

## 中国科学技术大学 2009 年数学分析真题解析

一.1. 判断  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1+2i)^n}{3^n - 2^n}$  是否绝对收敛。

2. 设  $I$  为有限区间， $f(x)$  在  $I$  上有定义，试证  $f(x)$  在  $I$  上一致连续的充要条件是  $f$  把 Cauchy 列映射成 Cauchy 列。

【解答】

1.  $\left| \frac{(1+2i)^n}{3^n - 2^n} \right| = \frac{(\sqrt{5})^n}{3^n - 2^n} \sim \left( \frac{\sqrt{5}}{3} \right)^n$ ，级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{\sqrt{5}}{3} \right)^n$  收敛，故  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1+2i)^n}{3^n - 2^n}$  绝对收敛。

2. 必要性

若  $f(x)$  在  $I$  上一致连续，则对任意  $\varepsilon > 0$ ，存在  $\delta > 0$ ，使得对任意  $x, y \in I$ ，

只要  $|x - y| < \delta$ ，就有  $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ 。现在任取 Cauchy 列  $\{x_n\} \subset I$ ，则存在