中科院 2009 年 811 量子力学真题答案解析

一、（30′）已知在 (l^2, l_z) 的表象中，

$$l_x = \frac{\hbar}{\sqrt{2}}\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

求：（1）l_x 的本征值和相应的本征函数；（2）l_y 的矩阵表示。

解：

二、已知一粒子处于一维谐振子势场中运动，势能为 $V(x) = \frac{1}{2}kx^2 (k > 0)$，求：
（1）粒子的基态本征函数 $\psi_0(x)$；（2）若势场突然变为 $V'(x) = kx^2$，则粒子仍然处于基态的概率。提示：用湮灭算符 $\hat{a}_- = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}(\hat{x} + \frac{i}{m\omega}\hat{p})$, $\sqrt{2} = 1.414$, $\sqrt[4]{2} = 1.189$。

解：（1）

$$\hat{a}_-\psi_0 = 0 \qquad \hat{a}_- = \frac{1}{\sqrt{2m\omega\hbar}}(m\omega\hat{x} + i\hat{p})$$

$$\frac{1}{\sqrt{2m\omega\hbar}}[m\omega x + i(-i\hbar\frac{d}{dx})]\psi_0 = 0 \qquad \frac{d\psi_0}{dx} + \frac{m\omega}{\hbar}x\psi_0 = 0 \qquad \frac{d\psi_0}{dx} = -\frac{m\omega}{\hbar}x\psi_0 \qquad \frac{d\psi_0}{\psi_0} = -\frac{m\omega}{\hbar}xdx$$

$$\ln\psi_0 = -\frac{m\omega}{2\hbar}x^2 + C \qquad \psi_0 = Ae^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2}$$

归一化：$1 = |A|^2\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{m\omega}{\hbar}x^2}dx = |A|^2\sqrt{\pi\hbar m\omega}$ $\quad A = (\frac{m\omega}{\pi\hbar})^{\frac{1}{4}}$ 其中利用：$\int_0^{\infty} e^{-ax^2}dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}$

$$\psi_0 = (\frac{m\omega}{\pi\hbar})^{\frac{1}{4}}e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2}$$

（2）势场突然变为 $V'(x) = kx^2 = \frac{1}{2}(2k)x^2 = \frac{1}{2}m(\sqrt{2}\omega)^2x^2$，解的形式不改变，此时基态波函数为：

$$\psi_0'(x) = (\frac{m\sqrt{2}\omega}{\pi\hbar})^{\frac{1}{4}}e^{-\frac{\sqrt{2}m\omega}{2\hbar}x^2}$$

$$\langle\psi_0'(x)|\psi_0(x)\rangle = (\sqrt{2})^{\frac{1}{4}}\sqrt{\frac{m\omega}{\pi\hbar}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(\frac{\sqrt{2}m\omega}{2\hbar} + \frac{m\omega}{2\hbar})x^2}dx = (\sqrt{2})^{\frac{1}{4}}\sqrt{\frac{m\omega}{\pi\hbar}}\cdot 2\int_0^{\infty} e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}(\sqrt{2}+1)x^2}dx$$

$$= (\sqrt{2})^{\frac{1}{4}}\sqrt{\frac{m\omega}{\pi\hbar}}\cdot 2\cdot\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2\pi\hbar}{m\omega}\frac{1}{\sqrt{2}+1}} = (\sqrt{2})^{\frac{1}{4}}\sqrt{\frac{2}{\sqrt{2}+1}}$$