

**中国科学院—中国科技大学**  
**2002 年招收攻读硕士学位研究生入学考试试题**

**试题名称：量子力学（理论型）**

（选作五题，每题 20 分）

一、（20 分）一个质量为  $\mu$  的粒子在下面的势阱中作束缚态运动：

$$V(x) = A\delta(x)$$

其中  $A < 0$  为常数。求值  $a$ ，使粒子处于范围  $-a < x < a$  内的几率为 25%。

二、（20 分）纠缠态可能在量子通讯中有重大应用。两个量子体系的复合系统的纠缠态是指不能用子系统的态的直积表示的态。例如，两个自旋为  $1/2$  的粒子的各自的本征态为  $|m, a\rangle$ ，其中  $m = 1/2, -1/2$ ，为磁量子数， $a = 1, 2$ ，标记不同粒子，则复合系统的非耦合基如  $|m, 1\rangle|n, 2\rangle$ ， $(m, n = 1/2, -1/2)$ ，就是些非纠缠态；而一个耦合基如

$$|00\rangle = (|1/2, 1\rangle|-1/2, 2\rangle - |-1/2, 1\rangle|-1/2, 2\rangle) / \sqrt{2}$$

就是个纠缠态。试作出此复合体系一套互相正交归一的纠缠态（它们也可作为此复合系统的完备基）。

三、（20 分）设算符  $\hat{H}$  具有连续本征值  $\omega$ ，其本征函数  $u(x, \omega)$  构成正交完备系。

求方程

$$(H - \omega^*)V(x) = F(x)$$

的解，其中  $F(x)$  为已知函数， $\omega^*$  为某个特定的本征值。

四、（20 分）一个质量为  $\mu$  的粒子作一维无限运动，当其哈密顿算符为

$$H = p^2/2\mu + V(x)$$

时，能级为  $E_n$ 。如果哈密顿算符变为  $H' = H + \lambda p/\mu$ ，求此时的能级  $E_n'$ 。

五、（20 分）设力学量  $F$  和角动量  $J_i (i=1, 2, 3)$  对易，即  $F$  为标量算符。试证在  $(J^2, J_3)$  的共同本征态  $|jm\rangle$  中， $F$  的平均值与量子数  $m$  无关。

六、（20 分）一个两能级系统，哈密顿量为  $H$ ，能级间隔大小为  $A$ 。现在此系统受到一个微扰  $H'$ 。在  $H$  表象中， $H'$  的表示为  $\lambda(\sigma_1 + \sigma_2)$ ，其中  $\sigma_1, \sigma_2$  是泡利矩阵。 $\lambda$  为实数。请算出系统受扰后的能级间隔（精确到二级微扰修正）。

**中国科学院—中国科技大学**  
**2002 年招收攻读硕士学位研究生入学考试试题**

试题名称：                    **量子力学（实验型）**

（选作五题，每题 20 分）

一、（20 分）对于氢原子结构，采用电子绕核做圆周运动的半经典模型：

- (1) 从德布罗意（驻）波的观点导出玻尔关于定态轨道的量子化条件。
- (2) 从牛顿定律和(1)的量子化条件导出氢原子量子化轨道半径和能量。

二、（20 分）一个质量为  $\mu$  的粒子，处于势阱  $V(x) = \begin{cases} \infty, & x < 0 \\ 0, & 0 \leq x \leq a \\ \infty, & x > a \end{cases}$  中， $t=0$  时，其归一

化波函数为  $\psi(x, t=0) = \sqrt{\frac{2}{5a}} \left( 1 - 4 \cos \frac{\pi x}{a} \right) \sin \frac{\pi x}{a}$ ，求

- (1) 在后来某一时刻  $t=t_0$  时的波函数；
- (2) 在  $t=0$  和  $t=t_0$  时体系的平均能量。

三、（20 分）设  $\hat{F}$  为厄密算符，证明在能量表象中下式成立：

$$\sum_n (E_n - E_k) |F_{nk}|^2 = \frac{1}{2} \langle k | [\hat{F}, [\hat{H}, \hat{F}]] | k \rangle$$

四、（20 分）钠原子（原子序数为 11）处于沿  $z$  方向的强磁场  $B$  中：

- (1) 计入自旋（但不计入自旋—轨道耦合）。写出其价电子的哈密顿量（只计入  $B$  的一次项），并写出相应定态能量和波函数的通式（主要标志出对量子数和空间坐标的依赖性）。
- (2) 说明此情形下钠原子发射光谱中黄线的（正常）塞曼分裂现象。

五、（20 分）设质量为  $m$ ，电荷为  $q$  的粒子被约束在谐振子势  $V(x) = \frac{1}{2} kx^2$  内，现沿  $x$  方向加上一个恒定的常数电场  $E$ 。试计算其基态  $|0\rangle$  和第一激发态  $|1\rangle$  的能级移动，准确到  $E^2$  级。