第一章 光的电磁波理论

1-1.计算由 $\boldsymbol{E}=(-2\boldsymbol{i}+2\sqrt{3}\boldsymbol{j})\exp\left[i(\sqrt{3}x+y+6\times10^{8}t)\right]$ 表示的平面波电矢量的振动方向、传播方向、相位速度、振幅、频率、波长。

解：由题意：$E_x=-2e^{i(\sqrt{3}x+y+6\times10^{8}t)}$

$$E_y=2\sqrt{3}e^{i(\sqrt{3}x+y+6\times10^{8}t)}$$

$\therefore \dfrac{E_y}{E_x}=-\sqrt{3}$ $\qquad\therefore$振动方向为：$-\vec{i}+\sqrt{3}\vec{j}$

由平面波电矢量的表达式： $k_x=\sqrt{3}$ $\qquad k_y=1$

$\therefore$传播方向为： $\sqrt{3}\vec{i}+\vec{j}$

平面电磁波的相位速度为光速： $c=3\times10^{8}$ m/s

振幅：$E_0=\sqrt{E_{0x}^2+E_{oy}^2}=\sqrt{(-2)^2+(2\sqrt{3})^2}=4$ V/m

频率：$f=\dfrac{\omega}{2\pi}=\dfrac{6\times10^{8}}{2\pi}=\dfrac{3}{\pi}\times10^{8}$ Hz

波长：$\lambda=\dfrac{c}{f}=\pi$ m

1-2.光学教程 例 4-2

1-3. 试确定下列各组光波表示式所代表的偏振态：

（1）$E_x=E_0\sin(\omega t-kz)$，$E_y=E_0\cos(\omega t-kz)$

（2）$E_x=E_0\cos(\omega t-kz)$，$E_y=E_0\cos(\omega t-kz+\pi/4)$

（3）$E_x=E_0\sin(\omega t-kz)$，$E_x=-E_0\sin(\omega t-kz)$

解：（1）$\because E_x=E_0\sin(\omega t-kz)=E_0\cos(\omega t-kz-\dfrac{\pi}{2})$

$\therefore \varphi=\varphi_y-\varphi_x=\dfrac{\pi}{2}$

$\therefore$ 为右旋圆偏振光。

（2）$\varphi=\varphi_y-\varphi_x=\dfrac{\pi}{4}$

$\therefore$ 为右旋椭圆偏振光，椭圆长轴沿 y＝x

（3）$\varphi=\varphi_y-\varphi_x=0$

$\therefore$ 为线偏振光，振动方向沿 y＝－x

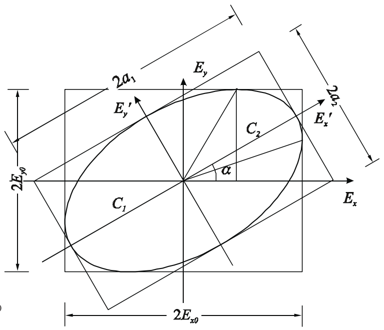
1-6.在椭圆偏振光中，设椭圆的长轴与 x 轴的夹角为 α，椭圆的长、短轴各为 $2a_1$、$2a_2$，E_x、E_y 的相位差为 φ。求证：$\tan2\alpha=\dfrac{2E_{x0}E_{y0}}{E_{x0}^2-E_{y0}^2}\cos\varphi$

证：由图可以看出：$\tan\alpha=\dfrac{a_2}{a_1}$， 所以：$\tan2\alpha=\dfrac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}=\dfrac{2\dfrac{a_2}{a_1}}{1-(\dfrac{a_2}{a_1})^2}=\dfrac{2a_1a_2}{a_1{}^2-a_2{}^2}$

若要求证 $\tan2\alpha=\dfrac{2E_{x0}E_{y0}\cos\varphi}{E_{x0}^2-E_{y0}^2}$，可以按以下方法计算：

设 $\begin{cases}E_x=E_{x0}\cos(\omega t+\varphi)\\E_y=E_{y0}\cos(\omega t)\end{cases}$ 可得：

$$(\frac{E_x}{E_{x0}})^2+(\frac{E_y}{E_{y0}})^2-2\frac{E_x}{E_{x0}}\frac{E_y}{E_{y0}}\cos\varphi=\sin^2\varphi$$



1-4 题用图

进 行 坐 标 变 换 ：

$\begin{cases}E_x=E_x'\cos\alpha-E_y'\sin\alpha\\E_y=E_x'\sin\alpha+E_y'\cos\alpha\end{cases}$

代入上面的椭圆方程：

$$(E_x'^2\cos^2\alpha+E_y'^2\sin^2\alpha-2E_x'E_y'\sin\alpha\cos\alpha)E_{y0}^2$$
$$+(E_x'^2\sin^2\alpha+E_y'^2\cos^2\alpha+2E_x'E_y'\sin\alpha\cos\alpha)E_{x0}^2$$
$$-2(E_x'^2\sin\alpha\cos\alpha-E_y'^2\sin\alpha\cos\alpha+E_x'E_y'\cos^2\alpha-E_x'E_y'\sin^2\alpha)E_{x0}E_{y0}\cos\varphi=E_{x0}^2E_{y0}^2\sin^2\varphi$$

$$(E_x'^2\cos^2\alpha+E_y'^2\sin^2\alpha-E_x'E_y'\sin2\alpha)E_{y0}^2+(E_x'^2\sin^2\alpha+E_y'^2\cos^2\alpha+E_x'E_y'\sin2\alpha)E_{x0}^2$$
$$-((E_x'^2-E_y'^2)\sin2\alpha+2E_x'E_y'\cos2\alpha)E_{x0}E_{y0}\cos\varphi=E_{x0}^2E_{y0}^2\sin^2\varphi$$

$E_x'^2(E_{y0}^2\cos^2\alpha+E_{x0}^2\sin^2\alpha-E_{x0}E_{y0}\sin2\alpha\cos\varphi)+E_y'^2(E_{y0}^2\sin^2\alpha+E_{x0}^2\cos^2\alpha+E_{x0}E_{y0}\sin2\alpha\cos\varphi)$

$E_x'E_y'((E_{x0}^2-E_{y0}^2)\sin2\alpha-2E_{x0}E_{y0}\cos2\alpha\cos\varphi)=E_{x0}^2E_{y0}^2\sin^2\varphi$

在$(E_{x0}^2-E_{y0}^2)\sin2\alpha-2E_{x0}E_{y0}\cos2\alpha\cos\varphi=0$时，即交叉项系数为零时，这时的$E_x'$、$E_y'$轴即为椭圆的长轴和短轴。

由$(E_{x0}^2-E_{y0}^2)\sin2\alpha-2E_{x0}E_{y0}\cos2\alpha\cos\varphi=0$　解得：

$$\tan2\alpha=\frac{2E_{x0}E_{y0}}{E_{x0}^2-E_{y0}^2}\cos\varphi$$

1-7. 已知冕牌玻璃对 0.3988μm 波长光的折射率为 n=1.52546，$dn/d\lambda=-0.126$ μm^{-1}，求光在该玻璃中的相速和群速。

解：相速度：$v=\frac{c}{n}=\frac{3\times10^8}{1.52546}=1.96662\times10^8$ m/s

群速度：

$$v_g=v(1+\frac{\lambda}{n}\frac{dn}{d\lambda})=1.96662\times10^8\times(1-\frac{0.3988}{1.52546}\times0.126)=1.9018\times10^8\text{ m/s}$$

1-8. 试计算下面两种色散规律的群速度（表示式中 v 是相速度）：

（1）电离层中的电磁波，$v=\sqrt{c^2+b^2\lambda^2}$，其中 c 是真空中的光速，$\lambda$ 是介质中的电磁波波长，b 是常数。

（2）充满色散介质（$\varepsilon=\varepsilon(\omega)$，$\mu=\mu(\omega)$）的直波导管中的电磁波，$v=c\omega/\sqrt{\omega^2\varepsilon\mu-c^2a^2}$，其中 c 是真空中的光速，$a$ 是与波导管截面有关的常数。

解：（1）$\because k=\omega/v$　　$\therefore v_g=\frac{d(kv)}{dk}=v+k\frac{dv}{dk}$

$\because k=2\pi/\lambda$　　$\therefore dk=-(2\pi/\lambda^2)d\lambda$

$$\therefore v_g=v-\lambda\frac{dv}{d\lambda}=v-\lambda\frac{b^2\lambda}{\sqrt{c^2+b^2\lambda^2}}$$

$$=\sqrt{c^2+b^2\lambda^2}-\frac{b^2\lambda^2}{\sqrt{c^2+b^2\lambda^2}}=\frac{c^2}{\sqrt{c^2+b^2\lambda^2}}=\frac{c^2}{v}$$

（2）$\because \frac{dv}{dk}=\frac{dv}{d\omega}\frac{d\omega}{dk}=v_g\frac{dv}{d\omega}$

$$\therefore v_g=v+kv_g\frac{dv}{d\omega}=v+\frac{\omega}{v}v_g\frac{dv}{d\omega}$$

$$\therefore v_g=\frac{v}{1-\frac{\omega}{v}\frac{dv}{d\omega}}$$

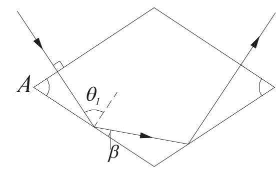
$\because v=c\omega/\sqrt{\omega^2\varepsilon\mu-c^2a^2}$　　$\therefore \frac{dv}{d\omega}=-c\frac{\frac{1}{2}\omega^3\frac{d(\varepsilon\mu)}{d\omega}+c^2a^2}{(\omega^2\varepsilon\mu-c^2a^2)^{\frac{3}{2}}}$

$$\therefore v_g=\frac{v}{1+\frac{c\omega}{v}\frac{\frac{1}{2}\omega^3\frac{d(\varepsilon\mu)}{d\omega}+c^2a^2}{(\omega^2\varepsilon\mu-c^2a^2)^{\frac{3}{2}}}}=\frac{v}{\frac{\omega^2\varepsilon\mu+\frac{1}{2}\omega^3\frac{d(\varepsilon\mu)}{d\omega}}{\omega^2\varepsilon\mu-c^2a^2}}$$

$$=\frac{v\cdot(\frac{c\omega}{v})^2}{\omega^2\varepsilon\mu+\frac{1}{2}\omega^3\frac{d(\varepsilon\mu)}{d\omega}}=\frac{c^2}{v}\cdot\frac{1}{\varepsilon\mu+\frac{1}{2}\omega\frac{d(\varepsilon\mu)}{d\omega}}$$

1-14. 产生圆偏振光的穆尼菱体如图所示，若菱体的折射率为 1.65，求顶角 A。

解：光束经过两次全反射，每次反射后 s 波和 p 波之间的位相差为：



$$\Delta\varphi=2\arctan\frac{\cos\theta_1\sqrt{\sin^2\theta_1-n^2}}{\sin^2\theta_1}$$

其中θ_1是入射角，n 为相对折射率：$n=\frac{1}{1.65}=0.606$

出射后产生圆偏振光，则需要：$2\Delta\varphi=\frac{\pi}{2}$

$$\therefore \frac{\cos\theta_1\sqrt{\sin^2\theta_1-0.606^2}}{\sin^2\theta_1}=\tan\frac{\pi}{8}$$

解得：$\theta_1=59.7°$　或　$\theta_1=40.6°$

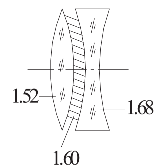
$\because$要发生两次全反射，则：$\beta\le A$

由图中几何关系可知：$A=\theta_1$　　$\beta=90°-\theta_1$

$\therefore \theta_1\ge45°$　　　$\therefore \theta_1=40.6°$不合题意

$\therefore$顶角 A 为 59.7°

1-15. 望远镜之物镜为一双胶合透镜，其单透镜的折射率分别为 1.52 和 1.68，采用折射率为 1.60 的树脂胶合。问物镜胶合前后的反射光能损失分别为多少？（假设光束通过各反射面时接近正入射）



解：系统包括 4 个反射面，由于假设光束通过各反射面时接近正入射，则未胶合时，各面的反射率为：

$$R_1=\left(\frac{n_1-1}{n_1+1}\right)^2=\left(\frac{1.52-1}{1.52+1}\right)^2=0.043$$

$$R_2=\left(\frac{n_2-1}{n_2+1}\right)^2=\left(\frac{\frac{1}{1.52}-1}{\frac{1}{1.52}+1}\right)^2=0.043$$

$$R_3=\left(\frac{n_3-1}{n_3+1}\right)^2=\left(\frac{1.68-1}{1.68+1}\right)^2=0.064$$

$$R_4=\left(\frac{n_4-1}{n_4+1}\right)^2=\left(\frac{\frac{1}{1.68}-1}{\frac{1}{1.68}+1}\right)^2=0.064$$

设入射到系统的光能为 W，则通过该系统后的光能为：

$$W_1=W(1-0.043)(1-0.043)(1-0.064)(1-0.064)=0.8W$$

∴光能损失为 20%

同理，胶合后各面的反射率为：

$$R_1=0.043 \qquad R_2=\left(\frac{n_2-1}{n_2+1}\right)^2=\left(\frac{\frac{1.6}{1.52}-1}{\frac{1.6}{1.52}+1}\right)^2=0.00066$$

$$R_3=\left(\frac{n_3-1}{n_3+1}\right)^2=\left(\frac{\frac{1.68}{1.6}-1}{\frac{1.68}{1.6}+1}\right)^2=0.0006 \qquad R_4=0.064$$

通过该系统后的光能为：

$$W_1=W(1-0.043)(1-0.00066)(1-0.0006)(1-0.064)=0.895W$$

∴光能损失为 10.5%

1-17. 如图所示，光线穿过平行平板，由 n_1 进入 n_2 的界面振幅反射系数为 r，透射系数为 t，下表面的振幅反射系数为 r'，透射系数为 t'。试证明：相应于平行和垂直于图面振动的光分量有：① $r_\perp=-r_\perp'$，② $r_{//}=-r_{//}'$，③ $t_\perp\cdot t_\perp'+r_\perp^2=1$，④ $r_{//}^2+t_{//}\cdot t_{//}'=1$，⑤ $1+r_{//}\cdot r_{//}'=t_{//}\cdot t_{//}'$。

证：依照 Fresnel's Fomula，

$$\frac{E_{r0s}}{E_{i0s}}=-\frac{\sin(\theta_1-\theta_2)}{\sin(\theta_1+\theta_2)} \qquad \frac{E_{r0p}}{E_{i0p}}=\frac{\tan(\theta_1-\theta_2)}{\tan(\theta_1+\theta_2)}$$

$$\frac{E_{t0s}}{E_{i0s}}=\frac{2\cos\theta_1\sin\theta_2}{\sin(\theta_1+\theta_2)} \qquad \frac{E_{t0p}}{E_{i0p}}=\frac{2\cos\theta_1\sin\theta_2}{\sin(\theta_1+\theta_2)\cos(\theta_1-\theta_2)}$$

①、②依据题意，介质平板处在同一种介质中，由 Fresnel's Fomula 的前两项，可以看

出不论从介质 1 到介质 2，还是由介质 2 到介质 1 的反射，入射角和折射角调换位置后振幅反射率大小不变，要出一个负号，所以 $r_\perp=-r_\perp'$，$r_{//}=-r_{//}'$。

③ $$t_\perp\cdot t_\perp'=\frac{2\cos\theta_1\sin\theta_2}{\sin(\theta_1+\theta_2)}\cdot\frac{2\cos\theta_2\sin\theta_1}{\sin(\theta_1+\theta_2)}=\frac{\sin2\theta_1\sin2\theta_2}{\sin^2(\theta_1+\theta_2)}$$

$$r_\perp^2=\frac{\sin^2(\theta_1-\theta_2)}{\sin^2(\theta_1+\theta_2)}=\frac{(\sin\theta_1\cos\theta_2-\cos\theta_1\sin\theta_2)^2}{\sin^2(\theta_1+\theta_2)}$$

$$=\frac{\sin^2\theta_1\cos^2\theta_2+\cos^2\theta_1\sin^2\theta_2-2\sin\theta_1\cos\theta_2\cos\theta_1\sin\theta_2}{\sin^2(\theta_1+\theta_2)}$$

$$=\frac{(\sin\theta_1\cos\theta_2+\cos\theta_1\sin\theta_2)^2-4\sin\theta_1\cos\theta_2\cos\theta_1\sin\theta_2}{\sin^2(\theta_1+\theta_2)}$$

$$=\frac{\sin^2(\theta_1+\theta_2)-\sin2\theta_1\sin2\theta_2}{\sin^2(\theta_1+\theta_2)}$$

$$=1-\frac{\sin2\theta_1\sin2\theta_2}{\sin^2(\theta_1+\theta_2)}=1-t_\perp\cdot t_\perp'$$，　所以　$t_\perp\cdot t_\perp'+r_\perp^2=1$。

④ $$t_{//}\cdot t_{//}'=\frac{2\cos\theta_1\sin\theta_2}{\sin(\theta_1+\theta_2)\cos(\theta_1-\theta_2)}\cdot\frac{2\cos\theta_2\sin\theta_1}{\sin(\theta_1+\theta_2)\cos(\theta_2-\theta_1)}=\frac{\sin2\theta_1\sin2\theta_2}{\sin^2(\theta_1+\theta_2)\cos^2(\theta_1-\theta_2)}$$

$$r_{//}^2=\frac{\tan^2(\theta_1-\theta_2)}{\tan^2(\theta_1+\theta_2)}=\frac{\sin^2(\theta_1-\theta_2)\cos^2(\theta_1+\theta_2)}{\sin^2(\theta_1+\theta_2)\cos^2(\theta_1-\theta_2)}$$

$$1-r_{//}^2=\frac{\sin^2(\theta_1+\theta_2)\cos^2(\theta_1-\theta_2)-\sin^2(\theta_1-\theta_2)\cos^2(\theta_1+\theta_2)}{\sin^2(\theta_1+\theta_2)\cos^2(\theta_1-\theta_2)}$$

$$=\frac{4(\sin^2\theta_1\sin\theta_2\cos\theta_2+\sin\theta_2\cos^2\theta_1\cos\theta_2)(\sin\theta_1\cos^2\theta_2\cos\theta_1+\cos\theta_1\sin\theta_1\sin^2\theta_2)}{\sin^2(\theta_1+\theta_2)\cos^2(\theta_1-\theta_2)}$$

$$=\frac{4\sin\theta_2\cos\theta_2\sin\theta_1\cos\theta_1}{\sin^2(\theta_1+\theta_2)\cos^2(\theta_1-\theta_2)}=\frac{\sin2\theta_2\sin2\theta_1}{\sin^2(\theta_1+\theta_2)\cos^2(\theta_1-\theta_2)}=t_{//}\cdot t_{//}'$$，　所以 $r_{//}^2+t_{//}\cdot t_{//}'=1$。

⑤因为 $r_{//}=-r_{//}'$，　所以 $r_{//}\cdot r_{//}'=-r_{//}^2=t_{//}\cdot t_{//}'-1$，　即得：$1+r_{//}\cdot r_{//}'=t_{//}\cdot t_{//}'$

也可以按上述方法计算：

$$r_{//}\cdot r_{//}'=\frac{\tan(\theta_1-\theta_2)}{\tan(\theta_1+\theta_2)}\cdot\frac{\tan(\theta_2-\theta_1)}{\tan(\theta_2+\theta_1)}=-\frac{\tan^2(\theta_1-\theta_2)}{\tan^2(\theta_1+\theta_2)}=-\frac{\sin2\theta_1\sin2\theta_2}{\sin^2(\theta_1+\theta_2)\cos^2(\theta_1-\theta_2)}$$

1-20.如图，光束垂直入射到 45° 直角棱镜的一个侧面，光束经斜面反射后从第二个侧面透出。若入射光强为 I_0，问从棱镜透出的光束的强度为多少？设棱镜的折射率为 1.52，并且不考虑棱镜的吸收。

解：光束经过三个反射面，通过第一个反射面和第三个反射面时均为垂直入射，其反射率为：

$$R_1=\left(\frac{n_1-1}{n_1+1}\right)^2=\left(\frac{1.52-1}{1.52+1}\right)^2=0.043$$

$$R_3=\left(\frac{n_3-1}{n_3+1}\right)^2=\left(\frac{\frac{1}{1.52}-1}{\frac{1}{1.52}+1}\right)^2=0.043$$

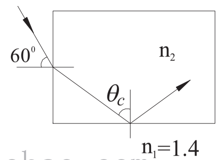
在第二个反射面即棱镜的斜面上，入射角为 45°。全反射的临界角为：

$$\theta_c=\arcsin\frac{1}{1.52}=41.14°$$

∴在棱镜斜面上发生全反射，反射光强等于入射光强。

∴从棱镜透出的光束的强度为：$I'=I_0(1-R_1)(1-R_2)=0.916I_0$

1-22. 如图，玻璃块周围介质的折射率为 1.4。若光束射向玻璃块的入射角为 60°，问玻璃块的折射率至少应为多大才能使透入光束发生全发射？



解：设玻璃的折射率为 n_2，则发生全发射的临界角为：$\theta_c=\arcsin\frac{1.4}{n_2}$

$$\therefore\cos\theta_c=\sqrt{1-\left(\frac{1.4}{n_2}\right)^2}$$

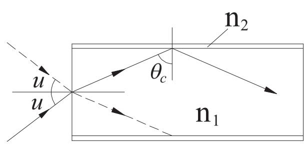
由图中几何关系，折射角 $\theta_2=90°-\theta_c$

由折射定律：$n_1\sin\theta_1=n_2\sin\theta_2$

$$\therefore 1.4\times\sin 60°=n_2\sin(90°-\theta_c)=n_2\sqrt{1-\left(\frac{1.4}{n_2}\right)^2}$$

$$\therefore n_2=1.85$$

1-25.如图所示是一根直圆柱形光纤，光纤芯的折射率为 n_1，光纤包层的折射率为 n_2，并且 $n_1>n_2$。（1）证明入射光的最大孔径角 $2u$ 满足：$\sin u=\sqrt{n_1^2-n_2^2}$；（2）若 $n_1=1.62$，$n_2=1.52$，最大孔径角为多少？



解：（1）如图，为保证光线在光纤内的入射角大于临界角，必须使入射到光纤端面的光线限制在最大孔径角 $2u$ 范围内。由折射定律：

$$\sin u=n_1\sin(90°-\theta_c)=n_1\cos\theta_c$$

$$\because\theta_c=\arcsin\frac{n_2}{n_1}\qquad\therefore\cos\theta_c=\sqrt{1-\left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2}$$

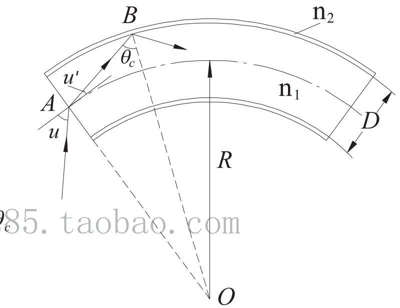
$$\therefore\sin u=n_1\cos\theta_c=n_1\sqrt{1-\left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2}=\sqrt{n_1^2-n_2^2}$$

（2）当 $n_1=1.62$，$n_2=1.52$ 时：

$$\sin u=\sqrt{1.62^2-1.52^2}=0.56$$

∴最大孔径角为：$2u=68°$

1-26. 如图所示是一根弯曲的圆柱形光纤，光纤芯和包层的折射率分别为 n_1 和 n_2（$n_1>n_2$），光纤芯的直径为 D，曲率半径为 R。（1）证明入射光的最大孔径角 $2u$ 满足：$\sin u=\sqrt{n_1^2-n_2^2\left(1+\frac{D}{2R}\right)^2}$；（2）若 $n_1=1.62$，$n_2=1.52$，$D=70\mu m$，$R=12mm$，则最大孔径角为多少？



解：在 ΔAOB 中，有：

$$\frac{\sin\theta_c}{R}=\frac{\sin(u'+90°)}{R+\frac{D}{2}}=\frac{\cos u'}{R+\frac{D}{2}}$$

$$\therefore\cos u'=\frac{R+\frac{D}{2}}{R}\sin\theta_c=\left(1+\frac{D}{2R}\right)\sin\theta_c$$

∴

$$\sin u'=\sqrt{1-\cos^2 u'}=\frac{R+\frac{D}{2}}{R}\sin\theta_c=\sqrt{1-\left(1+\frac{D}{2R}\right)^2\sin^2\theta_c}$$

$$\because\sin\theta_c=\frac{n_2}{n_1}\qquad\therefore\sin u'=\sqrt{1-\left(1+\frac{D}{2R}\right)^2\left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2}$$

$$\therefore\sin u=n_1\sin u'=n_1\sqrt{1-\left(1+\frac{D}{2R}\right)^2\left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2}=\sqrt{n_1^2-n_2^2\left(1+\frac{D}{2R}\right)^2}$$

（2）当 $n_1=1.62$，$n_2=1.52$，$D=70\mu m$，$R=12mm$ 时：

$$\sin u=\sqrt{1.62^2-1.52^2\left(1+\frac{70\times10^{-3}}{2\times12}\right)^2}=0.548$$

∴最大孔径角为：$2u=66.47°$

第二章 光的干涉

5－1 波长为 589.3nm 的钠光照射在一双缝上，在距双缝 200cm 的观察屏上测量 20 个条纹共宽 3cm，试计算双缝之间的距离。

解：由题意，条纹间距为：$e=\dfrac{3}{20}=0.15cm$

$\therefore$双缝间距为：$d=\dfrac{D\lambda}{e}=\dfrac{200\times589.3\times10^{-9}}{0.15}\approx0.79\times10^{-3}m$

2-3. 如图所示，两相干平面光波的传播方向与干涉场法线的夹角分别为θ_0和θ_R，试求干涉场上的干涉条纹间距。

解：在图示的坐标系中，两束平行光的振幅可以写成：

$$E_R=E_{R0}e^{-i(\omega t-kz\cos\theta_R-kx\sin\theta_R)},\qquad E_O=E_{O0}e^{-i(\omega t-kz\cos\theta_O+kx\sin\theta_O)}$$

干涉光振幅：

$$E=E_R+E_O=E_{R0}e^{-i(\omega t-kz\cos\theta_R-kx\sin\theta_R)}+E_{O0}e^{-i(\omega t-kz\cos\theta_O+kx\sin\theta_O)}$$

$$=(E_{R0}e^{i(kz\cos\theta_R+kx\sin\theta_R)}+E_{O0}e^{i(kz\cos\theta_O-kx\sin\theta_O)})e^{-i\omega t}$$

干涉光强度分布：

$$I=E\cdot E^*$$
$$=(E_{R0}e^{i(kz\cos\theta_R+kx\sin\theta_R)}+E_{O0}e^{i(kz\cos\theta_O-kx\sin\theta_O)})(E_{R0}e^{-i(kz\cos\theta_R+kx\sin\theta_R)}+E_{O0}e^{-i(kz\cos\theta_O-kx\sin\theta_O)})$$

$$=E_{R0}^{\ 2}+E_{O0}^{\ 2}+E_{R0}E_{O0}e^{i(kz\cos\theta_O-kx\sin\theta_O)}e^{-i(kz\cos\theta_R+kx\sin\theta_R)}+E_{R0}E_{O0}e^{i(kz\cos\theta_R+kx\sin\theta_R)}e^{-i(kz\cos\theta_O-kx\sin\theta_O)}$$

$$=E_{R0}^{\ 2}+E_{O0}^{\ 2}+E_{R0}E_{O0}(e^{ikz(\cos\theta_O-\cos\theta_R)}e^{-ikx(\sin\theta_R+\sin\theta_O)}+e^{-ikz(\cos\theta_O-\cos\theta_R)}e^{ikx(\sin\theta_R+\sin\theta_O)})$$

$$=E_{R0}^{\ 2}+E_{O0}^{\ 2}+2E_{R0}E_{O0}\cos k(z(\cos\theta_O-\cos\theta_R)-x(\sin\theta_R+\sin\theta_O))$$

由此可以看出：干涉光强是随空间位置（x,z）而变化的。如果在 $z=0$ 处放置一个观察屏，则屏上光强分布为：$I=E_{R0}^{\ 2}+E_{O0}^{\ 2}+2E_{R0}E_{O0}\cos kx(\sin\theta_R+\sin\theta_O)$

如果进一步假设二干涉光强度相等：$I_0=E_{R0}^{\ 2}=E_{O0}^{\ 2}$，则屏上光强分布为：

$$I=2I_0(1+\cos kx(\sin\theta_R+\sin\theta_O))$$

2-7. 在杨氏干涉实验中，两小孔的距离为 1.5mm，观察屏离小孔的垂直距离为 1m，若所用光源发出波长λ_1＝650nm 和λ_2＝532nm 的两种光波，试求两光波分别形成的条纹间距以及两组条纹的第 8 级亮纹之间的距离。

解：对于λ_1＝650nm 的光波，条纹间距为：

$$e_1=\frac{D\lambda_1}{d}=\frac{1\times650\times10^{-9}}{1.5\times10^{-3}}\approx0.43\times10^{-3}m$$

对于λ_2＝532nm 的光波，条纹间距为：

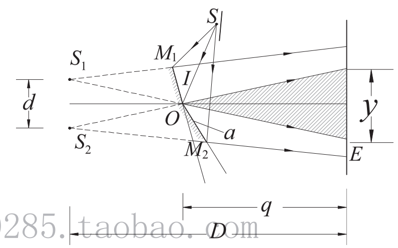
$$e_2=\frac{D\lambda_2}{d}=\frac{1\times532\times10^{-9}}{1.5\times10^{-3}}\approx0.35\times10^{-3}m$$

$\therefore$两组条纹的第 8 级条纹之间的距离为：

$$\Delta x=8(e_1-e_2)=0.64\times10^{-3}m$$

2-9. 在菲涅耳双面镜干涉实验中，光波长为 600nm，光源和观察屏到双面镜交线的距离分别为 0.6m 和 1.8m，双面镜夹角为 10^{-3}rad，求：（1）观察屏上的条纹间距；（2）屏上最多能看到多少亮条纹？

解：如图所示，S_1S_2的距离为：$d=2l\sin\alpha$



$\therefore$条纹间距为：$e=\dfrac{D\lambda}{d}=\dfrac{(l+q)\lambda}{2l\sin\alpha}$

$\because\alpha$ 角很小

$\therefore e\approx\dfrac{(l+q)\lambda}{2l\alpha}=\dfrac{(0.6+1.8)\times600\times10^{-9}}{2\times0.6\times10^{-3}}$

$=1.2\times10^{-3}m=1.2mm$

屏上能产生条纹的范围，如图阴影所示

$y=2qtg\alpha\approx2q\alpha=2\times1.8\times10^{-3}m$

$=3.6mm$

$\therefore$最多能看到的亮条纹数为：$n=\dfrac{y}{e}=\dfrac{3.6}{1.2}=3$

2-11.波长为 0.40μm～0.76μm的可见光正入射在一块厚度为 1.2×10^{-6}m、折射率为 1.5 的薄玻璃片上，试问从玻璃片反射的光中哪些波长的光最强？

解：由产生亮纹的条件$\Delta=2nh+\dfrac{\lambda}{2}=m\lambda$，计算得：

$m=1$ 时，$\lambda=7.2\times10^{-6}$m；$m=5$ 时，$\lambda=0.8\times10^{-6}$m；$m=6$ 时，$\lambda=6.545\times10^{-6}$m；

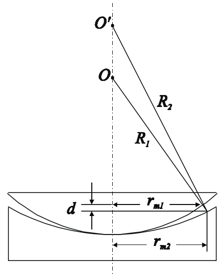
$m=7$ 时，$\lambda=0.5538\times10^{-6}$m；$m=8$ 时，$\lambda=0.48\times10^{-6}$m；$m=9$ 时，$\lambda=0.4235\times10^{-6}$m；

$m=10$ 时，$\lambda=0.3789\times10^{-6}$m。

所以在可见光范围内，$\lambda=6.545\times10^{-6}$m，$0.5538\times10^{-6}$m，$0.48\times10^{-6}$m，$0.4235\times10^{-6}$m 四个波长的光反射光最强。

2-15.利用牛顿环干涉条纹可以测定凹曲面的曲率半径，结构如图所示。试证明第 m 个暗环的半径 r_m 与凹面半径 R_2、凸面半径 R_1、光波长λ_0之间的关系为：

$$r_m^{\ 2}=m\lambda_0\frac{R_1R_2}{R_2-R_1}。$$



证：双光束等厚干涉的反射光的光程差是：$\Delta = 2n_0 d\cos\theta + \frac{\lambda}{2}$

产生暗纹的条件是 $\Delta = 2n_0 d\cos\theta + \frac{\lambda}{2} = m\lambda + \frac{1}{2}\lambda$，即 $2n_0 d\cos\theta = m\lambda$。

$$d_m = (R_1 - \sqrt{R_1^2 - r_m^2}) - (R_2 - \sqrt{R_2^2 - r_m^2})$$

$$= (R_1 - (R_1 - \frac{r_m^2}{2R_1})) - (R_2 - (R_2 - \frac{r_m^2}{2R_2})) = \frac{r_m^2}{2R_1} - \frac{r_m^2}{2R_2} = \frac{r_m^2}{2}(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2})$$

代入光程差条件得：$2\frac{r_m^2}{2}(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}) = m\lambda$，即 $r_m^2 = m\lambda\frac{R_1R_2}{R_2 - R_1}$

2-24. 某光源发出波长很接近的二单色光，平均波长为 600 nm。通过间隔 $d = 10$ mm 的 F-P 干涉仪观察时，看到波长为用 λ_1 的光所产生的干涉条纹正好在波长为 λ_2 的光所产生的干涉条纹的中间，问二光波长相差多少？

解：设二波长为：$\lambda_1 = 600 - \frac{1}{2}\Delta\lambda$，$\lambda_2 = 600 + \frac{1}{2}\Delta\lambda$

通过 F-P 干涉仪后一个波长的条纹刚好落在另一个波长所产生条纹的中间，说明一个波长的明纹条件正好是另一个波长所产生条纹的暗纹条件，

由 $\frac{I_t}{I_i} = \frac{1}{1 + F\sin^2\frac{\varphi}{2}}$，$\varphi = k\Delta = \frac{2\pi}{\lambda}2nh\cos\theta_2$ 知道：

当 $\varphi = \frac{2\pi}{\lambda}2nh\cos\theta_2 = 2m\pi$（m＝0，±1，±2，±3，…）时是明纹条件，

当 $\varphi = \frac{2\pi}{\lambda}2nh\cos\theta_2 = (2m+1)\pi$（m＝0，±1，±2，±3，…）时是暗纹条件，

也就是说二波长在同一位置（θ_2 相同），产生的位相差差 π，即：

$$\varphi_1 - \varphi_2 = 2\pi(\frac{1}{\lambda - \frac{1}{2}\Delta\lambda} - \frac{1}{\lambda + \frac{1}{2}\Delta\lambda})2nh\cos\theta_2 = \pi$$

$$4(\frac{\Delta\lambda}{\lambda^2 - (\frac{1}{2}\Delta\lambda)^2})nh\cos\theta_2 = 1$$

考虑到 $\Delta\lambda$ 很小，而且角度 θ_2 也很小，

所以 $\Delta\lambda = \frac{\lambda^2}{4nh\cos\theta_2} = \frac{\lambda^2}{4nh} = \frac{(0.6\times10^{-6})^2}{4\times10\times10^{-3}} = 9\times10^{-12}$ m $= 9\times10^{-3}$ nm

2-27. 在光学玻璃基片（$n_G = 1.52$）上镀制硫化锌膜层（n＝2.35），入射光波长 $\lambda = 0.5\mu m$，

求正入射时最大反射率和最小反射率的膜厚和相应的反射率数值。

解：$\because n > n_G$　　反射率有最大值的膜厚是：$h = \frac{\lambda}{4n} = \frac{500}{4\times2.38} = 52.52nm$

相应的反射率为：$R_{\max} = \frac{(n_o n_G - n^2)^2}{(n_o n_G + n^2)^2} = \left[\frac{1\times1.52 - (2.38)^2}{1\times1.52 + (2.38)^2}\right]^2 = 0.33$

反射率有最小值的膜厚是：$h = \frac{\lambda}{2n} = \frac{500}{2\times2.38} = 105.04nm$

相应的反射率为：$R_{\min} = \frac{(n_o - n_G)^2}{(n_o + n_G)^2} = \left(\frac{1-1.52}{1+1.52}\right)^2 = 0.04$

2-28. 在玻璃片上（$n_G = 1.6$）上镀单层增透膜，膜层材料是氟化镁（n＝1.38），控制膜厚使其在正入射下对于波长 λ_0＝0.5μm 的光给出最小反射率，试求这个单层膜在下列条件下的反射率：（1）波长 $\lambda = 0.6\mu m$，入射角 $\theta_0 = 0°$

（2）波长 $\lambda = 0.6\mu m$，入射角 $\theta_0 = 30°$

解：（1）由题意，在正入射下对于波长 λ_0＝0.5μm 的光给出最小反射率，因此膜层的光学厚度为：$nh = \lambda_0/4$

当 $\lambda = 0.6\mu m$ 时，相位差为：$\varphi = \frac{4\pi}{\lambda}nh = \pi\frac{\lambda_0}{\lambda} = \frac{5}{6}\pi$

$$\therefore R_\lambda = \frac{(n_o - n_G)^2\cos^2\frac{\varphi}{2} + \left(\frac{n_o n_G}{n} - n\right)^2\sin^2\frac{\varphi}{2}}{(n_o + n_G)^2\cos^2\frac{\varphi}{2} + \left(\frac{n_o n_G}{n} + n\right)^2\sin^2\frac{\varphi}{2}}$$

$$= \frac{(1-1.6)^2\cos^2(\frac{5}{12}\pi) + \left(\frac{1.6}{1.38} - 1.38\right)^2\sin^2(\frac{5}{12}\pi)}{(1+1.6)^2\cos^2(\frac{5}{12}\pi) + \left(\frac{1.6}{1.38} + 1.38\right)^2\sin^2(\frac{5}{12}\pi)} = 0.01$$

（2）$\theta_0 = 30°$，由折射定律：$\theta = \arcsin\left(\frac{\sin\theta_0}{n}\right) = \arcsin\left(\frac{0.5}{1.38}\right) = 21.25°$

光束在基片内的折射角：$\theta_G = \arcsin\left(\frac{n\sin\theta_0}{n_G}\right) = \arcsin\left(\frac{0.5}{1.6}\right) = 18.2°$

∴对于 s 分量的有效折射率为：$\overline{n}_0 = n_0\cos\theta_0 = \cos30° = 0.866$

$$\bar{n} = n\cos\theta = 1.38\times\cos 21.25° = 1.286$$

$$\bar{n}_G = n_G\cos\theta_G = 1.6\times\cos 18.2° = 1.52$$

对于 p 分量的有效折射率为：$\bar{n}_0 = \dfrac{n_0}{\cos\theta_0} = \dfrac{1}{\cos 30°} = 1.155$

$$\bar{n} = \frac{n}{\cos\theta} = \frac{1.38}{\cos 21.25°} = 1.48$$

$$\bar{n}_G = \frac{n_G}{\cos\theta_G} = \frac{1.6}{\cos 18.2°} = 1.684$$

在30°斜入射下，相位差为：$\varphi = \dfrac{4\pi}{\lambda} nh\cos\theta = \dfrac{5}{6}\pi\times\cos 21.25° = 0.777\pi$

$$\therefore (R_{\lambda_0})_s = \frac{(\bar{n}_o - \bar{n}_G)^2\cos^2\dfrac{\varphi}{2} + \left(\dfrac{\bar{n}_o\bar{n}_G}{n} - \bar{n}\right)^2\sin^2\dfrac{\varphi}{2}}{(\bar{n}_o + \bar{n}_G)^2\cos^2\dfrac{\varphi}{2} + \left(\dfrac{\bar{n}_o\bar{n}_G}{n} + \bar{n}\right)^2\sin^2\dfrac{\varphi}{2}}$$

$$= \frac{(0.866-1.52)^2\cos^2 0.388\pi + \left(\dfrac{0.866\times1.52}{1.286} - 1.286\right)^2\sin^2 0.388\pi}{(0.866+1.52)^2\cos^2 0.388\pi + \left(\dfrac{0.866\times1.52}{1.286} + 1.286\right)^2\sin^2 0.388\pi} = 0.02$$

$$\therefore (R_{\lambda_0})_p = \frac{(\bar{n}_o - \bar{n}_G)^2\cos^2\dfrac{\varphi}{2} + \left(\dfrac{\bar{n}_o\bar{n}_G}{n} - \bar{n}\right)^2\sin^2\dfrac{\varphi}{2}}{(\bar{n}_o + \bar{n}_G)^2\cos^2\dfrac{\varphi}{2} + \left(\dfrac{\bar{n}_o\bar{n}_G}{n} + \bar{n}\right)^2\sin^2\dfrac{\varphi}{2}}$$

$$= \frac{(1.155-1.684)^2\cos^2 0.388\pi + \left(\dfrac{1.155\times1.684}{1.48} - 1.48\right)^2\sin^2 0.388\pi}{(1.155+1.684)^2\cos^2 0.388\pi + \left(\dfrac{1.155\times1.684}{1.48} + 1.48\right)^2\sin^2 0.388\pi} = 0.007$$

因为入射光是自然光，故反射率为：

$$(R_{\lambda_0}) = \frac{1}{2}[(R_{\lambda_0})_s + (R_{\lambda_0})_p] = \frac{1}{2}(0.02+0.007) = 0.013$$

2-29. 在照相物镜上镀一层光学厚度为$6\lambda_0/5$（λ_0＝0.5μm）的低折射率膜，试求在可见光区内反射率最大的波长为多少？

解：镀低折射率膜，因此要使反射率最大，则：$nh = m\dfrac{\lambda}{2}$ m＝0，1，2，3，……

由题意，$nh = \dfrac{6\lambda_0}{5}$ $\therefore \lambda = \dfrac{12\lambda_0}{5m}$

取 m＝2，3 得可见光区内反射率最大的波长为$\lambda = 0.6\mu m$，$0.4\mu m$

2-31. 比较下面三个$\lambda/4$膜系的反射率：

（1）7 层膜，$n_G = 1.50$，$n_H = 2.40$，$n_L = 1.38$

（2）7 层膜，$n_G = 1.50$，$n_H = 2.20$，$n_L = 1.38$

（3）9 层膜，$n_G = 1.50$，$n_H = 2.40$，$n_L = 1.38$

说明膜系折射率和层数对膜系反射率的影响

解：$R_{2p+1} = \left[\dfrac{n_o - \left(\dfrac{n_H}{n_L}\right)^{2p}\dfrac{n_H^2}{n_G}}{n_o + \left(\dfrac{n_H}{n_L}\right)^{2p}\dfrac{n_H^2}{n_G}}\right]^2$

（1）$R_7 = \left[\dfrac{1-\left(\dfrac{2.40}{1.38}\right)^6\times\dfrac{(2.40)^2}{1.50}}{1+\left(\dfrac{2.40}{1.38}\right)^6\times\dfrac{(2.40)^2}{1.50}}\right]^2 = 96.3\%$

（2）$R_7 = \left[\dfrac{1-\left(\dfrac{2.20}{1.38}\right)^6\times\dfrac{(2.20)^2}{1.50}}{1+\left(\dfrac{2.20}{1.38}\right)^6\times\dfrac{(2.20)^2}{1.50}}\right]^2 = 92.7\%$

（3）$R_9 = \left[\dfrac{1-\left(\dfrac{2.40}{1.38}\right)^8\times\dfrac{(2.40)^2}{1.50}}{1+\left(\dfrac{2.40}{1.38}\right)^8\times\dfrac{(2.40)^2}{1.50}}\right]^2 = 98.8\%$

可见，膜系高折射率和低折射率层的折射率相差越大，且膜系层数越多，膜系的反射率就越高。

2-32. 有一干涉滤光片间隔层厚度为 1.8×10^{-4}mm，折射率 n＝1.5，试求：

（1） 正入射时滤光片在可见光区内的中心波长；

（2） 透射带的波长半宽度，设高反射膜的反射率 R＝0.91

（3） 倾斜入射时，入射角分别为 15° 和 40° 时的透射光波长。

解：（1）中心波长为：$\lambda_0 = \dfrac{2nh}{m} = \dfrac{2\times1.5\times0.18\mu m}{m} = \dfrac{0.54}{m}\mu m$ m＝0，1，2，3，……

取 m＝1，得在可见光区内的中心波长为：$\lambda_0 = 0.54\mu m$

（2） 波长半宽度：

$$\Delta\lambda_{1/2}=\frac{\lambda_0^2}{2nh}\cdot\frac{1-R}{\pi\sqrt{R}}=\lambda_0\frac{1-R}{\pi\sqrt{R}}=0.54\times\frac{1-0.91}{3.14\times\sqrt{0.91}}=0.016\mu m=16nm$$

（3）倾斜入射时，透射光产生极大的条件是：$2nh\cos\theta=\lambda$

当 $\theta=15°$ 时，$\lambda_1=\cos15°\lambda_0=0.522\mu m$

当 $\theta=40°$ 时，$\lambda_2=\cos40°\lambda_0=0.414\mu m$

2-35. 太阳直径对地球表面的张角 θ 约为 32′。在暗室中若直接用太阳光作光源进行双缝干涉实验（不用限制光源尺寸的单缝），则双缝间距不能超过多大？（设太阳光的平均波长为 $\lambda=0.55\mu m$，日盘上各点的亮度差可以忽略。）

解： $\theta=32'=0.0093rad$

因为将入射的太阳光看作不用限制光源尺寸的单缝，因此其横向相干宽度为：

$$d_t=\frac{\lambda}{\theta}=\frac{0.55\times10^{-6}}{0.0093}=59.14\mu m$$

∴双缝间距不能超过 $59.14\mu m$

2-36. 在杨氏干涉实验中，照射两小孔的光源是一个直径为 3mm 的圆形光源。光源发射光的波长为 0.5μm，它到小孔的距离为 2m。问小孔能够发生干涉的最大距离是多少？

解：扩展光源对两小孔 S_1S_2 中点的张角为：

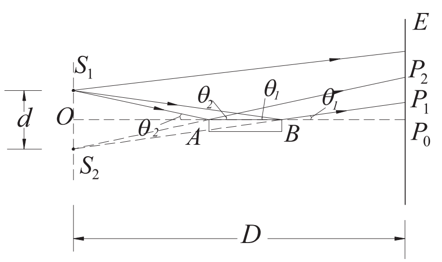
$$tg\frac{\theta}{2}=\frac{3\times10^{-3}/2}{2}=0.75\times10^{-3}$$

$$\therefore\ \theta\approx2\times0.75\times10^{-3}=1.5\times10^{-3}rad$$

圆形光源的横向相干宽度为：$d_t=\frac{1.22\lambda}{\theta}=\frac{1.22\times0.5\times10^{-6}}{1.5\times10^{-3}}=0.41mm$

∴小孔能够发生干涉的最大距离是 $0.41mm$

2-38. 在如图所示的洛埃镜实验中，光源 S_1 到观察屏的距离为 2m，光源到洛埃镜面的垂直距离为 2.5mm。洛埃镜长 40cm，置于光源和屏的中央。若光波波长为 500nm，条纹间距为多少？在屏上可看见几条条纹？



解：在洛埃镜实验中，S_1 和 S_1 在平面镜中的像 S_2 可看作是产生干涉的两个光源。条纹间距为：

$$e=\frac{D\lambda}{d}=\frac{2\times500\times10^{-9}}{2.5\times2\times10^{-3}}=0.2mm$$

由图可知，屏上发生干涉的区域在 P_1P_2 范围内

$$P_1P_0=BP_0tg\theta_1=BP_0\frac{S_1O}{OB}=800mm\times\frac{2.5mm}{1200mm}\approx1.67mm$$

$$P_2P_0=AP_0tg\theta_2=AP_0\frac{S_1O}{OA}=1200mm\times\frac{2.5mm}{800mm}=3.75mm$$

由于经平面镜反射的光波有π的相位差，所以 S_1 和 S_2 可看作位相相反的相干光源。若 P_0 点在干涉区内，它应该有一条暗条纹通过，并且 P_1P_0 内包含的暗条纹数目：

$$N_1=\frac{P_1P_0}{e}=\frac{1.67}{0.2}=8.4$$

P_2P_0 内包含的暗条纹数目为：$N_2=\frac{P_2P_0}{e}=\frac{3.75}{0.2}=18.8$

∴P_1P_2 区域内可看见 10 个暗条纹，9 个亮条纹

第三章 光的衍射

3-3. 由氩离子激光器发出波长 $\lambda=488$ nm 的蓝色平面光，垂直照射在一不透明屏的水平矩形孔上，此矩形孔尺寸为 0.75mm×0.25mm。在位于矩形孔附近正透镜（$f=2.5$ m）焦平面处的屏上观察衍射图样，试求中央亮斑的尺寸。

解：中央亮斑边缘的坐标为：

$$x=\pm\frac{f\lambda}{a}=\pm\frac{2500\times488\times10^{-6}}{0.75}=\pm1.63\,\text{mm}\qquad 2|x|=3.26\,\text{mm}$$

$$y=\pm\frac{f\lambda}{b}=\pm\frac{2500\times488\times10^{-6}}{0.25}=\pm4.88\,\text{mm}\qquad 2|y|=9.76\,\text{mm}$$

∴中央亮斑是尺寸为 3.26mm×9.76mm 的竖直矩形

3-4. 借助于直径为 2m 的反射式望远镜，将地球上的一束激光（$\lambda=600\,\text{nm}$）聚焦在月球上某处。如果月球距地球 4×10^5km。忽略地球大气层的影响，试计算激光在月球上的光斑直径。

解：由于衍射效应，反射式望远镜对激光成像的爱里斑角半径为：

$$\theta_0=1.22\frac{\lambda}{D}=1.22\times\frac{600\times10^{-9}}{2}=3.66\times10^{-7}\,\text{rad}$$

由于角度很小，因此 $\tan\theta_0\approx\theta_0$

∴激光在月球上的光斑直径为：$D'=l\theta_0=4\times10^8\times3.66\times10^{-7}=146.4\,\text{m}$

3-5. 波长 $\lambda=500\,\text{nm}$ 的平行光垂直照射在宽度为 0.025mm 的单缝上，以焦距为 50cm 的会聚透镜将衍射光聚焦于焦面上进行观察，求：（1）衍射图样中央亮纹的半宽度；（2）第一亮纹和第二亮纹到中央亮纹的距离；（3）第一亮纹和第二亮纹相对于中央亮纹的强度。

解：（1）中央亮纹的半角宽度为：

$$\theta_0=\frac{\lambda}{a}=\frac{500\times10^{-6}}{0.025}=0.02\,\text{rad}$$

∴中央亮纹的半宽度为：$e=f\theta_0=50\times0.02=1\,\text{cm}$

（2）第一亮纹的位置对应于 $\alpha=\pm1.43\pi$，即：

$$\frac{ka}{2}\sin\theta_1=\pm1.43\pi$$

$$\therefore\theta_1=\arcsin\frac{\pm1.43\lambda}{a}=\arcsin\frac{\pm1.43\times500\times10^{-6}}{0.025}=\arcsin\pm0.0286\approx\pm0.0286\,\text{rad}$$

∴第一亮纹到中央亮纹的距离为：

$$q_1=f|\theta_1|-e=50\times0.0286-1=0.43\,\text{cm}$$

第二亮纹对应于 $\alpha=\pm2.46\pi$

$$\therefore\theta_2=\arcsin\frac{\pm2.46\lambda}{a}=\arcsin\frac{\pm2.46\times500\times10^{-6}}{0.025}=\arcsin\pm0.0492\approx\pm0.0492\,\text{rad}$$

∴第二亮纹到中央亮纹的距离为：

$$q_2=f|\theta_2|-e=50\times0.0492-1=1.46\,\text{cm}$$

（3）设中央亮纹的光强为 I_0，则第一亮纹的强度为：

$$I_1=I_0(\frac{\sin\alpha}{\alpha})^2=I_0(\frac{\sin1.43\pi}{1.43\pi})^2=0.047I_0$$

第二亮纹的强度为：

$$I_2=I_0(\frac{\sin\alpha}{\alpha})^2=I_0(\frac{\sin2.46\pi}{2.46\pi})^2=0.016I_0$$

3-6. 例 6-1.

3-13. 在双缝的夫琅和费衍射实验中所用的光波的波长 $\lambda=500\,\text{nm}$，透镜焦距 $f=100\,\text{cm}$，观察到两相邻亮条纹之间的距离 $e=2.5\,\text{mm}$，并且第四级亮纹缺级，试求双缝的缝距和缝宽。

解：双缝衍射两相邻亮条纹的距离为：$e=f\dfrac{\lambda}{d}$

∴缝距为：$d=f\dfrac{\lambda}{e}=1000\times\dfrac{500\times10^{-6}}{2.5}=0.2\,\text{mm}$

∵第四级缺级

∴缝宽为：$a=\dfrac{d}{4}=\dfrac{0.2}{4}=0.05\,\text{mm}$

3-15. 用波长为 624nm 的单色光照射一光栅，已知该光栅的缝宽 $a=0.012\,\text{mm}$，不透明部分宽度 $b=0.029\,\text{mm}$，缝数 N＝1000 条，试求：（1）中央极大值两侧的衍射极小值间，将出现多少个干涉主极大；（2）谱线的半角宽度。

解：（1）中央峰两侧的衍射极小值满足：$a\sin\theta=\pm\lambda$

∴中央峰内的衍射角满足 $\sin\theta\le\pm\dfrac{\lambda}{a}$

干涉主极大满足：$d\sin\theta=m\lambda$　　$m=0$，±1，±2 ……

∴在中央峰内的干涉主极大满足：　$|m\lambda|\le\dfrac{d}{a}\lambda$

∵ $\dfrac{d}{a}=\dfrac{0.041}{0.012}\equiv3.42$

∴ m 的取值可为 0，±1，±2，±3

∴出现的干涉极小值个数为 7 个

（2）谱线的角宽度为：

$$\Delta\theta=\frac{2\lambda}{Nd}=\frac{2\times624\times10^{-6}}{1000\times(0.012+0.029)}=1.52\times10^{-5}\,\text{rad}$$

3-24. 为在一块每毫米 1200 条刻线的光栅的一级光谱中分辨波长为 632.8nm 的一束 He－Ne 激光的模结构（两个模之间的频率差为 450MHz），光栅需有多长？

解：$\because \lambda = \dfrac{c}{v}$

$\therefore |\Delta\lambda| = \dfrac{c}{v^2}\Delta v = \dfrac{\lambda^2}{c}\Delta v = \dfrac{(632.8\times10^{-9})^2}{3\times10^8}\times 450\times10^6 = 6\times10^{-4}\,\text{nm}$

$\therefore$光栅所需要的缝数至少为：$N = \dfrac{\lambda}{|\Delta\lambda|} = \dfrac{632.8}{6\times10^{-4}} = 1.05\times10^6$

光栅的总长度为：$l = Nd = 1.05\times10^6\times\dfrac{1}{1200} = 875\,\text{mm}$

3-18. 已知一光栅的光栅常数$d = 2.5$ μm，缝数为 N＝20000 条，求此光栅的一、二、三级光谱的分辨本领，并求波长$\lambda = 0.69$ μm 红光的二级光谱位置，以及光谱对此波长的最大干涉级次。

解：光栅的分辨本领为：$A = mN$

对于一级光谱：$A_1 = N = 2\times10^4$

对于二级光谱：$A_2 = 2N = 4\times10^4$

对于三级光谱：$A_3 = 3N = 6\times10^4$

波长$\lambda = 0.69$ μm 红光的二级光谱位置为：

$\theta = \arcsin\dfrac{2\lambda}{d} = \arcsin\dfrac{2\times0.69}{2.5} = 33.5°$

光栅形成的谱线应在$|\theta| < 90^0$的范围内。当$\theta = \pm90^0$时，

$m = \dfrac{d\sin\theta}{\lambda} = \pm\dfrac{2.5}{0.69} = \pm3.62$

$\therefore$最大干涉级次为 3

3-26 一闪耀光栅刻线数为 100 条/mm，用$\lambda = 600$ nm 的单色平行光垂直入射到光栅平面，若第二级光谱闪耀，闪耀角应为多大？

解：由于第二级光谱闪耀，则：$2d\sin\theta_0 = 2\lambda$

$\therefore$闪耀角为：$\theta_0 = \arcsin\dfrac{\lambda}{d} = \arcsin\dfrac{600\times10^{-6}}{1/100} = 3.44°$

3-28 波长$\lambda = 563.3$ nm 的平行光射向直径 D＝2.6mm 的圆孔，与孔相距r_0＝1m 处放一屏幕。问轴线与屏的交点是亮点还是暗点？至少把屏幕向前或向后移动多少距离时，该点的光强发生相反的变化？

解：波带数与圆孔半径的关系为：$N = \dfrac{\rho^2}{\lambda R}(1+\dfrac{R}{r_0})$

当平行光入射时，$R\to\infty$

$\therefore$波带数为：$N = \dfrac{\rho^2}{\lambda r_0} = \dfrac{(2.6/2)^2}{0.5633\times1} = 3$

$\therefore$轴线与屏的交点是亮点

当把屏幕向前移近圆孔，相应的波带数增加，增大到 4 时，轴线与屏的交点是暗点，此时屏幕到圆孔的距离为：

$r_0' = \dfrac{\rho^2}{\lambda N} = \dfrac{(2.6/2)^2}{0.5633\times4} = 0.75\,\text{m}$

$\therefore$屏幕移动的距离为：$r_0 - r_0' = 1 - 0.75 = 0.25\,\text{m}$

当把屏幕向后移远圆孔，相应的波带数减小，减小到 2 时，轴线与屏的交点是暗点，此时屏幕到圆孔的距离为：

$r_0' = \dfrac{\rho^2}{\lambda N} = \dfrac{(2.6/2)^2}{0.5633\times2} = 1.5\,\text{m}$

$\therefore$屏幕移动的距离为：$r_0' - r_0 = 1.5 - 1 = 0.5\,\text{m}$

3-31. 单色点光源（$\lambda = 500nm$）安放在离光阑 1m 远的地方，光阑上有一个内外半径分别为 0.5mm 和 1mm 的通光圆环，接收点离光阑 1m 远，问在接收点的光强和没有光阑时的光强之比是多少？

解：半径为 1mm 的圆孔包含的波带数为：

$N_1 = \dfrac{\rho_1^2}{\lambda R}(1+\dfrac{R}{r_0}) = \dfrac{1^2}{0.5\times1}(1+\dfrac{1}{1}) = 4$

半径为 0.5mm 的圆孔挡住的波带数为：

$N_2 = \dfrac{\rho_2^2}{\lambda R}(1+\dfrac{R}{r_0}) = \dfrac{0.5^2}{0.5\times1}(1+\dfrac{1}{1}) = 1$

$\therefore$通光圆环通过的波带数为 3，因此通光圆环在接收点产生的振幅等于一个波带在接收点产生的振幅，且近似地等于第一个波带产生的振幅，即：

$E' = E_0$

没有光阑时，接收点的振幅为：$E = \dfrac{E_0}{2}$

$\therefore$光强之比为：$\dfrac{I'}{I} = \left(\dfrac{E'}{E}\right)^2 = 4$

3-35. 一波带片主焦点的强度约为入射光强的 10^3 倍，在 400nm 的紫光照明下的主焦距为 80cm。问波带片应有几个开带，以及波带片的半径。

解：设波带片 n 个开带,则主焦点相对光强为：

$$\frac{I}{I_0}=\left(\frac{na_1}{a_1/2}\right)^2=4n^2=1000$$

$\therefore n\approx 16$

若奇数开带，则波带片包含的波带总数为： $N=31$

此时波带片的半径为：

$$\rho=\sqrt{Nf\lambda}=\sqrt{31\times 800\times 400\times 10^{-6}}=3.15\,\text{mm}$$

若偶数开带，则波带片包含的波带总数为： $N=32$

此时波带片的半径为：

$$\rho=\sqrt{Nf\lambda}=\sqrt{32\times 800\times 400\times 10^{-6}}=3.2\,\text{mm}$$

3-3. 由于衍射效应的限制，人眼能分辨某汽车两前灯时，人离汽车的最远距离 l = ?（假定两车灯相距 1.22 m。）

解：假定人眼瞳孔的直径为 2 mm，可见光波长为 0.5 μm，则其极限角分辨率为

$\theta=1.22\dfrac{\lambda}{D}$，

$\theta=1.22\times 0.5\times 10^{-6}/2\times 10^{-3}=0.305\times 10^{-3}$ rad，能分辨开车灯的最远距离为：

$$l=\frac{\Delta x}{\Delta\theta}=\frac{1.22}{0.305\times 10^{-3}}=4\times 10^{3}\ \text{m}。$$

3-10. 用波长 $\lambda=0.63\,\mu m$ 的激光粗测一单缝的缝宽。若观察屏上衍射条纹左右两个第五级极小的间距是 6.3cm，屏和缝之间的距离是 5 m，求缝宽。

解：极小值的位置出现在 $\beta=\dfrac{kax}{2f}=\dfrac{\pi ax}{f\lambda}=m\pi$ 的地方，其中 $m=\pm1,\pm2,\pm3,\cdots$，两个第五级极小的间距是 $\Delta x=\dfrac{10f\lambda}{a}$，所以缝宽

$$a=\frac{10f\lambda}{\Delta x}=\frac{10\times 5\times 0.63\times 10^{-6}}{6.3\times 10^{-2}}=5\times 10^{-4}\ \text{m}=0.5\ \text{mm}$$

3-12. 考察缝宽 $b=8.8\times 10^{-3}$ cm，双缝间隔 $d=7.0\times 10^{-2}$ cm、波长为 0.6328 μm 时的双缝衍射，在中央极大值两侧的两个衍射极小值间，将出现多少个干涉极小值？若屏离开双缝 457.2 cm，计算条纹宽度。

解：衍射的第一极小值的位置出现在 $\beta=\dfrac{kax}{2f}=\dfrac{\pi ax}{f\lambda}=\pm\pi$ 的地方，此时 $x=\dfrac{f\lambda}{a}=\dfrac{f\lambda}{8.8\times 10^{-3}}$，

在此位置上，双缝衍射出现条纹的条件为 $\sin\dfrac{\varphi}{2}=\sin(\dfrac{\pi}{\lambda}\dfrac{d}{f}x)=0$，即 $\dfrac{\pi}{\lambda}\dfrac{d}{f}x=m\pi$，其中 $m=\pm1,\pm2,\pm3,\cdots$，

在衍射的第一极小值位置处的级数 m 为 $m=\dfrac{d}{a}=\dfrac{7.0\times 10^{-4}}{8.8\times 10^{-5}}=7.95$，刚好多包含一个暗纹：中央主极大两边每侧有 7 条亮纹，8 条暗纹，两边共包含 16 条暗纹。

$$\text{条纹宽度}\ \Delta x=\frac{2f\lambda}{Nd}=\frac{2\times 4.572\times 0.6328\times 10^{-6}}{2\times 7.0\times 10^{-4}}=4.133\times 10^{-3}\ \text{m}$$

3-19. 已知 F-P 标准具的空气间隔 $h=4$cm，两镜面的反射率均为 $R=89.1\%$。另有一反射光栅的刻线面积为 3 cm × 3 cm，光栅常数为 1 200 条 /mm，取其一级光谱，试比较这两个分光元件对 $\lambda=0.6328\ \mu$m 红光的分光特性。

解：（1）自由光谱范围

光栅：$\Delta\lambda_f=\dfrac{\lambda}{m}$，此光栅在正入射时，m 取值只可以是 1（$\dfrac{d}{\lambda}=\dfrac{1}{1200\times 10^{3}\times 0.6328\times 10^{-6}}=1.3$），所以自由光谱范围为 $\Delta\lambda_f=0.6328\ \mu m$

F-P 标准具：$\Delta\lambda_f=\dfrac{\lambda}{m}=\dfrac{\lambda^2}{2nh}=\dfrac{(0.6328\times 10^{-6})^2}{2\times 4\times 10^{-2}}=5.005\times 10^{-12}\ \text{m}=5.005\times 10^{-6}\ \mu m$

（2）分辨本领

光栅：$A=\dfrac{\lambda}{\Delta\lambda}=mN=3\times 10^{-2}\times 1200\times 10^{3}=3.6\times 10^{4}$

F-P 标 准 具 ：

$$A=\frac{\lambda}{\Delta\lambda}=mN'=0.97mN=0.97\times\frac{2nh}{\lambda}\cdot\frac{\pi\sqrt{R}}{1-R}=\frac{2\times 0.04\times 0.97}{0.6328\times 10^{-6}}\times\frac{\pi\times\sqrt{0.981}}{1-0.981}=2.0\times 10^{7}$$

（3）角色散率

光栅：
$$\frac{d\theta}{d\lambda}=\frac{m}{d\cos\theta}=\frac{mN}{l\cos\theta}=\frac{mN}{l\sqrt{1-(\frac{mN\lambda}{l})^2}}=\frac{mn}{\sqrt{1-(mn\lambda)^2}}$$

$$=\frac{1200\times 10^{3}}{\sqrt{1-(1200\times 10^{3}\times 0.6328\times 10^{-6})^2}}=1.844\times 10^{6}$$

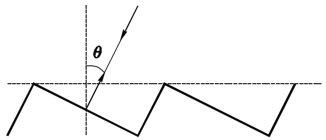
（由 $d\sin\theta=m\lambda$，得 $\cos\theta=\sqrt{1-(\dfrac{m\lambda}{d})^2}$ ）

F-P 标准具：$\left|\dfrac{d\theta}{d\lambda}\right|=\dfrac{1}{\lambda\sin\theta}=\dfrac{1}{\lambda}\sqrt{\dfrac{nh}{\lambda}}=\dfrac{\sqrt{nh}}{\lambda^{3/2}}=\dfrac{\sqrt{0.04}}{(0.6328\times 10^{-6})^{3/2}}=3.973\times 10^{8}$

（对 F-P 标准具，中央谱线的级次为 $m'=\dfrac{2nh}{\lambda}$，第一条谱线为 $m'-1$，由 $\Delta=2nh\cos\theta=m\lambda$ 得：

$\cos\theta=\dfrac{(m'-1)\lambda}{2nh}=1-\dfrac{\lambda}{2nh}$，所以 $\sin\theta=\sqrt{1-(1-\dfrac{\lambda}{2nh})^2}=\sqrt{\dfrac{\lambda}{nh}-(\dfrac{\lambda}{2nh})^2}=\sqrt{\dfrac{\lambda}{nh}}\sqrt{1-\dfrac{\lambda}{4nh}}\approx\sqrt{\dfrac{\lambda}{nh}}$ ）

3-25. 一块闪耀波长为第一级 0.5 μm、每毫米刻痕为 1 200 的反射光栅，在里特罗自准直装置中能看到 0.5 μm 的哪几级光谱？



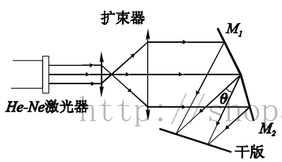
解：里特罗自准直光谱仪使用时，其闪耀方向就是它的入射光方向，一级闪耀方向为：

$\sin\theta_1 = \dfrac{m\lambda}{d} = mn\lambda = 1200\times10^3\times0.5\times10^{-6} = 0.6$，

$\sin\varphi = \sin\theta_1$

根据 $d(\sin\theta\pm\sin\varphi)=m\lambda$，$m=\dfrac{d(\sin\theta\pm\sin\varphi)}{\lambda}=\dfrac{1\pm0.6}{1200\times10^3\times0.5\times10^{-6}}=\begin{cases}2.6\\0.6\end{cases}$，在准直时能看到的条纹为 0、+1、+2 三级条纹。在正入射时 $m=\dfrac{d}{\lambda}=1.6$，能看到的条纹为-1、0、+1 三级条纹。所以在调整过程中总共可能看到的条纹为-1、0、+1、+2 四级条纹。

3-37. 如图所示是制作全息光栅的装置图，试推导其全息光栅的条纹间距公式。今要在干版处获得 1200 条 / mm 的光栅，问两反射镜间的夹角是多少。



3-23 题用图

解：当两个平面镜之间夹角为 θ 时，其反射光之间的夹角为 2θ。根据全息光栅的制作原理，当两束光以 2θ 角在全息版上相交，其干涉条纹间距为 $d=\dfrac{\lambda}{2n\sin\theta}$ 所以

$\sin\theta=\dfrac{\lambda}{2nd}=0.6328\times10^{-6}\times1200\times10^3/2=0.37968$，$\theta=22.31°$。

第四.五章

缺 4-1—4-4，4-10，4-12，4-14，4-17，4-22，5-3—5-6，5-8，5-9，

4-5.一束钠黄光以 60° 角方向入射到方解石晶体上，设光轴与晶体表面平行，并垂直与入射面，问在晶体中 o 光和 e 光夹角为多少？（对于钠黄光，方解石的主折射率 $n_o=1.6584$，$n_e=1.4864$）。

解：根据题意和光在晶体表面折射的性质，在晶体内折射的 o 光和 e 光波矢面与入射面截线为同心圆，o 光和 e 光均服从折射定律。

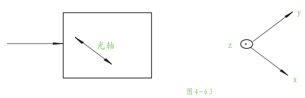
$\because \dfrac{1}{n_e'^2}=\dfrac{\cos^2\theta}{n_o^2}+\dfrac{\sin^2\theta}{n_e^2}$ $\quad\therefore n_e'=n_e=1.4864$

根据折射定律：$\sin i_o=\dfrac{\sin i}{n_o}=\dfrac{\sin60°}{1.6548}\approx0.523$ $\quad\therefore i_o\approx31.56°$

$\sin i_e=\dfrac{\sin i}{n_e}=\dfrac{\sin60°}{1.4864}\approx0.583$ $\quad\therefore i_e\approx35.64°$

由于光轴垂直于入射面，因此 o 光和 e 光的光线与波法线方向不分离，所以两折射光线的夹角 $\alpha=i_e-i_o=4.08°$

4-6. 设有主折射率 n_o=1.5246，n_e=1.4864 的晶体，光轴方向与通光面法线成 45°，如图所示。现有一自然光垂直入射晶体，求在晶体中传播的 o、e 光光线方向，二光夹角 α 以及它们从晶体后表面出射时的相位差（λ=0.5 μm，晶体厚度 d=2cm。）



解：如图，平面光波正入射，光轴在入射面内，且与晶面斜交所以 o 光和 e 光的波法线相同，但 o 光和 e 光光线方向不同。

又因为 $n_e<n_o$，故 e 光比 o 光远离光轴，且光沿其波法线方向传播。

设 e 光与 o 光的离散角为 α

$$\tan\alpha=\frac{1}{2}\sin2\theta\left(\frac{1}{n_e^2}-\frac{1}{n_o^2}\right)\times\left(\frac{\cos^2\theta}{n_o^2}+\frac{\sin^2\theta}{n_e^2}\right)^{-1}$$

$$=\frac{1}{2}\times\frac{(0.45703-0.43022)}{0.5\times(1/2.3244+1/2.1880)}$$

$$=\frac{0.13635}{4.5124}=0.030217$$

所以，$\alpha=\arctan0.030217=1°43'$

晶体中出射的 e 光与 o 光的相位差：$\Delta\varphi=\left|\dfrac{2\pi}{\lambda}\times(n_e(\theta)-n_o)\times d\right|$

又因为：$n_e(\theta)=n_on_e\Big/\sin\theta\sqrt{n_o^2+n_e^2}=1.5014$

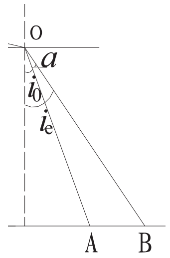
所以： $\Delta\varphi = \left|\frac{2\pi}{\lambda}\times(1.5014-1.5246)\times d\right|$

$=4\pi\times10^{6}\times(1.5246-1.5014)\times2\times10^{-1}$

$=1857\pi$

4-7. 一细光束掠入射单轴晶体，晶体的光轴与入射面垂直，晶体的另一面与折射表面平行。已知 o、e 光在第二个面上分开的距离是 3mm，若 n_o＝1.525，n_e＝1.479，计算晶体的厚度。

解：如图所示，入射角 i≈90°。根据题意，o 光和 e 光均满足折射定律，且晶体中的 o 光和 e 光折射率大小等于其主折射率，其折射角：



$\sin i_o = \frac{\sin i}{n_o} \approx \frac{\sin 90°}{1.525} \approx 0.656 \qquad \therefore i_o \approx 40.996°$

$\sin i_e = \frac{\sin i}{n_e} \approx \frac{\sin 90°}{1.479} \approx 0.676 \qquad \therefore i_e \approx 42.532°$

由于光轴垂直于入射面，因此 o 光和 e 光的光线与波法线方向不分离，所以两折射光线的夹角 $\alpha = i_e - i_o = 1.536°$

根据图中几何关系：$\frac{\sin\alpha}{AB} = \frac{\sin\angle OBA}{OA}$

其中 $\angle OBA = 90° - i_e = 47.468°$，AB＝3mm

$\therefore$OA＝$\frac{3\times\sin 47.468°}{\sin 1.563°} \approx 81.049mm$

$\therefore$晶体厚度 $d = OA\cdot\cos i_o \approx 61.172mm$

4-8. 一块单轴晶体的光轴垂直于表面，晶体的两个主折射率分别为 n_o 和 n_e，证明当平面波以入射角 θ_1 入射到晶体时，晶体内 e 光的折射角 θ_e' 为：$tg\theta_e' = \frac{n_o \sin\theta_1}{n_e\sqrt{n_e^2 - \sin^2\theta_1}}$

证明：设 e 光波法线与光轴的夹角为 θ_e，由折射定理：$n_1 \sin\theta_1 = n_e' \sin\theta_e$

其中，$n_e' = \frac{n_e n_o}{\sqrt{n_e^2\cos^2\theta_e + n_o^2\sin^2\theta_e}}$，在空气中 $n_1 = 1$

由此可得：$tg\theta_e = \frac{n_e \sin\theta_1}{n_o\sqrt{n_e^2 - \sin^2\theta_1}}$

$\therefore$e 光与光轴的夹角 $tg\theta_e' = \frac{n_o^2}{n_e^2} tg\theta_e = \frac{n_o \sin\theta_1}{n_e\sqrt{n_e^2 - \sin^2\theta_1}}$

4-9.例 7-1

4-11. 两块方解石晶体平行薄板，按相同方式切割（图中斜线代表光轴），并平行放置，细单色自然光束垂直入射，通过两块晶体后射至一屏幕上，设晶体的厚度足以使双折射的两束光分开，试分别说明当晶体板 2 在：① 如图 4-64 所示；② 绕入射光方向转过 π 角；③ 转过 $\pi/2$ 角；④ 转过 $\pi/4$ 角的几种情况下，屏幕上光点的数目和位置。

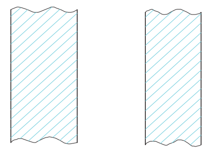
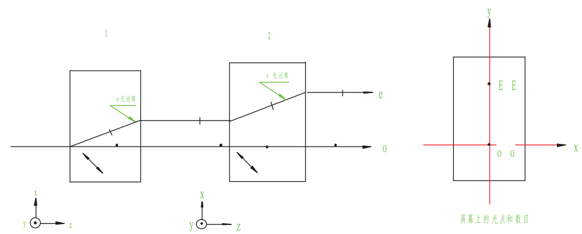
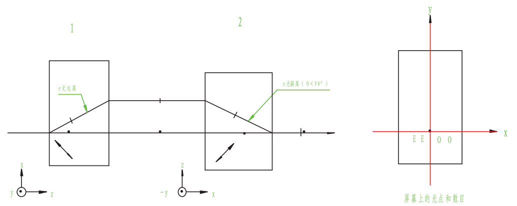


图4-64

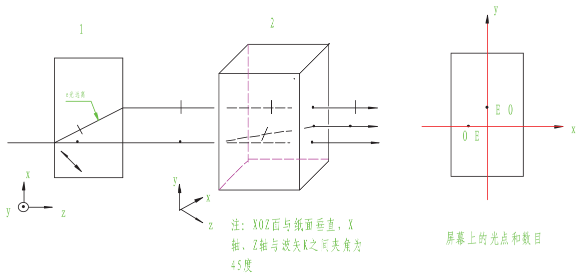
解：1）屏上有 2 个光点。E 光光点向上平移，o 光光点正对入射点。



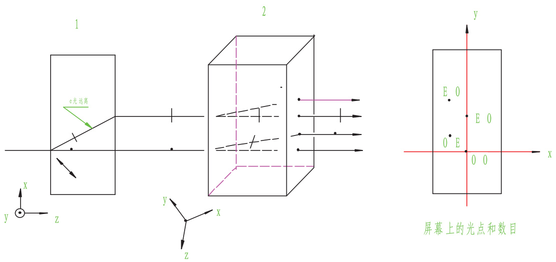
2）若 $d_1 = d_2$，屏上只有 1 个光点，若 $d_1 \neq d_2$，屏上有 2 个光点，$d_1 > d_2$，e 光光点上移，$d_1 < d_2$，e 光光点下移。



3）屏上有 2 个光点。o 光光点正对入射点，e 光光点水平平移。



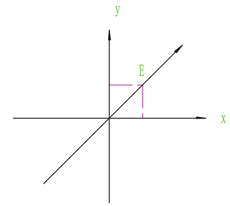
4）屏上有 4 个光点。1 个光点正对入射点，1 个光点向上平移，另外 2 个光点分别相对这 2 个光点向 45° 方向平移。



4-13.例 7-5.

4-15. 设正入射的线偏振光振动方向与半波片的快、慢轴成 45°，分别画出在半波片中距离入射表面为：① 0；② $d/4$；③ $d/2$；④ $3d/4$；⑤ d 的各点处两偏振光叠加后的振动形式。按迎着光射来的方向观察画出。

解：(1)在$d'=0$处，$\Delta\varphi=0$，则两偏振光叠加后仍为线偏振光，如下图：

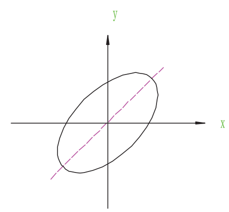


(2)在$d'=\frac{d}{4}$处，$\Delta\varphi=\frac{\pi}{4}$，并设，$E_{0x}=E_{0y}=\frac{\sqrt{2}}{2}E_0=A$

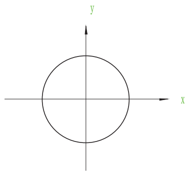
则有：$\frac{E_x^2}{A^2}+\frac{E_y^2}{A^2}-\sqrt{2}\frac{E_xE_y}{A^2}=\frac{1}{2}$，化简为：

$$E_x^2+E_y^2-\sqrt{2}E_xE_y=\frac{A^2}{2}$$

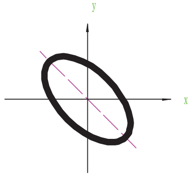
则两偏振光叠加后为椭圆偏振光，如下图：



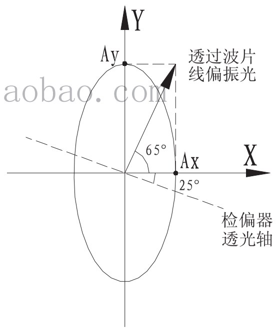
(3)在$d'=\frac{d}{2}$处，$\Delta\varphi=\frac{\pi}{2}$，则两偏振光叠加后为圆偏振光，如下图：



(4)在$d' = \frac{3d}{4}$处，$\Delta\varphi = \frac{3\pi}{4}$，则两偏振光叠加后为椭圆偏振光，如下图：



4-16. 当通过一检偏器观察一束椭圆偏振光时，强度随着检偏器的旋转而改变，当在强度为极小时，在检偏器前插入一块 1/4 波片，转动 1/4 波片使它的快轴平行于检偏器的透光轴，再把检偏器沿顺时针方向转动 25° 就完全消光，问该椭圆偏振光是左旋还是右旋，椭圆长短轴之比是多少？



解：椭圆偏振光可以看作是一个光矢量沿长轴方向的线偏振光和一个位相相差 π/2 的光矢量沿短轴方向的线偏振光的合成。即：$\varphi_y - \varphi_x = \pm\frac{\pi}{2}$

如图，设短轴方向为 x 轴，长轴方向为 y 轴。因此，当转动检偏器，使之透光轴平行于 x 轴时，强度最小。由题意，插入快轴沿 x 轴的 1/4 波片后，透射光为线偏振光，振动方向与 x 轴成 65°，此时$\Delta\varphi_1 = \varphi_y - \varphi_x = 0$

∵快轴沿 x 轴的 1/4 波片产生的相位差：$\Delta\varphi_2 = \varphi_y - \varphi_x = -\frac{\pi}{2}$

∴椭圆偏振光的初始位相差 $\varphi_y - \varphi_x = \Delta\varphi_1 - \Delta\varphi_2 = \frac{\pi}{2}$

表示右旋椭圆偏振光，由图可知，椭圆长轴和短轴之比为：$\frac{A_y}{A_x} = tg65° = 2.145$

4-18. 用一石英薄片产生一束椭圆偏振光,要使椭圆的长轴或短轴在光轴方向,长短轴之

比为 2:1,而且是左旋的。问石英片应 多厚？如何放置？（λ=0.5893 μm, n_o=1.5442，n_e=1.5533。）

解,(1)由题意知，应使光通过晶体后，两本征模的位相差$\Delta\varphi = \frac{\pi}{2}$，

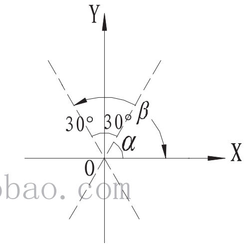
即:$\frac{2\pi}{\lambda}(n_e - n_o)d = \frac{\pi}{2}$,代入数据可得，$d = 0.016mm$

所以，石英片的厚度为0.016mm。

(2)要使长轴与短轴之比为2:1,则应使入射光的振动方向与坐标轴之间的夹角θ满足$\tan\theta = \frac{1}{2}$，所以，$\theta = 26.565°$

4-19.在前后两个偏振器之间插入一块石英的$\frac{1}{8}$波片，两偏振器的偏振轴夹角为 60°，波片的光轴与两偏振器的偏振轴都成 30°，问当光强为 I_0 的自然光入射这一系统时，通过第二个偏振器后的光强是多少？

解：右图可知，两偏振器偏振轴与 x 轴的夹角分别为：



$\alpha = 60°$，$\beta = 120°$

自然光通过第一个偏振器后光强为$\frac{I_0}{2}$

∴通过第二个偏振器后的光强为：

$$I = \frac{I_0}{2}\cos^2(\alpha - \beta) - \frac{I_0}{2}\sin 2\alpha \sin 2\beta \sin^2\frac{\varphi}{2}$$

$$= \frac{I_0}{2}\cos^2 60° - \frac{I_0}{2}\sin 120° \sin 240° \sin^2\frac{\pi}{8} \approx 0.18I_0$$

4-20. 一块厚度为 0.04mm 的方解石晶片，其光轴平行于表面，将它插入正交偏振片之间，且使主截面与第一个偏振片的透振方向成θ（$\theta \neq 0°$、90°）角。试问哪些光不能透过该装置。