

2003 年硕士学位研究生招生考试《量子力学》考题答案

一. 1. $\langle u|A|v\rangle = \langle u|a\rangle\langle a|v\rangle = \langle v|a\rangle^* \langle a|u\rangle^* = \langle v|A|u\rangle^*$ 厄密

$$\langle u|A|u\rangle = \langle u|a\rangle\langle a|u\rangle = |\langle u|a\rangle|^2 \geq 0 \quad \text{正定}$$

2. 利用 A^* 的性质，可得：

$$\langle u|A^*A|v\rangle = \langle v|A^*A|u\rangle^* \quad \text{即 } A^*A \text{ 是厄密算符.}$$

现在取 $|u\rangle = |v\rangle$ ，并写出 $|\omega\rangle = A|u\rangle$ ，则有：

$$\langle u|A^*A|u\rangle = \langle \omega|\omega\rangle \geq 0 \quad \text{因此，} A^*A \text{ 是正定的.}$$

设 $\{|n\rangle\}$ 是正交完备态集，于是有：

$$\text{Tr}(A^*A) = \sum_n \langle n|A^*A|n\rangle, \quad \text{利用 } \sum_n |n\rangle\langle n| = I, \text{ 可得:}$$

$$\text{Tr}(A^*A) = \sum_n \langle n|A^* \sum_m |m\rangle\langle m|A|n\rangle$$

$$= \sum_{n,m} \langle n|A^*|m\rangle\langle m|A|n\rangle$$

$$= \sum_{n,m} |\langle n|A|m\rangle|^2 \geq 0$$

仅当所有元素 $\langle n|A|m\rangle = 0$ 时等号才成立，这等价于算符关系式 $A = 0$

3. 令 $f(x) = e^{Ax}e^{Bx}$ ，并对 x 求微分：

$$\frac{df}{dx} = (A + e^{Ax}Be^{-Ax})f(x) \quad \text{利用公式 } e^{xA}Be^{-xA} = B + x[A, B]$$

$$\frac{df}{dx} = \{(A+B) + x[A, B]\}f(x)$$

显然 $f(0) = 1$ 则有

$$f(x) = e^{(A+B)x + \frac{x^2}{2}[A, B]} = e^{(A+B)x} e^{\frac{x^2}{2}[A, B]}$$

令 $x = 1$ ，则证毕。

4. 设 $|\psi\rangle$ 已归一化。 $\langle A \rangle = \langle \psi, A\psi \rangle$

$$\therefore \frac{d\langle A \rangle}{dt} = \left\langle \frac{\partial \psi}{\partial t}, A\psi \right\rangle + \left\langle \psi, A \frac{\partial \psi}{\partial t} \right\rangle + \left\langle \psi, \frac{\partial A}{\partial t} \psi \right\rangle$$

$$\text{代入薛定谔方程则有: } i\hbar \frac{d\langle A \rangle}{dt} = \langle [A, H] \rangle + i\hbar \left\langle \frac{\partial A}{\partial t} \right\rangle$$