

中国科学院 2000 年数学分析真题解析

1.(15 分) 定义函数

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3}{x^2 + y^2}, & x^2 + y^2 > 0 \\ 0, & x = y = 0 \end{cases}$$

证明函数 $f(x, y)$ 在 $(0, 0)$ 处连续但不可微。

【解答】

$$|f(x, y)| = \left| \frac{x^3}{x^2 + y^2} \right| \leq |x| \rightarrow 0, \quad (x, y) \rightarrow (0, 0), \quad \text{故 } \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} f(x, y) = 0 = f(0, 0), \quad \text{故}$$

$f(x, y)$ 在 $(0, 0)$ 处连续。

$$f_x(0, 0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x, 0) - f(0, 0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3}{x^2} = 1$$