2015年中科院811量子力学 答案解析

一、一个质量为μ的粒子在一维盒子$(0<x<L)$里自由运动，波函数$\psi(x)$满足$\psi(0)=\psi(L)$; $\psi'(0)=\psi'(L)$

1)求系统的能级

2)第一激发态写成归一化动量本征态的组合形式，并给出当$<p>=0$时，组合系数满足条件

解析:1) $H=\dfrac{p^2}{2\mu}$, $H\psi(x)=E\psi(x)$; 即 $\dfrac{-\hbar^2}{2\mu}\dfrac{d^2\psi}{dx^2}=E\psi \Rightarrow \psi''(x)+\dfrac{2\mu E}{\hbar^2}\psi(x)=0$(令$k=\sqrt{\dfrac{2\mu E}{\hbar^2}}$)

得 $\psi''(x)+k^2\psi(x)=0$, 取 $\psi(x)=Ae^{ikx}+Be^{-ikx}$

$$\begin{cases}\psi(0)=\psi(L)=0\\ \psi'(0)=\psi'(L)\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}A+B=0\\ (A+B)\cos kL+(A-B)i\sin kL=0\\ (A-B)ik=ik(A-B)\cos kL+ik(A+B)i\sin kL\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}A=-B\\ \cos kL=1\Rightarrow kL=2n\pi\\ \sin kL=0\end{cases}$$

$$\Rightarrow E=\frac{2n^2\hbar^2\pi^2}{\mu L^2}(n=0,\pm1,\pm2.....);\ \therefore \psi(x)=A(e^{ikx}-e^{-ikx})$$

2)利用归一化条件$\delta(x-x')=\int_{-\infty}^{+\infty}\psi_k{}^*(x')\psi_k(x)dk$

$$=A^2\int_{-\infty}^{+\infty}(e^{-ikx'}-e^{ikx'})(e^{ikx}-e^{-ikx})dk$$

$$=A^2\int_{-\infty}^{+\infty}(e^{i(x-x')k}-e^{-ik(x+x')}-e^{i(x'+x)k}+e^{i(x'-x)k})dk$$

$$=A^2\{2\pi\delta(x-x')-\int_{-\infty}^{+\infty}2\cos(x+x')kdk+2\pi\delta(x-x')\}$$