中国科学院－中国科技大学
1996 年招收攻读硕士学位研究生入学试卷

试题名称：　　　　　　　量子力学（理论型）

说明：共六道大题，选作五题，每题 20 分。

一、粒子作一维运动，$\hat{H}=\dfrac{\hat{p}^2}{2\mu}+V(x)$，定态波函数为$|\varphi_n\rangle$，即$\hat{H}|\varphi_n\rangle=E_n|\varphi_n\rangle$。

(1) 证明：$\langle\varphi_n|\hat{p}|\varphi_{n'}\rangle=a_{nn'}\langle\varphi_n|x|\varphi_{n'}\rangle$，并求系数$a_{nn'}$。

(2) 由此推导求和公式：$\sum\limits_n(E_n-E_m)^2|\langle\varphi_n|x|\varphi_m\rangle|^2=\dfrac{\hbar^2}{\mu^2}|\langle\varphi_n|\hat{p}^2|\varphi_n\rangle|^2$。

(3) 证明：$\sum\limits_n(E_n-E_m)|\langle\varphi_n|x|\varphi_m\rangle|^2=\dfrac{\hbar^2}{2\mu}$。

二、一个质量为μ的非相对论粒子在位势$V(x)=-\alpha\delta(x)$　$\alpha>0$之下作一维束缚运动，试求坐标$a>0$，使得粒子在区域$|x|>a$的几率为$1/2$。

三、在均匀磁场内有一个电子（不考虑轨道运动）磁场$\vec{B}$指向正x方向，磁作用势为$\hat{H}=\dfrac{eB}{\mu c}\hat{S}_x=\dfrac{eB\hbar}{2\mu c}\sigma_x$，$\sigma_x$是泡利矩阵。设$t=0$时，电子的自旋向上，即$\hat{S}_z=\dfrac{\hbar}{2}$，求$t>0$时$\hat{\vec{S}}$的平均值。

四、有一个两能级体系，哈密顿量为$\hat{H}=\hat{H}_0+\hat{H}'$。在$\hat{H}_0$表象，$\hat{H}_0$和$\hat{H}'$表示为

$$\hat{H}_0=\begin{pmatrix}E_1 & 0\\ 0 & E_2\end{pmatrix},\quad \hat{H}'=b\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$$

$\hat{H}'$微扰，$E_1\geq E_2$，b表征微扰强度。试求$\hat{H}$的本征值和本征态。（1995 年（实验型）第 6 题）

五、一个量子体系处于角动量平方$\hat{\vec{L}}^2$与角动量在z轴方向投影$\hat{L}_z$共同本征态。总角动量的平方平均值为$2\hbar^2$。已知测量角动量在y轴方向投影$\hat{L}_y$得值为0的几率为$1/2$，求测量$\hat{L}_y$得值为$\hbar$的几率。

六、两个质量都是μ的一维耦合谐振子系统的哈密顿算符为

$$\hat{H}=\frac{1}{2\mu}\left(\hat{p}_1^2+\hat{p}_2^2\right)+\frac{1}{2}\mu\omega^2\left[(x_1-a)^2+(x_2+a)^2+(x_1-x_2)^2\right]$$

λ，a为参数，$\lambda>-1/2$，$-\infty<x_1,x_2<\infty$。试求系统的能量本征值。

中国科学院—中国科技大学
1996 年招收攻读硕士学位研究生入学试卷

试题名称：　　　　　　　量子力学（实验型）

说明：共六道大题，选作五题，每题 20 分。

一、　试设计一个实验来证实“单个电子作为整体是不可分割的”。

二、　在 p 表象中，归一化波函数为

$$\psi(x)=\frac{A}{p^2+\hbar^2k^2},\quad A=\left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2}(\hbar k)^{3/2},\quad k=mV_0/\hbar^2\text{。}$$

试计算 Δx，Δp，验证测不准关系。

三、　质量为 m 的粒子在势场 $V(x)$ 中作一维运动，试建立动量表象中能量的本征方程。

四、　一个质量为 m 的粒子被限制在 r＝a 和 r＝b 的两个不可穿透的同心球面之间运动。不存在其它势，求粒子的基态能量和归一化波函数。（2007 年第五题）

五、　有一个定域电子（不计及轨道运动）受到均匀磁场作用，磁场 B 指向正 x 方向，磁作用势为 $\hat{H}=\frac{eB}{\mu c}\hat{S}_x=\frac{eB\hbar}{2\mu c}\sigma_x$。设 $t=0$ 时，电子的自旋向上，即 $S_z=\frac{\hbar}{2}$，求 $t>0$ 时 $\vec{S}$ 的平均值。

六、　一维谐振子，其能量算符 $\hat{H}_0=-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}+\frac{1}{2}m\omega^2x^2$，设此谐振子受到微扰 $\hat{H}'=\frac{\lambda}{2}m\omega^2x^2$ 的作用（$|\lambda|\ll 1$），试求各能级的微扰修正（三级近似），并和精确解比较。(1997 年(实验型 II)第三题)