中国科学院－中国科技大学
1998 年招收攻读硕士学位研究生入学试卷

试题名称：　　　　　　　量子力学（理论型）

说明：共六道大题，选作五题，每题 20 分。

一、质量为 m 的粒子在一维势场

$$V(x)=\begin{cases}0, & |x|>a \\ -V_0, & |x|<a\end{cases} \quad (V_0>0)$$ 中运动。

(1) 求基态能量 E_0 满足的方程；

(2) 求存在且仅存在一个束缚态的条件。　　(1999 年(理论型)第三题)

二、自旋为 $\dfrac{\hbar}{2}$ 的带电粒子（电荷为 q，质量为 m）受到均匀磁场 $\vec{B}=B\vec{e}_y$ 的作用（$\vec{e}_y$ 为 y 方向的单位矢量），其哈密顿量为 $\hat{H}=\hbar\omega+\dfrac{eB}{mc}\hat{s}_y$。（$\hat{s}_y$ 为自旋算符的 y 分量），如果 $t=0$ 时粒子的自旋指向正 x 轴方向，求粒子自旋平均值的时间演化。(1999 年(理论型)第四题)

三、一个质量为 m 的粒子在一维势场：

$$V(x)=\begin{cases}\infty, & |x|>3a \\ 0, & a<x<3a \\ V_0, & |x|<a \\ 0, & -3a<x<-a\end{cases}$$

中运动。

(1) $V_0=0$ 时，求粒子的能谱；

(2) $V_0\neq 0$ 时，用一级微扰法求基态能量。

四、设有算符 a_i 和 $a_i^\dagger$ 满足如下对易关系（$a_i^\dagger$ 是 a_i 的厄密共轭，$i,j=1,2$）：

$$a_i a_j^\dagger - a_j^\dagger a_i=\delta_{ij},\quad a_i a_j - a_j a_i=0,\quad a_i^\dagger a_j^\dagger - a_j^\dagger a_i^\dagger=0$$

试求哈密顿量 $(\omega_0>\omega_1>0)$　$\hat{H}=\hbar\omega_0\left(a_1^\dagger a_1+a_2^\dagger a_2\right)+i\hbar\omega_1\left(a_1^\dagger a_2-a_2^\dagger a_1\right)$ 的能谱。

（提示：仅利用 a_1 和 a_2，$a_1^\dagger$ 和 $a_2^\dagger$ 之间的线性变换，可将 $\hat{H}$ 化为二个不耦合的谐振子的哈密顿量之和。）

五、将上题哈密顿量　中与　有关的部分当作微扰，请用定态微扰论求出第一激发态的修正。（第一激发态的二度简并的。）

中国科学院—中国科技大学
1998 年招收攻读硕士学位研究生入学试卷

试题名称：　　　　　　　　量子力学（实验型）

说明：共四道大题，无选择题，计分在题首标出，满分 100 分。

一、设一维谐振子能量本征值为 E_n，相应的本征函数为 $\psi_n(x)$。

1)　（6 分）由厄米多项式 $H_n(x)$ 的递推关系：

$$H_{n+1}(x)-2xH_n(x)+2nH_{n-1}(x)=0,\quad H_n'(x)=2nH_{n-1}(x)$$

导出 $x\psi_n(x)$ 及 $\psi_n'(x)$ 满足的递推关系。

2)　（4 分）求 $\psi_n(x)$ 上坐标及动量算符的平均值：$\bar{x}$，$\bar{p}$。

3)　（10 分）求证简谐振子的零点能 $E_0=\hbar\omega/2$ 是测不准关系 $\overline{\Delta x^2}\,\overline{\Delta p^2}\geq\dfrac{\hbar^2}{4}$ 的直接后果，其中 $\Delta x^2=\left(x-\bar{x}\right)^2$，$\Delta p^2=\left(p-\bar{p}\right)^2$ 。

4)　（5 分）求 $\psi_n(x)$ 态上动能算符和势能的平均值 $\bar{T}$，$\bar{V}$。它们之间的关系是什么？（可用的公式：$\psi_n(x)=N_n e^{-\alpha^2x^2/2}H_n(\alpha x)$，$N_n=\sqrt{\dfrac{\alpha}{\sqrt{\pi}\,2^n n!}}$，$\alpha=\sqrt{\dfrac{\mu\omega}{\hbar}}$ 。）

二、轨道角动量算符的三个分量 $\hat{j}_x$，$\hat{j}_y$，$\hat{j}_z$ 满足的对易关系是：

$$\left[\hat{j}_x,\hat{j}_y\right]=i\hbar\hat{j}_z,\quad \left[\hat{j}_y,\hat{j}_z\right]=i\hbar\hat{j}_x,\quad \left[\hat{j}_z,\hat{j}_x\right]=i\hbar\hat{j}_y$$

定义算符 $\hat{j}^2=\hat{j}_x^2+\hat{j}_y^2+\hat{j}_z^2$，$\hat{j}_\pm=\hat{j}_x\pm i\hat{j}_y$。

1)　（15 分）求对易关系：$\left[\hat{j}^2,\hat{j}_\pm\right]$，$\left[\hat{j}_z,\hat{j}_\pm\right]$，$\left[\hat{j}_+,\hat{j}_-\right]$。

2)　（10 分）若 $\hat{j}^2$ 和 $\hat{j}_z$ 的共同本征函数为 ψ_{jm}，其中 j 和 m 为相应的量子数。求证也是 $\hat{j}^2$ 和 $\hat{j}_z$ 的共同本征函数，并求出相应的本征值。

三、（25 分）把一个自旋为 $\dfrac{\hbar}{2}$ 的粒子置于磁场 $\vec{B}$ 中，若已知 $\vec{B}=B_0\left(\sin\theta\vec{e}_x+\cos\theta\vec{e}_z\right)$，其中 $\vec{e}_x$，$\vec{e}_z$ 为 x，z 方向的单位矢量，B_0，θ 均为常数，体系的哈密顿量为 $\hat{H}=-\hat{\vec{M}}\cdot\hat{\vec{B}}$，其中 $\hat{\vec{M}}$ 为自旋磁矩，$\hat{\vec{\mu}}=2\mu_B\hat{\vec{S}}$，$\mu_B$ 为玻尔磁子，试求 $\hat{H}$ 和本征值和本征矢。

四、（25 分）一个质量为 m 的粒子在一维势 $V(x)$ 中运动，势的函数表达式为：

$$V(x)=\begin{cases}\infty, & |x|>3a\\ 0, & a<x<3a\\ V_0, & |x|<a\\ 0, & -3a<x<-a\end{cases}$$

将 V_0 部分视为在 $6a$ 长的平坦势（即：$V=0$，$|x|<3a$；$V=\infty$，$|x|>3a$）上的微扰，用一级微扰方法求基态能量。