

中国科学院 2002 年数学分析真题解析

1.(10分) 计算

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{x} \frac{a^x - 1}{a - 1} \right)^{\frac{1}{x}} \quad (a > 0, a \neq 1)$$

【解答】

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{x} \right)^{\frac{1}{x}} = 1。若 a > 1, 则 \lim_{x \rightarrow +\infty} (a-1)^{\frac{1}{x}} = 1,$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(a^x - 1)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln a^x + \ln \frac{a^x - 1}{a^x}}{x} = \ln a + \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1 - a^{-x})}{x} = \ln a$$

故 $\lim_{x \rightarrow +\infty} (a^x - 1)^{\frac{1}{x}} = a$ 。若 $0 < a < 1$, 则 $\lim_{x \rightarrow +\infty} (1 - a)^{\frac{1}{x}} = 1$,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (1 - a^x)^{\frac{1}{x}} = \left[\lim_{x \rightarrow +\infty} (1 - a^x) \right]^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x}} = 1$$

因此 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{x} \frac{a^x - 1}{a - 1} \right)^{\frac{1}{x}} = 1$ 。