中国科学院 2014 年数学分析真题解析

1.求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{\sin\frac{\pi}{n}}{n+1}+\frac{\sin\frac{2\pi}{n}}{n+\frac{1}{2}}+\cdots+\frac{\sin\frac{\pi}{n}}{n+\frac{1}{n}}\right)$。

【解答】

$$\frac{\sin\frac{\pi}{n}}{n+1}+\frac{\sin\frac{2\pi}{n}}{n+\frac{1}{2}}+\cdots+\frac{\sin\pi}{n+\frac{1}{n}}=\sum_{k=1}^{n}\frac{\sin\frac{k\pi}{n}}{n+\frac{1}{k}}\le\frac{1}{\pi}\frac{\pi}{n}\sum_{k=1}^{n}\sin\frac{k\pi}{n}\to\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin x\,dx=\frac{2}{\pi}$$

$$\frac{\sin\frac{\pi}{n}}{n+1}+\frac{\sin\frac{2\pi}{n}}{n+\frac{1}{2}}+\cdots+\frac{\sin\pi}{n+\frac{1}{n}}=\sum_{k=1}^{n}\frac{\sin\frac{k\pi}{n}}{n+\frac{1}{k}}\ge\frac{n}{\pi(n+1)}\frac{\pi}{n}\sum_{k=1}^{n}\sin\frac{k\pi}{n}\to\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin x\,dx=\frac{2}{\pi}$$

故 $\lim\left(\frac{\sin\frac{\pi}{n}}{\cdots}+\frac{\sin\frac{2\pi}{n}}{\cdots}+\cdots+\frac{\sin\frac{\pi}{n}}{\cdots}\right)=\frac{2}{\pi}$。