中国科学院－中国科技大学
1999 年招收攻读硕士学位研究生入学试卷

试题名称：　　　　　　　量子力学（理论型）

（选作五题，每题 20 分）

一、设 x 和 $\hat{p}$ 分别为位置和动量算符，满足关系 $[x,\hat{p}]=i\hbar$ 求，

(1) $e^{ia\hat{p}}xe^{-ia\hat{p}}=?$

(2) $e^{-ia\hat{p}x}\left[x,e^{-ia\hat{p}x}\right]=?$

二、设有哈密顿量 $\hat{H}=\dfrac{\hat{p}^2}{2m}+\dfrac{1}{2}m\omega^2x^2+\sqrt{2m\hbar}x$，求：

(1) $\hat{H}$ 的能谱；

(2) $\hat{H}$ 的基态和第一激发态的归一波函数；

(3) 估计基态处于区间 $\left[0,\sqrt{\sqrt{\dfrac{\hbar}{m}}}\right]$ 几率。

三、质量为 m 的粒子在一维势场 $V(x)=\begin{cases}0, & |x|<a\\ V_0, & |x|>a\end{cases}$ $(V_0>0)$ 中运动。

(1) 求 $V_0\to\infty$ 时粒子的能谱和归一波函数。

(2) 求存在且仅存在三个束缚态的条件。　(1998 年(理论型)第一题)

四、自旋为 $\dfrac{\hbar}{2}$ 的带电粒子（电荷为 q，质量为 m）受到均匀磁场 $\vec{B}=B\vec{e}_y$ 的作用（$\vec{e}_y$ 为 y 方向的单位矢量），其哈密顿量为 $\hat{H}=\hbar\omega+\dfrac{eB}{mc}\hat{s}_y$。（$\hat{s}_y$ 为自旋算符的 y 分量），如果 $t=0$ 时粒子的自旋指向正 x 轴方向，求 t 时刻粒子自旋的平均值。(1998 年(理论型)第二题)

五、一维谐振子系统的能量本征态是 $|n\rangle=0,1,2,\cdots$，满足

$$\hat{H}_0=\left(n+\frac{1}{2}\right)\hbar\omega|n\rangle,\quad \langle n|m\rangle=\delta_{n,m}$$

设有一扰动 $\hat{W}$，满足 $\langle m|\hat{W}|n\rangle=\begin{cases}\lambda, & n^2+m^2=1\\ 0, & \text{others}\end{cases}$，系统的哈密顿量为 $\hat{H}=\hat{H}_0+\hat{W}$，如果 $t=0$ 时系统处于基态，求 t 时刻系统处于各个态上的几率。

中国科学院—中国科技大学
1999 年招收攻读硕士学位研究生入学试卷

试题名称：　　　　　　　　量子力学（实验型）

说明：共五道大题，无选择题，计分在题尾标出，满分 100 分。

一、 质量为 m 的粒子在一维势阱 $V(x)$ 中运动。

$$V(x)=\begin{cases}0, & |x|<a \\ \infty, & |x|>a\end{cases},$$

1) 求粒子的能级 E_n 和归一化的波函数 $\psi_n(x)$。（10 分）

2) 求出粒子在态 $\psi_n(x)$ 上的位置平均值 $\bar{x}$。（5 分）。

3) 设粒子所处的态由波函数

$$\psi_n(x)=\begin{cases}C(a^2-x^2), & |x|<a \\ 0, & |x|>a\end{cases}$$

描述，其中 C 为常数。

a) 求在态 $\psi(x)$ 中粒子取能量 E_n 的几率分布。（10 分）

b) 求在态 $\psi(x)$ 中粒子能量的平均值。（5 分）

二、 轨道角动量算符 $\hat{L}_x=y\hat{p}_z-z\hat{p}_y$， $\hat{L}_y=z\hat{p}_x-x\hat{p}_z$， $\hat{L}_z=x\hat{p}_y-y\hat{p}_x$，

1) 求出 $\hat{L}_x,\hat{L}_y\ \hat{L}_z$ 与 x,y,z 的对易关系，（5 分）

2) 求出 $\hat{L}_x,\hat{L}_y\ \hat{L}_z$ 与 $\hat{p}_x,\hat{p}_y,\hat{p}_z$ 的对易关系。（5 分）

3) 证明：$\left[\hat{L}_i,x^2+y^2+z^2\right]=0,\quad \left[\hat{L}_i,\hat{p}_x^2+\hat{p}_y^2+\hat{p}_z^2\right]=0,\quad (i=x,y,z)$。（10 分）。

三、 设在 $\hat{H}_0$ 表象中，哈密顿算符的矩阵表示为 $\hat{H}=\begin{pmatrix}E_1^{(0)} & c \\ c^* & E_2^{(0)}\end{pmatrix}$， c 为常数。

1) 用微扰论求能量至二级修正。（10 分）

2) 严格求解，与微扰论计算值比较。（10 分）。

四、 $\vec{\sigma}=(\sigma_x,\sigma_y,\sigma_z)$ 为三个泡利矩阵， $\vec{n}=(n_x,n_y,n_z)=(\sin\theta,0,\cos\theta)$ 为方向单位矢量。

1) 在 σ_z 表象中，求 $\vec{\sigma}\cdot\vec{n}$ 的本征值和本征态。（10 分）。

2) 给出在 $\sigma_z=1$ 的自旋本征态中 $\vec{\sigma}\cdot\vec{n}$ 的可能值及相应的几率。（5 分）

五、 设一维谐振子在 $t=0$ 时处于基态。此时加入一个与时间有关的微扰 $\hat{H}'=-f_0e^{-t/\tau}x$，其中 f_0， τ 为正常数。应用一级微扰论计算当 $t\to\infty$ 时，该振子处于激发态的几率。（有用的公式：坐标算符在谐振子能量本征态 $\psi_n(x)$ 间的矩阵元

$$x_{mn}=\sqrt{\frac{\hbar}{2\mu\omega}}\left(\sqrt{n+1}\delta_{m,n+1}+\sqrt{n}\delta_{m,n-1}\right)$$）（15 分）