

中科院 811量子力学 2014年考研真题答案解析

高参考价值的真题、答案、学长笔记、辅导班课程，访问：www.kaoyancas.net

一、已知算符 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & c-1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$, 其中 c 为实常数, 当 $c=c_0$, 有共同本征态。

1. 求 c_0 的值;
2. 求当 $c=c_0$ 时算符 A 和 B 共同本征态;
3. 求当 $c \neq c_0$, 由 A 表象到 B 表象的变换矩阵。

解: 1. \because 算符 A 和 B 有共同本征态, $\therefore [A, B] = 0 \Rightarrow AB = BA$

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & c_0-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ (c_0-1)i & 0 \end{pmatrix}$$

$$BA = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & c_0-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -i(c_0-1) \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

$$c_0 - 1 = 1 \Rightarrow c_0 = 2$$

2. $c=c_0=2$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$; 设 B 的本征态为 ϕ_b , 本征值为 b , $\therefore B\phi_b = b\phi_b$

$$\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = b \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} -b & -i \\ i & -b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = 0, \text{要求} \begin{vmatrix} -b & -i \\ i & -b \end{vmatrix} = b^2 - 1 = 0 \Rightarrow b = \pm 1$$

$$b=1, \phi_{b1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}; b=-1, \phi_{b2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$$

$\because A$ 为单位矩阵, 它的本征态可以取任意态, 自然 ϕ_{b1} 、 ϕ_{b2} 也是 A 的本征态。

$$\therefore \text{算符 } A \text{ 和 } B \text{ 共同本征态为 } \psi_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}; \psi_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$$

$$3. \text{变换矩阵 } S = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix}$$