

中国科学院—中国科技大学 2003 年招收攻读硕士学位研究生入学考试试题

试题名称：量子力学 （3 小时，闭卷，每大题 30 分）

1. 如果厄密算符 \hat{A} 对任何矢量 $|u\rangle$ ，有 $\langle u|\hat{A}|u\rangle \geq 0$ ，则称 \hat{A} 为正定算符，求证：算符 $\hat{A} = |a\rangle\langle a|$ 是厄密正定算符。
2. 如果 \hat{A} 是任一线性算符，求证 A^+A 是正定的厄密算符，它的迹等于 \hat{A} 在任意表象中的矩阵元的模平方之和。试推导，当且仅当 $\hat{A} = 0$ 时， $Tr(A^+A) = 0$ 才成立。
3. 求证：如果 $[[\hat{A}, \hat{B}], \hat{A}] = [[\hat{A}, \hat{B}], \hat{B}] = 0$ ，则 $e^{\hat{A}}e^{\hat{B}} = e^{\hat{A}+\hat{B}}e^{\frac{1}{2}[\hat{A}, \hat{B}]}$ 。
4. 求证：任一可观测的平均值对时间的导数由下式给出：

$$i\hbar \frac{d\langle \hat{A} \rangle}{dt} = \langle [\hat{A}, \hat{H}] \rangle + i\hbar \left\langle \frac{\partial \hat{A}}{\partial t} \right\rangle$$

二、把传导电子限制在金属内势的一种平均势，对于下列一维模式（如图）：

$$V(x) = \begin{cases} -V_0, & x < 0 \\ 0, & x > 0 \end{cases}$$

试就

- (1) $E > 0$,
- (2) $-V_0 < E < 0$ 两种情况计算接近金属表面的传导电子的反射和透射几率。

三、对于一维谐振子，求消灭算符 a 的本征态，将其表示成各能量本征态 $|n\rangle$ 的线性叠加。

四、给定 (θ, φ) 方向单位矢量 $\vec{n} = (n_x, n_y, n_z) = (\sin \theta \cos \varphi, \sin \theta \sin \varphi, \cos \theta)$

求 $\sigma_n = \vec{\sigma} \cdot \vec{n}$ 的本征值和本征函数。（取 σ_z 表象）

五、有一个定域电子（不计及其轨道运动）受到均匀磁场作用，磁场 B 指向正 x 方向，磁作用势为：

$$\hat{H} = \frac{eB}{\mu c} \cdot \hat{S}_x = \frac{e\hbar B}{2\mu c} \hat{\sigma}_x$$

设 $t=0$ 时电子的自旋“向上”，即 $S_x = \hbar/2$ ，求 $t > 0$ 时 \vec{S} 的平均值。