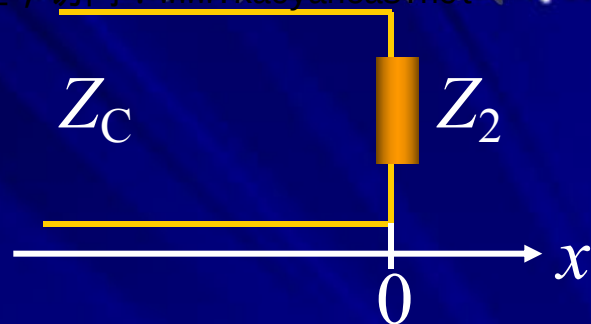
终端反射系数

$$|n_x| = |n| \quad \varphi_x - \varphi_L = 2\beta x$$



注意

$$n = \frac{Z_2 - Z_C}{Z_2 + Z_C}$$



- ① 反射系数是一个复数，反映了反射波与入射波在幅值和相位上的差异；
- ② 反射系数的大小与传输线特性阻抗和终端负载阻抗有关；

当： $Z_2 = 0$ (短路)， $Z_2 = \infty$ (开路)， $Z_2 = jX$ (纯电抗)

$$\rightarrow |n| = 1$$

全反射

$$\text{当：} Z_2 = Z_C \rightarrow n = 0$$

匹配

在通信线路和设备连接时，均要求匹配，避免反射

例 已知一均匀传输线长300km，频率 $f=50\text{Hz}$ ，传播常数 $\gamma=1.06\times 10^{-3}\angle 84.7^\circ 1/\text{km}$ ， $Z_C=400\angle -5.3^\circ \Omega$ ，始端电压 $\dot{U}_1=220\angle 0^\circ \text{kV}$ ， $\dot{I}_1=30\angle -10^\circ \text{A}$
求：(1)行波的相速；(2)始端50km处电压、电流入射波和反射波的瞬时值表达式。

解

$$\gamma = 1.06 \times 10^{-3} \angle 84.7^\circ = 0.979 \times 10^{-4} + j1.055 \times 10^{-3}$$

$$v = \frac{\omega}{\beta} = \frac{2\pi \times 50}{1.055 \times 10^{-3}} = 2.98 \times 10^5 \text{ km/s}$$

$$\begin{cases} \dot{U}_1^+ = \frac{1}{2}(\dot{U}_1 + Z_C \dot{I}_1) = 65806 \angle -1.381^\circ \text{ V} \\ \dot{U}_1^- = \frac{1}{2}(\dot{U}_1 - Z_C \dot{I}_1) = 54236 \angle 1.673^\circ \text{ V} \end{cases}$$

$$u^+ = \sqrt{2} \times 65806 e^{-0.979 \times 10^{-4} x} \cos(314 t - 1.055 \times 10^{-3} x - 1.381^\circ) \text{V}$$

$$u^- = \sqrt{2} \times 54236 e^{-0.979 \times 10^{-4} x} \cos(314 t - 1.055 \times 10^{-3} x + 1.673^\circ) \text{V}$$

$$u^+(50\text{km}, t) = \sqrt{2} \times 65486 \cos(314 t - 4.405^\circ) \text{V}$$

$$u^-(50\text{km}, t) = \sqrt{2} \times 54502 \cos(314 t + 4.697^\circ) \text{V}$$

$$\therefore Z_c = \frac{\dot{U}^+}{\dot{I}^+} = -\frac{\dot{U}^-}{\dot{I}^-}$$

$$\therefore i^+(50\text{km}, t) = \sqrt{2} \times 163.71 \cos(314 t + 0.9^\circ) \text{A}$$

$$i^-(50\text{km}, t) = \sqrt{2} \times 136.25 \cos(314 t + 10^\circ) \text{A}$$

18.4 均匀传输线的原参数和副参数

均匀传输线的传播特性由传输线的参数决定。
传输线的参数分原参数和副参数。

1. 均匀传输线的原参数

$$R_0 \quad G_0 \quad L_0 \quad C_0$$

传输线的原参数是指单位长度的电阻、电导、电容和电感。它们由传输线的几何尺寸、相互位置及周围媒质的物理特性决定，组成传输线等效分布参数电路的基本量，可以用电磁场的方法求得。

2. 均匀传输线的副参数

$$\gamma \quad Z_c$$

传输线的副参数有传播常数和特性阻抗。它们由原参数决定。

① 传播常数

$$\gamma = \alpha + j\beta = \sqrt{(j\omega L_0 + R_0)(j\omega C_0 + G_0)}$$

$$\alpha = \sqrt{\frac{1}{2} \left[\sqrt{(R_0^2 + \omega^2 L_0^2)(G_0^2 + \omega^2 C_0^2)} - (\omega^2 L_0 C_0 - R_0 G_0) \right]}$$

$$\beta = \sqrt{\frac{1}{2} \left[\sqrt{(R_0^2 + \omega^2 L_0^2)(G_0^2 + \omega^2 C_0^2)} + (\omega^2 L_0 C_0 - R_0 G_0) \right]}$$



结论

a) α 和 β 是传输线分布参数和频率的复杂函数。因此，当非正弦信号在这样的传输线上传播时，必然引起讯号振幅的畸变和相位的畸变(或失真)。

b) 当传输线损耗很小 $R_0 \ll \omega L_0, G_0 \ll \omega C_0$

$$\alpha \approx \frac{1}{2} \left[R_0 \sqrt{\frac{C_0}{L_0}} + G_0 \sqrt{\frac{L_0}{C_0}} \right] \quad \beta = \omega \sqrt{L_0 C_0} \quad v = \frac{\omega}{\beta} \approx \frac{1}{\sqrt{L_0 C_0}}$$

非正弦信号在低损耗传输线上传播时，畸变程度很小。

② 特性阻抗

$$Z_c = \frac{\dot{U}^+}{\dot{I}^+} = -\frac{\dot{U}^-}{\dot{I}^-} = \sqrt{\frac{R_0 + j\omega L_0}{G_0 + j\omega C_0}} \Omega$$

$$= \sqrt[4]{\frac{R_0^2 + \omega^2 L_0^2}{G_0^2 + \omega^2 C_0^2}} e^{j\varphi_0} \quad \pi/4 \leq \varphi_0 \leq \pi/4。$$

对于低损耗传输线 $R_0 \ll \omega L_0, G_0 \ll \omega C_0$



结论

$$\rightarrow Z_c \approx \sqrt{\frac{L_0}{C_0}} \Omega$$

- ① 特性阻抗为复数，说明电压与电流不同相；
- ② 低损耗线的特性阻抗是实数，在微波范围内使用的传输线属于低损耗传输线。

例 计算工作于1.5MHz传输线的 Z_C 、 γ 、 α 和 β ，以及传播速度。已知原参数为： $R_0=2.6\Omega/\text{m}$ ， $L_0=0.82\mu\text{H}/\text{m}$ ， $G_0=0$ ， $C_0=22\text{pF}/\text{m}$ 。

解 传输线单位长度的串联阻抗为

$$Z_0 = R_0 + j\omega L_0 = 8.16\angle 71.41^\circ \Omega$$

传输线单位长度的并联导纳为

$$Y_0 = G_0 + j\omega C_0 = j20.73 \times 10^{-5} \text{ S/m}$$

特性阻抗

$$Z_C = \sqrt{\frac{Z_0}{Y_0}} = \sqrt{\frac{8.16\angle 71.41^\circ}{20.73 \times 10^{-5} \angle 90^\circ}} = 198.40\angle -9.3^\circ \Omega$$

传播常数

$$\begin{aligned}\gamma &= \sqrt{Z_0 Y_0} = \sqrt{(8.16 \angle 71.41^\circ)(20.73 \times 10^{-5} \angle 90^\circ)} \\ &= 6.64 \times 10^{-3} + j40.59 \times 10^{-3} = \alpha + j\beta\end{aligned}$$

衰减常数

$$\alpha = 6.64 \times 10^{-3}$$

相位常数

$$\beta = 40.59 \times 10^{-3} \text{ rad/m}$$

波速

$$v = \frac{\omega}{\beta} = \frac{2\pi \times 1.5 \times 10^6}{40.59 \times 10^{-3}} = 2.322 \times 10^8 \text{ m/s}$$

3. 无畸变传输线

当传输线的衰减常数 α 不是频率的函数，相位常数 β 与 ω 成正比时，传输的信号不会发生畸变。

$$\gamma = \alpha + j\beta = \alpha + j\omega K$$

两种方法：

① 采用无损或低损耗传输线

$$\alpha \approx \frac{1}{2} \left[R_0 \sqrt{\frac{C_0}{L_0}} + G_0 \sqrt{\frac{L_0}{C_0}} \right] \quad \beta = \omega \sqrt{L_0 C_0}$$

此时 $v = \frac{1}{\sqrt{L_0 C_0}} \quad Z_c = \sqrt{\frac{L_0}{C_0}} = \sqrt{\frac{R_0}{G_0}}$

**注意**

无损耗线一定是无畸变线，
无畸变线不一定是无损耗线。

② 采用满足无畸变条件的传输线

$$\begin{aligned} \gamma &= \sqrt{(R_0 + j\omega L_0)(G_0 + j\omega C_0)} \\ &= \sqrt{R_0 G_0} \sqrt{\left(1 + \frac{j\omega L_0}{R_0}\right) \left(1 + \frac{j\omega C_0}{G_0}\right)} \end{aligned}$$

令

$$\frac{L_0}{C_0} = \frac{R_0}{G_0}$$

无畸变条件

此时 $\alpha = \sqrt{R_0 G_0}, \beta = \omega \sqrt{L_0 C_0}$

$$v = \frac{1}{\sqrt{L_0 C_0}} \quad Z_c = \sqrt{\frac{L_0}{C_0}} = \sqrt{\frac{R_0}{G_0}}$$

例 $Z_c=50\Omega$ 的无畸变线， $\alpha=1.15\times 10^{-3}\text{Np/m}$ ， $C_0=100\text{pF/m}$ ，求：1) R_0 、 G_0 、 L_0 ；2) 波速；3) 电压传输至1km处及5km处电压振幅降低的百分率。

解 1) 无畸变线满足

$$\frac{L_0}{C_0} = \frac{R_0}{G_0} \quad \alpha = \sqrt{R_0 G_0} \quad Z_c = \sqrt{\frac{L_0}{C_0}} = \sqrt{\frac{R_0}{G_0}}$$

代入电容值，联立求解得：

$$R_0 = \alpha Z_0 = 1.15 \times 10^{-3} \times 50 = 0.057 \text{ } \Omega/\text{m}$$

$$L_0 = C_0 Z_0^2 = 10^{-10} \times 50^2 = 0.25 \times 10^{-6} \text{ H/m}$$

$$G_0 = \frac{R_0 C_0}{L_0} = \frac{R_0}{Z_0^2} = \frac{0.057}{50^2} = 22.8 \times 10^{-6} \text{ S/m}$$

2) 波在无畸变传输线传送的速度

$$v = \frac{\omega}{\beta} = \frac{1}{\sqrt{L_0 C_0}} = \frac{1}{\sqrt{0.25 \times 10^{-6} \times 10^{-10}}} = 2 \times 10^8 \text{ m/s}$$

3) 沿传输线间隔 l 距离的两电压振幅的比值为：

$$\frac{U(x_2)}{U(x_1)} = e^{-\alpha l}$$

相距1km处

$$\frac{U(x_2)}{U(x_1)} = e^{-1000\alpha} = e^{-1.15} = 0.317 = 31.7\%$$

相距5km处

$$\frac{U(x_2)}{U(x_1)} = e^{-5000\alpha} = e^{-5.75} = 0.0032 = 0.32\%$$

18.5 无损耗传输线

构成传输线的导体是理想导体 $R_0=0$ ，线间的介质是理想介质 $G_0=0$ ，这种传输线称为无损耗传输线。低损耗线可以近似看作无损耗线。

1. 无损耗传输线的方程及其解

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} + L_0 \frac{\partial i}{\partial t} = 0 \\ \frac{\partial i}{\partial x} + C_0 \frac{\partial u}{\partial t} = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = L_0 C_0 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \\ \frac{\partial^2 i}{\partial x^2} = L_0 C_0 \frac{\partial^2 i}{\partial t^2} \end{cases}$$

在正弦稳态时：

$$\begin{cases} \frac{d^2 \dot{U}}{dx^2} = -\omega^2 L_0 C_0 \dot{U} = \gamma^2 \dot{U} \\ -\frac{d^2 \dot{I}}{dx^2} = -\omega^2 L_0 C_0 \dot{I} = \gamma^2 \dot{I} \end{cases}$$

令： $Z_0 = j\omega L_0$

单位长度的电感

$$Y_0 = j\omega C_0$$

单位长度的电容

$$\gamma = \sqrt{Z_0 Y_0} = \alpha + j\beta = j\omega \sqrt{L_0 C_0}$$

$$\alpha = 0$$

$$\beta = \omega \sqrt{L_0 C_0}$$

方程的解

$$\begin{aligned}\dot{U}(x) &= \dot{U}^+ e^{-j\beta x} + \dot{U}^- e^{j\beta x} \\ \dot{I}(x) &= \dot{I}^+ e^{-j\beta x} + \dot{I}^- e^{j\beta x}\end{aligned}$$

瞬时式

$$u(x, t) = \sqrt{2}U^+ \cos(\omega t - \beta x + \theta_{u1}) + \sqrt{2}U^- \cos(\omega t + \beta x + \theta_{u2})$$

$$i(x, t) = \sqrt{2}I^+ \cos(\omega t - \beta x + \theta_{i1}) + \sqrt{2}I^- \cos(\omega t + \beta x + \theta_{i2})$$

2. 无损耗传输线的传输参数

无损耗均匀传输线的特性阻抗、传播常数、波的相速度和波长由传输线分布参数 L_0 、 C_0 和频率决定。

① 传播常数

$$\gamma = j\beta \quad \beta = \omega\sqrt{L_0C_0}$$

与频率成
线性关系

② 特性阻抗

$$Z_c = \frac{\dot{U}^+}{\dot{I}^+} = -\frac{\dot{U}^-}{\dot{I}^-} = \sqrt{\frac{L_0}{C_0}} \Omega$$

实数

③ 相速度

$$v = \frac{\omega}{\beta} = \frac{1}{\sqrt{L_0C_0}}$$

常数

④ 波长

$$\lambda = \frac{2\pi}{\beta} = vT = \frac{1}{f\sqrt{L_0C_0}}$$

例 100m长的无损耗同轴传输线，总电感与总电容分别为 $27.72\mu\text{H}$ 和 180pF 。求(1) $f=100\text{kHz}$ 时的 v 与 β ；(2) 传输线的特性阻抗；(3) 求传输线上的迟延。

解 (1) 传输线单位长度的电感与电容为

$$L_0 = \frac{27.72 \times 10^{-6}}{100} = 0.2772 \mu\text{H} \quad C_0 = \frac{180 \times 10^{-12}}{100} = 1.8 \text{pF}$$

$$\rightarrow v = \frac{1}{\sqrt{L_0 C_0}} = 1.416 \times 10^8 \text{ m/s}$$

$$\beta = \frac{\omega}{v} = \frac{2\pi \times 100 \times 10^3}{1.416 \times 10^8} = 4.439 \times 10^{-3} \text{ rad/m}$$

(2) 特性阻抗

$$Z_c = \sqrt{\frac{L_0}{C_0}} = \sqrt{\frac{0.2772 \times 10^{-6}}{1.8 \times 10^{-12}}} = 39.243 \quad \Omega$$

(3) 传输线的延迟为

$$t = \frac{l}{v} = \frac{100}{1.416 \times 10^8} = 706.2 \times 10^{-9} \quad \text{s}$$

3. 给定边界条件下方程的解

① 已知始端电压 $\dot{U}_1$ 和电流 $\dot{I}_1$ ($x=0$) 的解

$$\begin{cases} \dot{U}(x) = \dot{U}_1 \operatorname{ch} \gamma x - Z_c \dot{I}_1 \operatorname{sh} \gamma x \\ \dot{I}(x) = -\frac{\dot{U}_1}{Z_c} \operatorname{sh} \gamma x + \dot{I}_1 \operatorname{ch} \gamma x \end{cases}$$

$$\operatorname{ch} \gamma x = \operatorname{ch} j\beta x = \frac{e^{j\beta x} + e^{-j\beta x}}{2} = \cos \beta x \quad \operatorname{sh} \gamma x = j \sin \beta x$$

$$\begin{cases} \dot{U}(x) = \dot{U}_1 \cos \gamma x - jZ_c \dot{I}_1 \sin \gamma x \\ \dot{I}(x) = -j\frac{\dot{U}_1}{Z_c} \sin \gamma x + \dot{I}_1 \cos \gamma x \end{cases}$$

② 已知终端电压 $\dot{U}_2$ 和电流 $\dot{I}_2$ ($x'=0$) 的解

$$\begin{cases} \dot{U}(x') = \dot{U}_2 \cos \beta x' + jZ_c \dot{I}_2 \sin \beta x' \\ \dot{I}(x') = \frac{\dot{U}_2}{Z_c} j \sin \beta x' + \dot{I}_2 \cos \beta x' \end{cases}$$

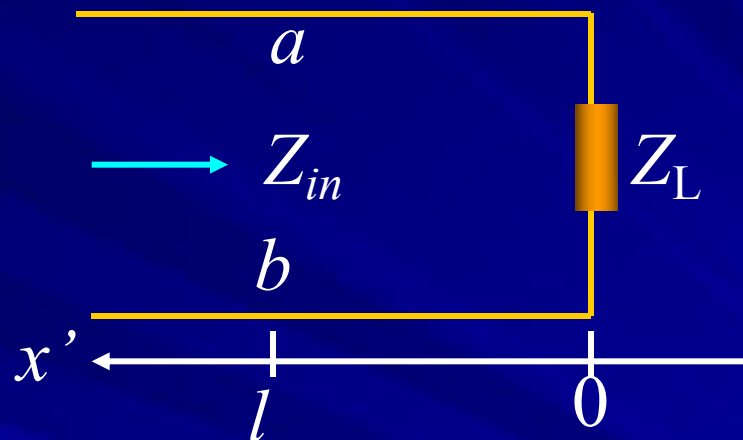
4. 无损耗均匀传输线的入端阻抗

传输线上任意点的入端阻抗等于该点的总电压与总电流之比：

$$Z_{in}(x') = \frac{\dot{U}(x')}{\dot{I}(x')} = \frac{\dot{U}_2 \cos \beta x' + jZ_0 \dot{I}_2 \sin \beta x'}{\dot{I}_2 \cos \beta x' + j \frac{\dot{U}_2}{Z_c} \sin \beta x'}$$

$$Z_L = \frac{\dot{U}_2}{\dot{I}_2} \rightarrow Z_{in}(x') = Z_C \frac{Z_L + jZ_0 \tan \beta x'}{Z_C + jZ_L \tan \beta x'}$$

a, b 端的入端阻抗



$$Z_{in}(l) = Z_C \frac{Z_L + jZ_C \tan \frac{2\pi}{\lambda} l}{Z_C + jZ_L \tan \frac{2\pi}{\lambda} l}$$



结论

- ① 入端阻抗和传输线的特性阻抗、工作频率、传输线的长度 l 及终端负载有关。
- ② 入端阻抗每隔半个波长重复出现一次，即

$$\tan(\beta x - n\pi) = \tan(\beta x) \quad (n=0, 1, 2\cdots)$$

$$Z_{in}\left(x - \frac{\lambda}{2}n\right) = Z_{in}(x)$$



讨论 不同负载 Z_L 下 入端阻抗的变化规律

① 终端负载等于特性阻抗时的入端阻抗

$$Z_L = Z_C \quad Z_i = Z_C \frac{Z_L + jZ_C \tan \frac{2\pi}{\lambda} l}{Z_C + jZ_L \tan \frac{2\pi}{\lambda} l} = Z_C$$

特点

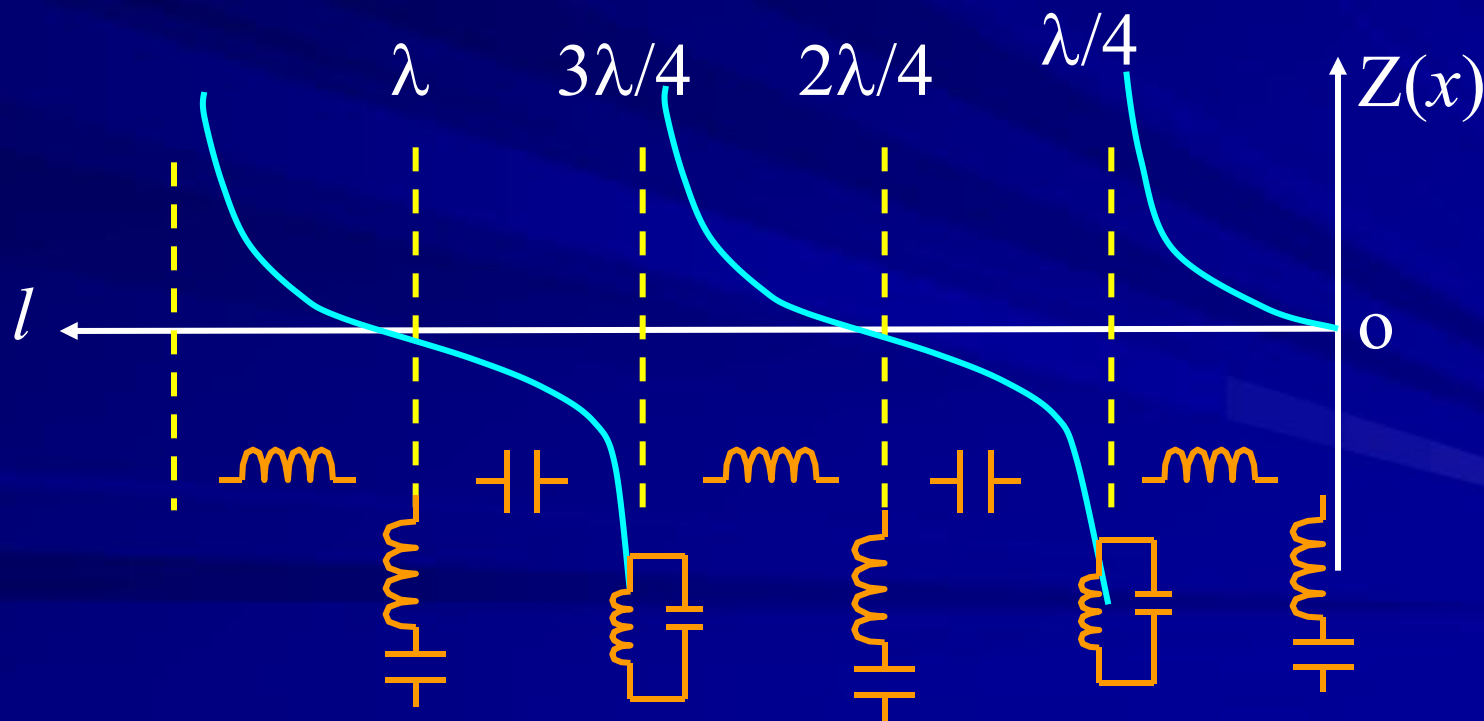
沿线各点入端阻抗等于特性阻抗，与线长无关，这种情况称为传输线匹配。

② 终端短路时的入端阻抗 $Z_L = 0$

$$Z_{in} = jZ_C \tan \frac{2\pi}{\lambda} l = jX$$

特点 入端阻抗具有纯电抗性质

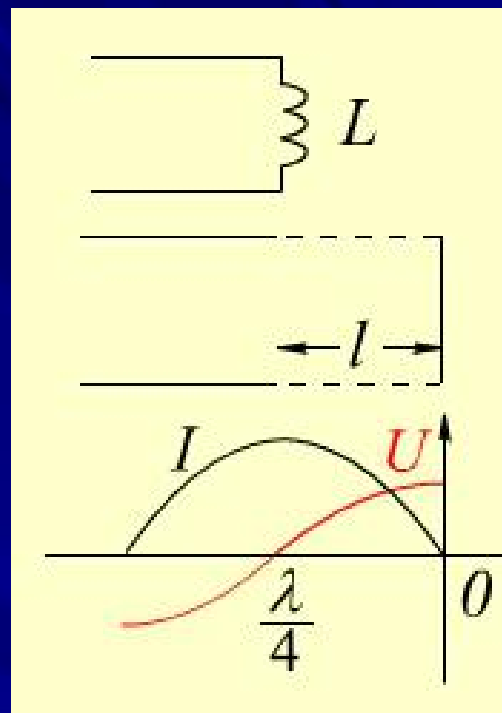
$0 < l < \frac{\lambda}{4}$	$0 < X < \infty$	感性
$\frac{\lambda}{4} < l < \frac{\lambda}{2}$	$-\infty < X < 0$	容性



实际应用中可用 $l < \frac{\lambda}{4}$ 的无损短路线等效替代一个电感。

$$l = \frac{\lambda}{2\pi} \arctan \frac{\omega L}{Z_C}$$

用等于四分之一波长的短路线作为理想的并联谐振电路。

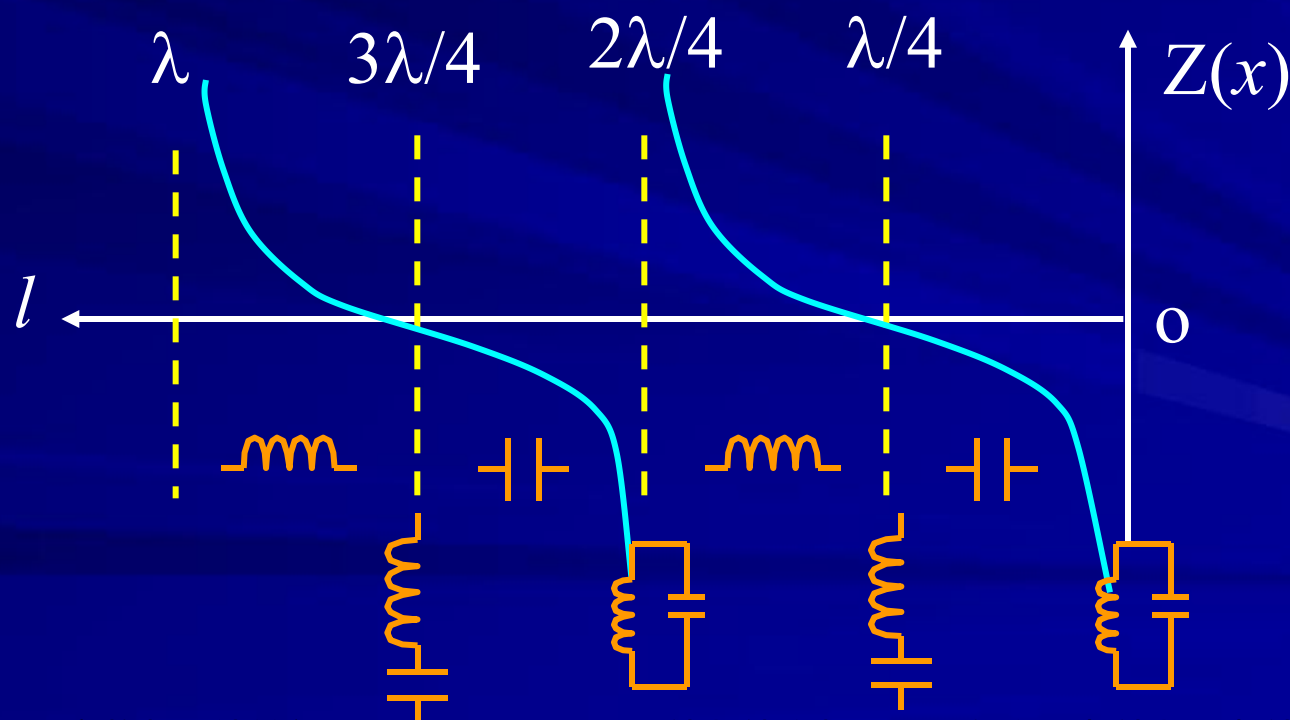


③ 终端开路时的入端阻抗 $Z_L = \infty$

$$Z_{in} = Z_C \frac{Z_L + jZ_C \tan \frac{2\pi}{\lambda} l}{Z_C + jZ_L \tan \frac{2\pi}{\lambda} l} = -jZ_C \cot \frac{2\pi}{\lambda} l = jX$$

特点 入端阻抗具有纯电抗性质

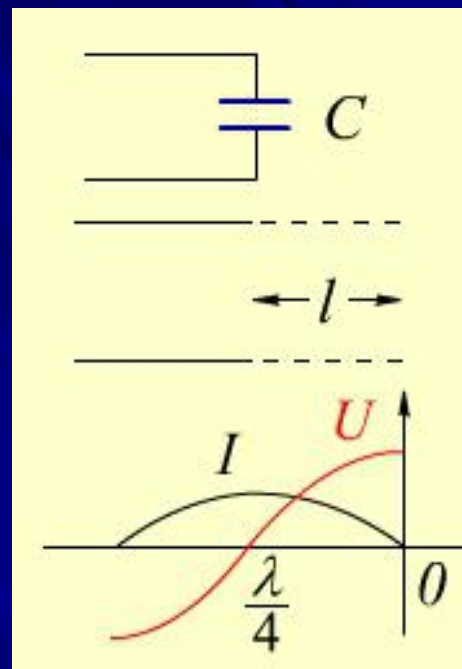
$0 < l < \frac{\lambda}{4}$	$-\infty < X < 0$	容性
$\frac{\lambda}{4} < l < \frac{\lambda}{2}$	$0 < X < \infty$	感性



实际应用中可用 $l < \frac{\lambda}{4}$ 的无损开路线等效替代一个电容。

$$l = \frac{\lambda}{2\pi} \operatorname{arccot} \frac{1}{Z_C \omega C}$$

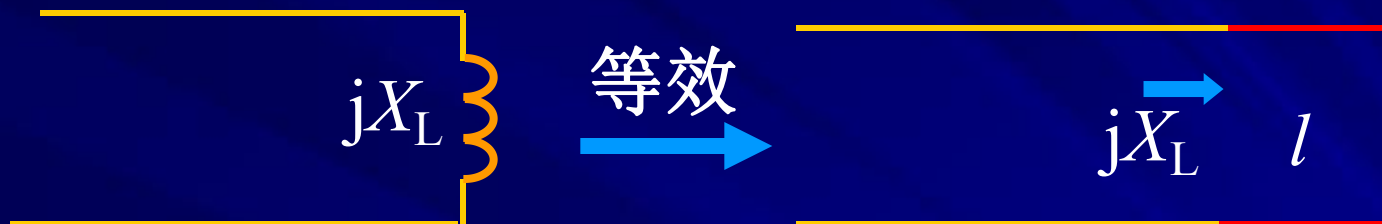
用等于四分之一波长的开路线作为理想的串联谐振电路。



④ 终端接纯电抗性负载时的入端阻抗 $Z_L = jX$

入端阻抗的分布与终端短路或开路传输线的电抗分布图类似。因为总可以在终端短路或开路传输线的适当位置找到等于 X 的电抗值。

终端接电感等效为原传输线延长 $l (< \lambda/4)$ 的短路情况。



$$jX_L = jZ_C \tan \frac{2\pi}{\lambda} l$$

$$l = \frac{\lambda}{2\pi} \arctan \frac{X_L}{Z_C}$$

终端接电容等效为原传输线延长 $l (< \lambda/4)$ 的开路情况。



$$X_C = Z_C \cot \frac{2\pi}{\lambda} l$$

$$l = \frac{\lambda}{2\pi} \operatorname{arccot} \frac{X_C}{Z_C}$$

例 $l=1.5\text{m}$ 的无损耗传输线（设 $l < \lambda/4$ ），当其终端短路和开路时分别测得入端阻抗 $Z_{is} = j103\Omega$ $Z_{i0} = -j54.6\Omega$ 试求该传输线的 Z_C 和传播常数。

解

$$Z_{is} = jZ_C \tan \frac{2\pi}{\lambda} l \quad Z_{i0} = -jZ_C \cot \frac{2\pi}{\lambda} l$$

$$Z_{i0} Z_{is} = Z_C^2 \quad Z_{is} / Z_{i0} = -(\tan \frac{2\pi}{\lambda} l)^2$$

$$Z_C = \sqrt{Z_{i0} Z_{is}} = \sqrt{j103 \times (-j54.6)} = 75 \Omega$$

$$\gamma = j\beta = j\frac{1}{l} \arctan \left(\sqrt{-\frac{Z_{ins}}{Z_{ino}}} \right)$$

$$= \frac{1}{1.5} \arctan \left(\sqrt{-\frac{j103}{-j54.6}} \right) = 0.628 \text{ rad/m}$$



结论 通过测量一段无损传输线在终端短路和开路情况下的入端阻抗，可以计算出该传输线的特性阻抗和传播常数。

⑤ $\lambda/4$ 线段的入端阻抗

当 $l = \lambda/4$ 或 $l = (2n-1)\lambda/4$ 时 $\tan \frac{2\pi}{\lambda} l \rightarrow \infty$

$$Z_i = Z_C \frac{Z_L + jZ_C \tan \frac{2\pi}{\lambda} l}{Z_C + jZ_L \tan \frac{2\pi}{\lambda} l} = \frac{Z_C^2}{Z_L}$$

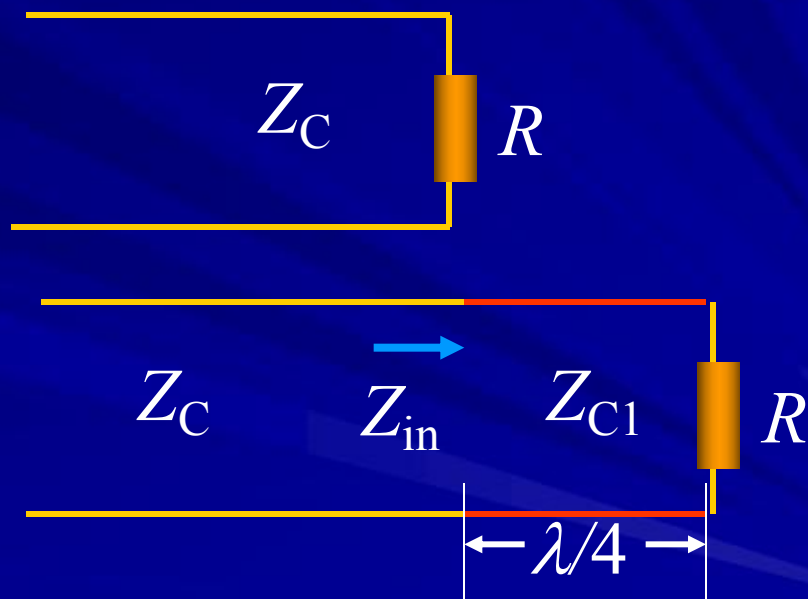
特点

负载阻抗经过 $\lambda/4$ 无损耗传输线变换到输入端后等于它的倒数与特性阻抗平方的乘积。利用 $\lambda/4$ 线的这一阻抗特性可作成 $\lambda/4$ 阻抗变换器，以达到传输线阻抗匹配。

当 $Z_L=R$ ，接入 $\lambda/4$ 无损线

$$\text{令: } Z_{in} = Z_{C1}^2 / R = Z_C$$

$$\rightarrow Z_{C1} = \sqrt{RZ_C}$$



例 使用 $\lambda/4$ 阻抗变换器使图示负载和传输线匹配，决定 $\lambda/4$ 线的特性阻抗。

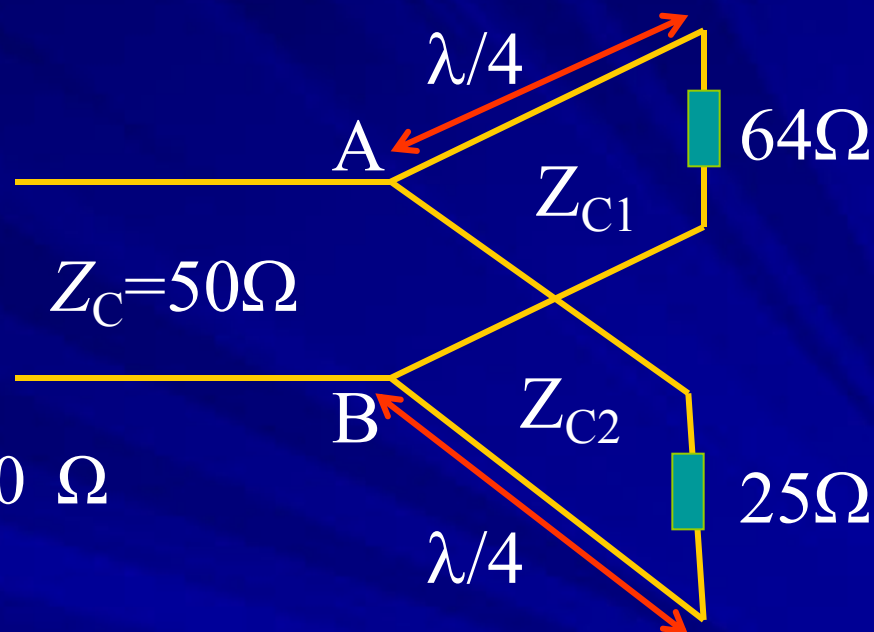
解 匹配时

$$Z_{AB} = R_{i1} // R_{i2} = 50\Omega$$

$$\rightarrow R_{i1} = R_{i2} = 100\Omega$$

$$Z_{C1} = \sqrt{R_{L1}R_{i1}} = \sqrt{100 \times 64} = 80\ \Omega$$

$$Z_{C2} = \sqrt{R_{L2}R_{i2}} = \sqrt{100 \times 25} = 50\ \Omega$$



⑥ $\lambda/2$ 线段的入端阻抗

当 $l = \lambda/2$ 或 $l = n\lambda/2$ 时 $\tan \frac{2\pi}{\lambda} l = 0$

$$Z_i = Z_C \frac{Z_L + jZ_C \tan \frac{2\pi}{\lambda} l}{Z_C + jZ_L \tan \frac{2\pi}{\lambda} l} = Z_L$$

特点

负载阻抗经过 $\lambda/2$ 无损传输线变换到输入端后仍等于其本来的阻抗，说明传输线上的阻抗分布具有 $\lambda/2$ 的周期性。

5. 无损耗均匀传输线的工作状态

传输线终端所接负载不同，反射系数就不同，线上波的分布即传输线的工作状态不同。按照不同负载，可将传输线的工作状态分为行波、驻波和行驻波三种类型。

① 行波状态 → 传输线上只有入射波

$$n = 0 \begin{cases} \text{a. 传输线处于匹配状态 } Z_L = Z_C \\ \text{b. 传输线无限长} \end{cases}$$

$$\dot{U}(x) = \dot{U}^+ e^{-j\beta x} \quad \dot{I}(x) = \frac{\dot{U}^+}{Z_C} e^{-j\beta x}$$



特点 ① 沿线电压、电流振幅不变；

② 沿线电压、电流同相位；

③ 电源发出的能量全部被负载吸收，传输效率最高；

④ 沿线的入端阻抗为： $Z_i = \frac{\dot{U}(z)}{\dot{I}(z)} = Z_C$

② 驻波状态

→ 传输线上出现全反射 $|n| = 1$

$$n = \frac{Z_L - Z_C}{Z_L + Z_C} \begin{cases} \text{a. 终端短路} & Z_L = 0, & n = -1 \\ \text{b. 终端开路} & Z_L = \infty, & n = 1 \\ \text{c. 终端接纯电抗} \end{cases}$$

$$Z_L = \pm jX, \quad |n| = 1$$

如 $Z_L = \infty$ $n = 1$ 则

$$\dot{U}(x') = \dot{U}^+ (e^{-j\beta x'} + e^{j\beta x'}) = 2\dot{U}^+ \cos \beta x'$$

$$\dot{I}(x') = \frac{\dot{U}^+}{Z_c} (e^{-j\beta x'} - e^{j\beta x'}) = -\frac{2j\dot{U}^+}{Z_c} \sin \beta x'$$

$$u(x', t) = 2\sqrt{2}U^+ \cos \beta x' \cos(\omega t)$$

驻波

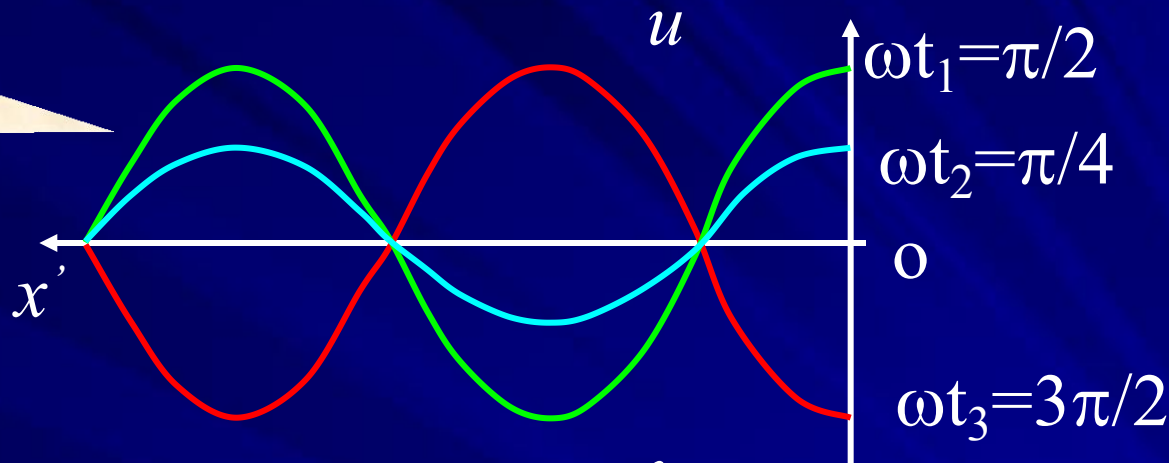
$$i(x', t) = 2\sqrt{2}U^+ \sin \beta x' \cos(\omega t - 90^\circ)$$



特点

- ① 沿线电压、电流无波动性，振幅是位置 x 的函数，最大值和零值出现的位置固定不变，称为驻波；

电压沿线作余弦分布



$$\text{当 } \beta x' = n\pi \quad x' = \frac{n\pi}{\beta} = \frac{n\lambda}{2} \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

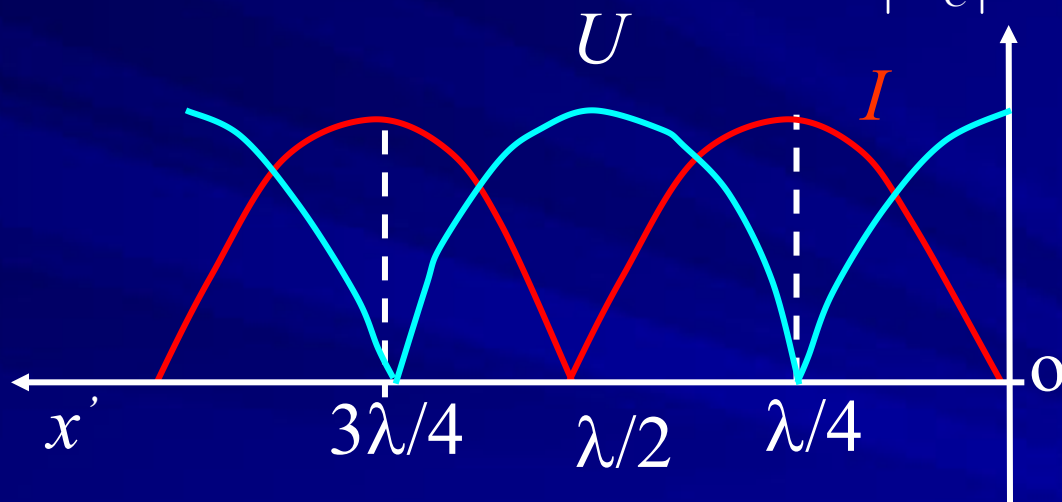
出现电压振幅绝对值最大点称为波腹。 $|U_{\max}| = 2U^+$

$$\text{当 } \beta x' = \frac{2n+1}{2}\pi, \quad x' = \frac{(2n+1)\lambda}{4} \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

出现电压振幅绝对值最小点称为波节。 $U_{\min} = 0$

② 电压和电流在空间上相差 $\pi/2$ ，电压波腹点为电流波节点。有效值沿线分布：

$$|\dot{U}(x')| = U^+ \cos \beta x' \quad |\dot{I}(x')| = \frac{U^+}{|Z_c|} \sin \beta x'$$



③ 电压和电流在时间上相差 90° ，沿线无能量传播，电能与磁能在 $\lambda/4$ 空间相互转换。

③ 行驻波状态 $\rightarrow$ 传输线上既有行波又有驻波

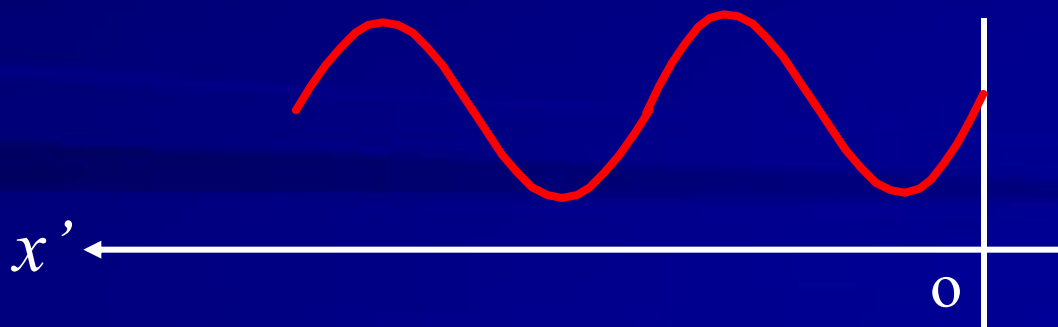
$$0 < |n| < 1 \quad Z_L = R + jX \neq Z_c \quad \text{部分电磁波反射}$$

$$\dot{U}(x') = \dot{U}^+ e^{-j\beta x'} + \dot{U}^- e^{j\beta x'} + \dot{U}^- e^{-j\beta z} - \dot{U}^- e^{-j\beta z}$$

$$= (\dot{U}^+ - \dot{U}^-) e^{-j\beta x'} + \dot{U}^- (e^{j\beta x'} + e^{-j\beta x'})$$

$$= \dot{U}^+ (1 - n) e^{-j\beta x'} + 2\dot{U}^- \cos \beta x' \quad = \text{行波} + \text{驻波}$$

$$\dot{I}(x') = \frac{\dot{U}^+}{Z_c} (1 - n) e^{-j\beta x'} - j \frac{2\dot{U}^-}{Z_c} \sin \beta x'$$



$$U^+ < U_{\max} < 2U^+$$

$$0 < U_{\min} < U^+$$

18.6 无损耗线方程的通解

当传输线发生换路时将引起过渡过程(波过程)

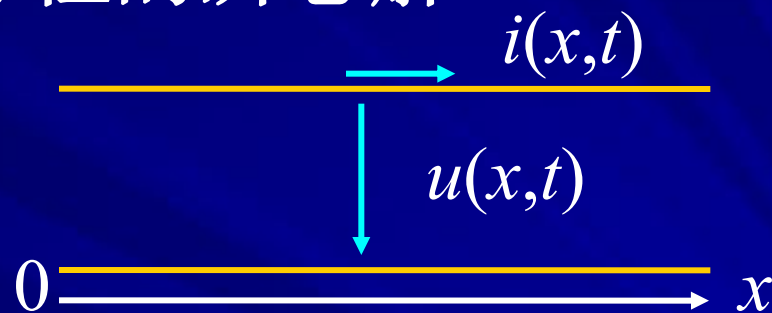
1. 无损耗均匀传输线方程的瞬态解

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} + L_0 \frac{\partial i}{\partial t} = 0 \\ \frac{\partial i}{\partial x} + C_0 \frac{\partial u}{\partial t} = 0 \end{cases}$$

$$v = \frac{1}{\sqrt{L_0 C_0}}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = L_0 C_0 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \\ \frac{\partial^2 i}{\partial x^2} = L_0 C_0 \frac{\partial^2 i}{\partial t^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 i}{\partial t^2} \end{cases}$$

波动方程



得通解：

$$\begin{cases} u(x,t) = f_1\left(t - \frac{x}{v}\right) + f_2\left(t + \frac{x}{v}\right) = u^+ + u^- \\ i(x,t) = \sqrt{\frac{C_0}{L_0}} \left[f_1\left(t - \frac{x}{v}\right) - f_2\left(t + \frac{x}{v}\right) \right] = i^+ - i^- \end{cases}$$

$$\frac{u^+}{i^+} = \frac{u^-}{i^-} = \sqrt{\frac{C_0}{L_0}} = Z_c$$



注意

f_1, f_2 是具有二阶连续偏导数的待定函数，
要根据具体的边界条件和初始条件确定。

2. 通解的物理意义

$u^+ = f_1(t - \frac{x}{v})$ 的物理意义

当 $t \rightarrow t + \Delta t$ $x \rightarrow x + v\Delta t$

有 $f_1(t + \Delta t - \frac{x + v\Delta t}{v}) = f_1(t - \frac{x}{v})$

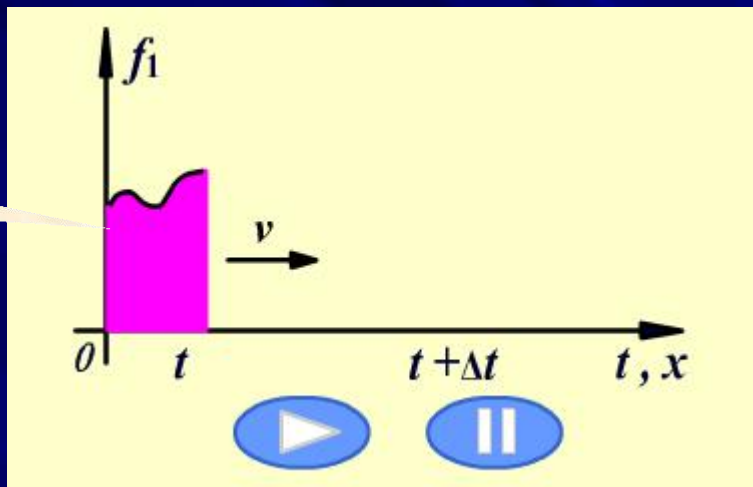


表明 在 t 时刻， x 位置的电压 u^+ 在 $t + \Delta t$ 时刻和 $x + v\Delta t$ 位置重复出现，且延迟的时间与离开前一位置的距离成比例：

$$\frac{v\Delta t}{\Delta t} = v$$

即 f_1 以有限速度 v 向 x 方向传播，称之为**入射波**。

入射波


 $u^- = f_2(x + vt)$ 的物理意义

当 $t \rightarrow t + \Delta t$ $x \rightarrow x - v\Delta t$

$$f_2\left(t + \Delta t + \frac{x - v\Delta t}{v}\right) = f_2\left(t + \frac{x}{v}\right)$$



表明 f_2 在 Δt 时间内，以速度 v 向 $(-x)$ 方向前进了 $v\Delta t$ 距离，称之为反射波。

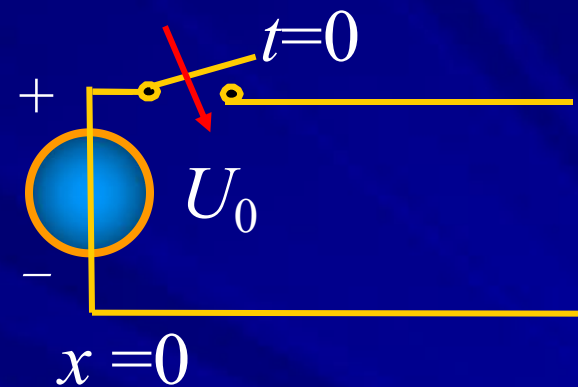
3. 半无限长无损线上波的发生

当传输线发生换路时将产生波。设传输线接直流电源，开关闭合前各处电压电流均为零。

$t=0$ 时闭合开关

边界条件： $u(0,t) = U_0 \varepsilon(t)$

$$\begin{cases} u(x,t) = f_1\left(t - \frac{x}{v}\right) = u^+ \\ i(x,t) = \sqrt{\frac{C_0}{L_0}} f_1\left(t - \frac{x}{v}\right) = i^+ \end{cases}$$

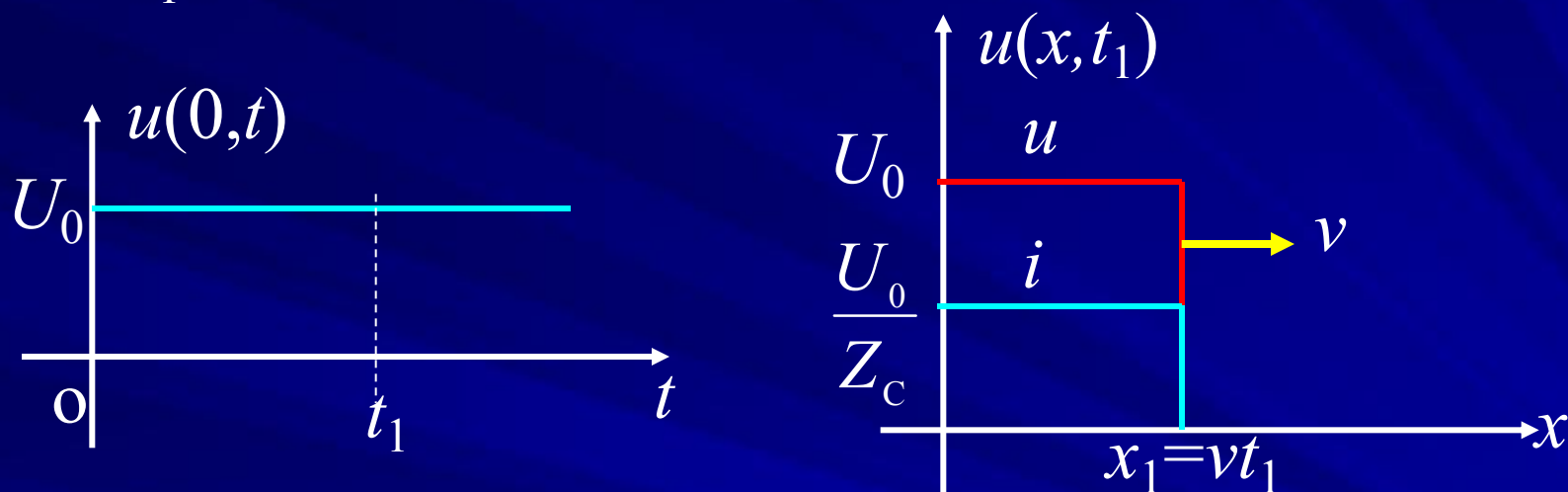


只有入射波

代入边界条件： $u(0,t) = U_0 \varepsilon(t) = f_1(t)$

$$u(x,t) = U_0 \varepsilon\left(t - \frac{x}{v}\right) \quad i(x,t) = \frac{U_0}{Z_c} \varepsilon\left(t - \frac{x}{v}\right)$$

$t=t_1$ 时电压电流沿线分布

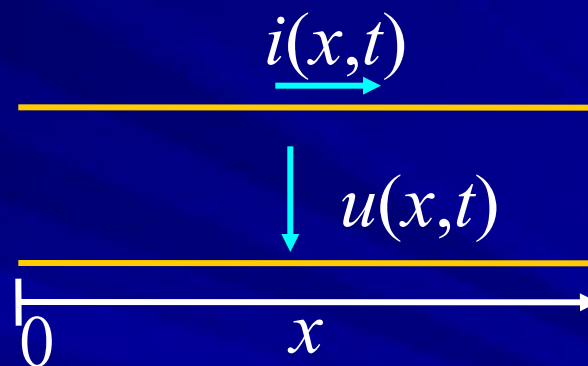
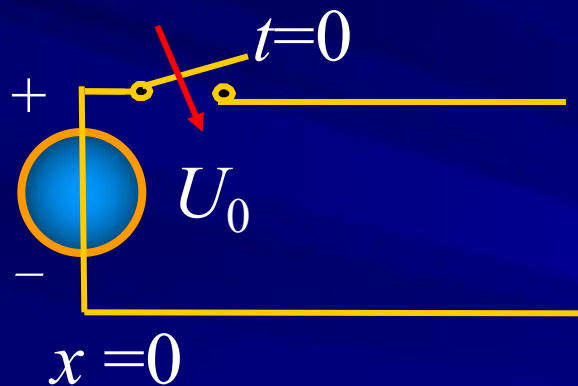


注意

波经过地方线上各处电压为 U_0 、电流为 I_0 。波未到处线上各处电压、电流均为零。

18.7 无损耗线的波过程

当传输线存在终端且不匹配的情况下，在终端将引起波的反射，因此，传输线上除了入射波以外还将存在反射波。



$$u = u^+ + u^-$$

$$i = i^+ - i^-$$

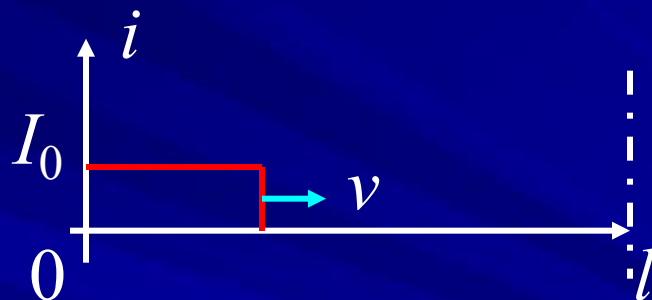
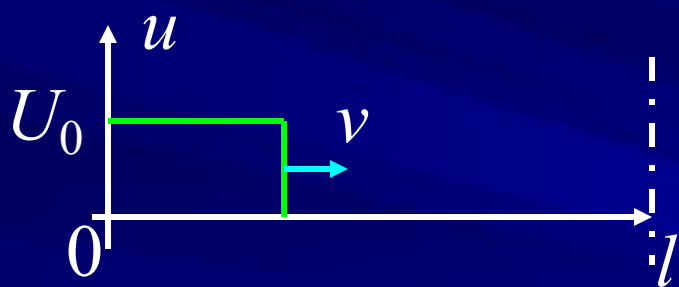
$$n = \frac{u^+}{u^-} = \frac{i^+}{i^-}$$

1. 终端开路

(1) 波过程

不同时间电压电流在传输线上分布， t 为参变量

$$0 < t < l/v$$

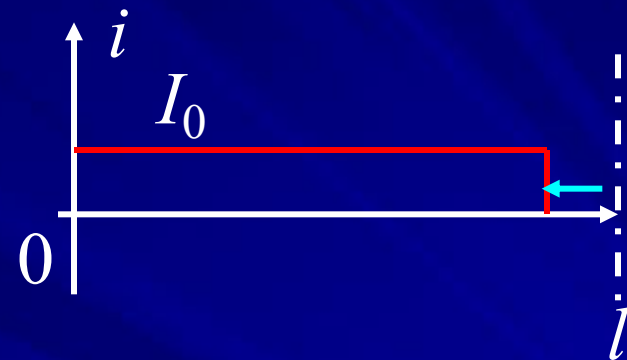
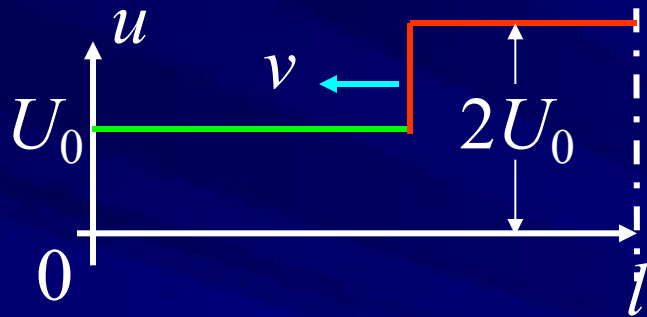


$$t = l/v \quad n=1$$

$$i_1^- = i_1^+ = I_0 \quad i = i_1^+ - i_1^- = 0$$

$$u_1^- = u_1^+ = U_0 \quad u = u_1^+ + u_1^- = 2U_0$$

$$l/v < t < 2l/v$$

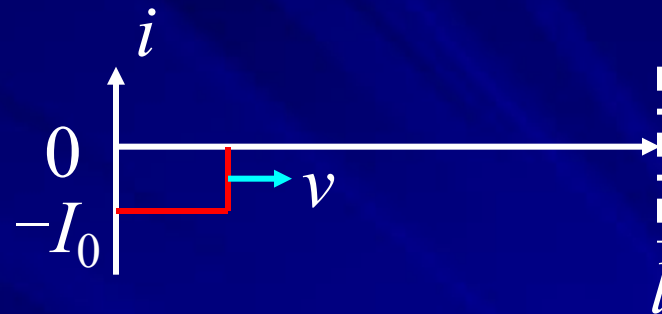
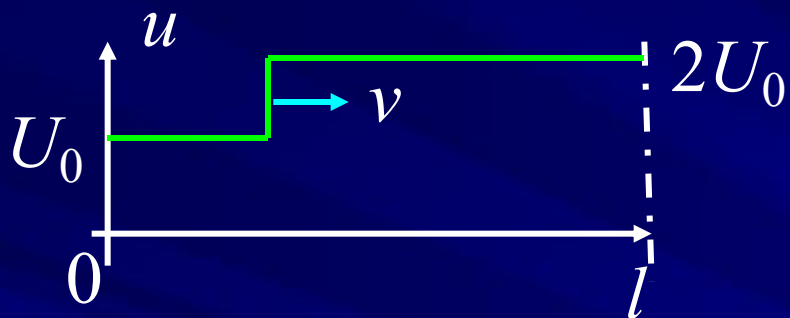


$$t = 2l/v \quad n = -1$$

$$u = \underbrace{u_1^+}_{2U_0} + \underbrace{u_1^-}_{-U_0} + \underbrace{u_2^+}_{-U_0} = U_0$$

$$i = \underbrace{i_1^+}_{0} - \underbrace{i_1^-}_{-I_0} + \underbrace{i_2^+}_{-I_0} = -I_0$$

$$2l/v < t < 3l/v$$



$$t=3l/v \quad n=1$$

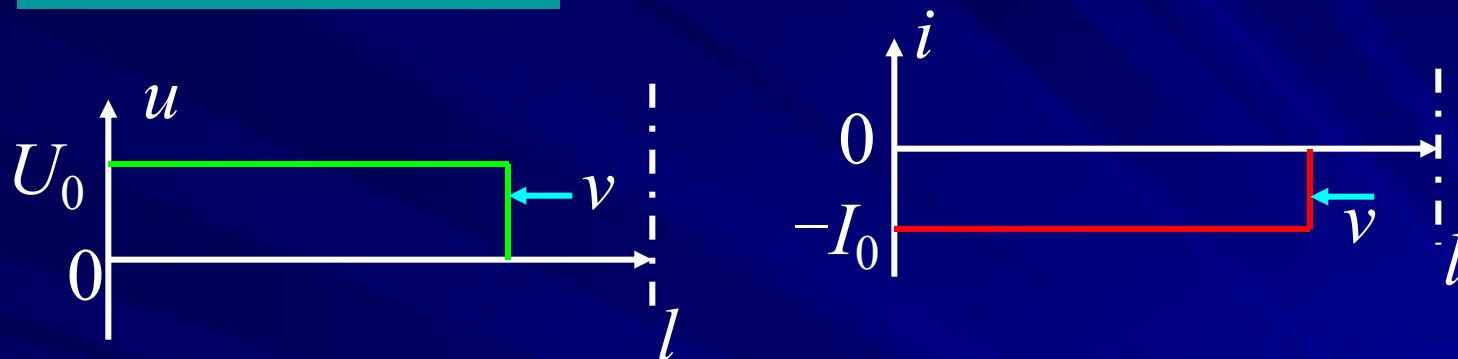
$$u_2^+ = u_2^- = -U_0$$

$$i_2^+ = i_2^- = -I_0$$

$$u = u_1^+ + u_1^- + u_2^+ + u_2^- = 0$$

$$i = i_1^+ - i_1^- + i_2^+ - i_2^- = 0$$

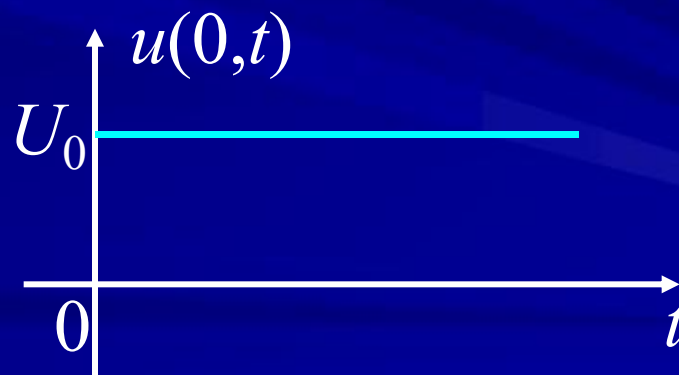
$$3l/v < t < 4l/v$$



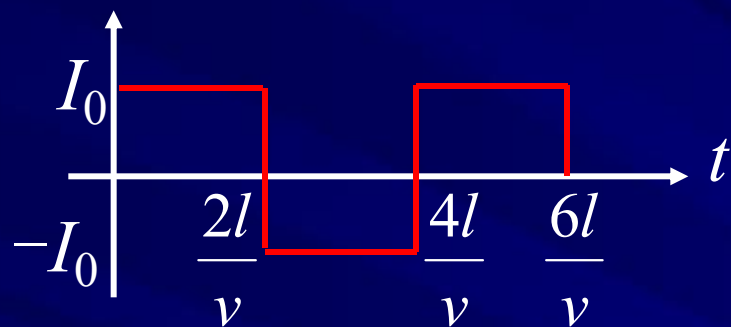
这种多次反射过程将周期性重复，周期 $T=4l/v$ 。

(2) 某处电压随 t 变化曲线

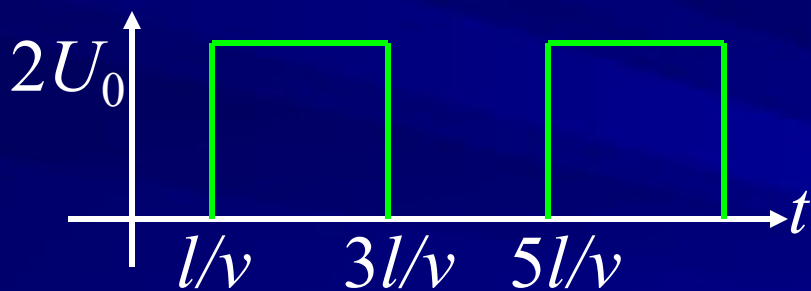
始端电压 $u(0,t)$



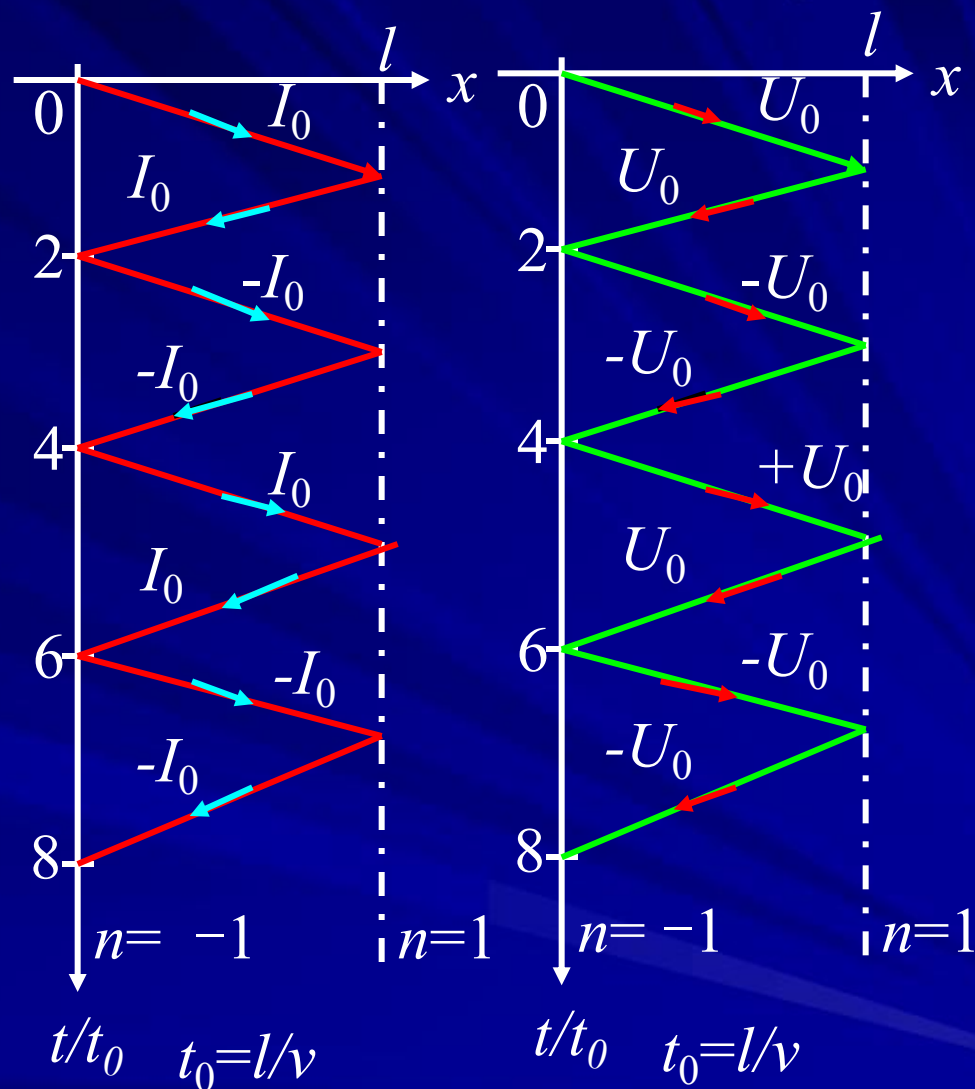
始端电流 $i(0,t)$



终端电压 $u(l,t)$



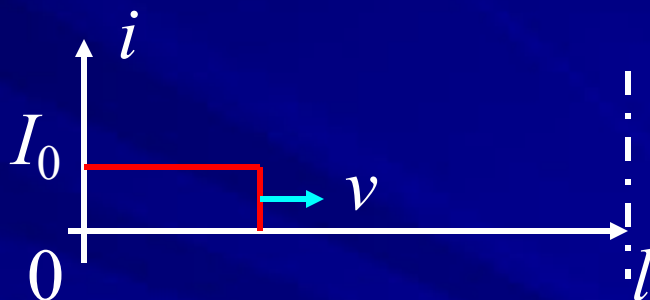
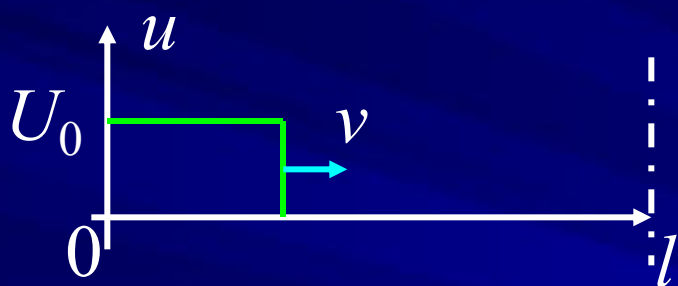
终端电流 $i(l,t)=0$



2. 终端短路

不同时间电压电流在传输线上分布， t 为参变量

$$0 < t < l/v$$



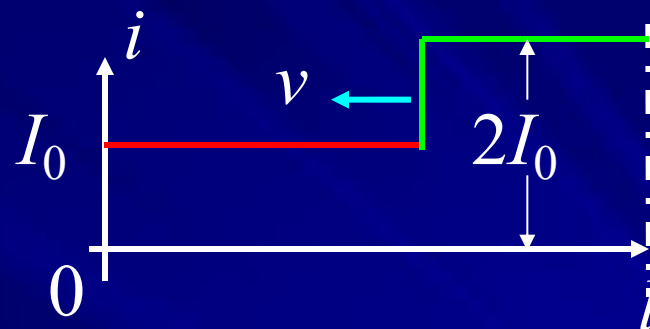
$$t = l/v \quad n = -1$$

$$\dot{i}_1^- = \dot{i}_1^+ = I_0 \quad i = i_1^+ - i_1^- = 2I_0$$

$$u_1^- = u_1^+ = U_0$$

$$u = u_1^+ + u_1^- = 0$$

$$l/v < t < 2l/v$$



$$t = 2l/v \quad n=1$$

$$u = \underbrace{u_1^+}_{0} + u_1^- + \underbrace{u_2^+}_{U_0} = U_0$$

$$i = \underbrace{i_1^+}_{2I_0} - i_1^- + \underbrace{i_2^+}_{I_0} = 3I_0$$

$$2l/v < t < 3l/v$$

