力的积累效应

- 时间积累—动量定理
- 空间积累—动能定理

动量定理

theorem of momentum

- 牛顿第二定律的微分形式

$$\boxed{\vec{F} = m\vec{a} = m d\vec{v} / dt}$$

$$\boxed{\vec{F} = d\vec{p} / dt}$$

瞬时性

容易：加速度
不容易：速度（一般需要积分）

？有无便于求速度的积分形式？

一 冲量 质点的动量定理

- 动量 $\boxed{\vec{p} = m\vec{v}}$

$$\vec{F} = \frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}(m\vec{v})}{\mathrm{d}t} \qquad \vec{F}\mathrm{d}t = \mathrm{d}\vec{p} = \mathrm{d}\,(m\vec{v})$$

$$\int_{t_1}^{t_2} \vec{F}\mathrm{d}t = \vec{p}_2 - \vec{p}_1 = m\vec{v}_2 - m\vec{v}_1$$

- 冲量 力对时间的积分（矢量） $\vec{I} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}\mathrm{d}t$

$$\int_{t_1}^{t_2} \vec{F}\mathrm{d}t = \vec{p}_2 - \vec{p}_1 = m\vec{v}_2 - m\vec{v}_1$$

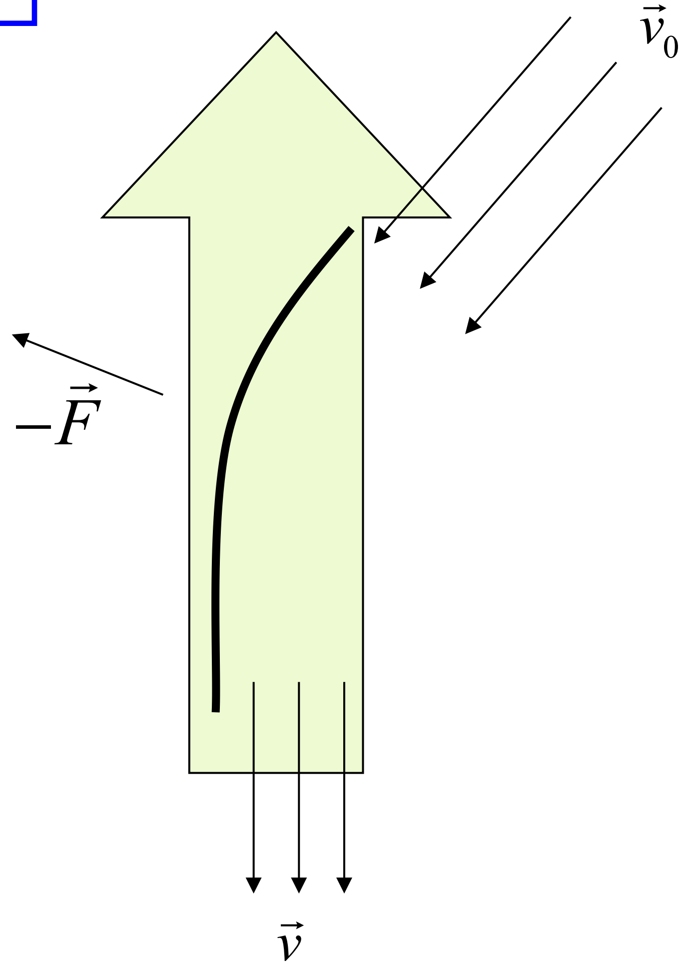
动量定理 在给定的时间内，外力作用在质点上的冲量，等于质点在此时间内动量的增量 .

◆ 分量形式

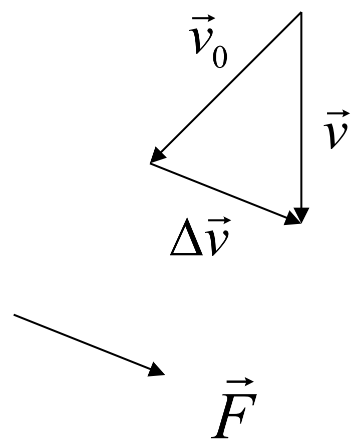
$$\vec{I} = I_x \vec{i} + I_y \vec{j} + I_z \vec{k}$$

$$\begin{cases} I_x = \int_{t_1}^{t_2} F_x \mathrm{d}t = mv_{2x} - mv_{1x} \\ I_y = \int_{t_1}^{t_2} F_y \mathrm{d}t = mv_{2y} - mv_{1y} \\ I_z = \int_{t_1}^{t_2} F_z \mathrm{d}t = mv_{2z} - mv_{1z} \end{cases}$$

逆风行舟



矢量作图



单位：

冲量：N · s

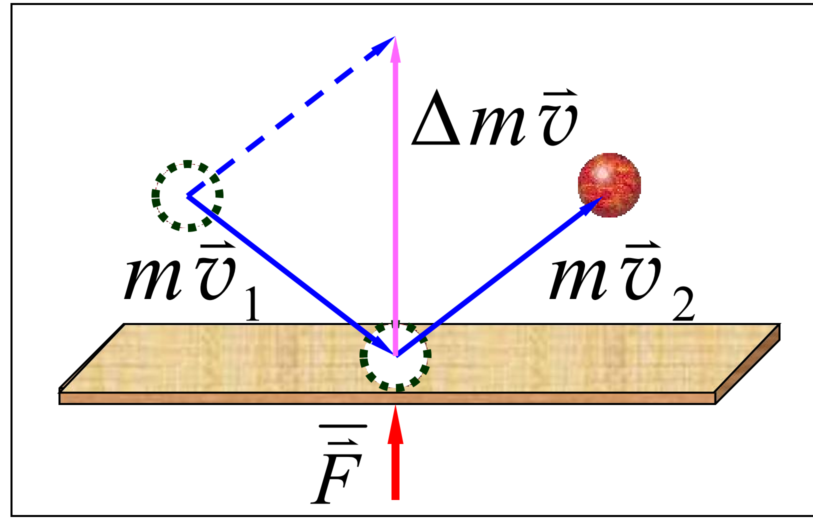
动量：kg · m/s

$1N=1kg \cdot m/s^2$

冲量主要应用在碰撞或冲击问题上

平均冲力

$$\overline{\vec{F}}=\frac{\int_{t_1}^{t_2}\vec{F}\mathrm{d}t}{t_2-t_1}=\frac{m\vec{v}_2-m\vec{v}_1}{t_2-t_1}$$

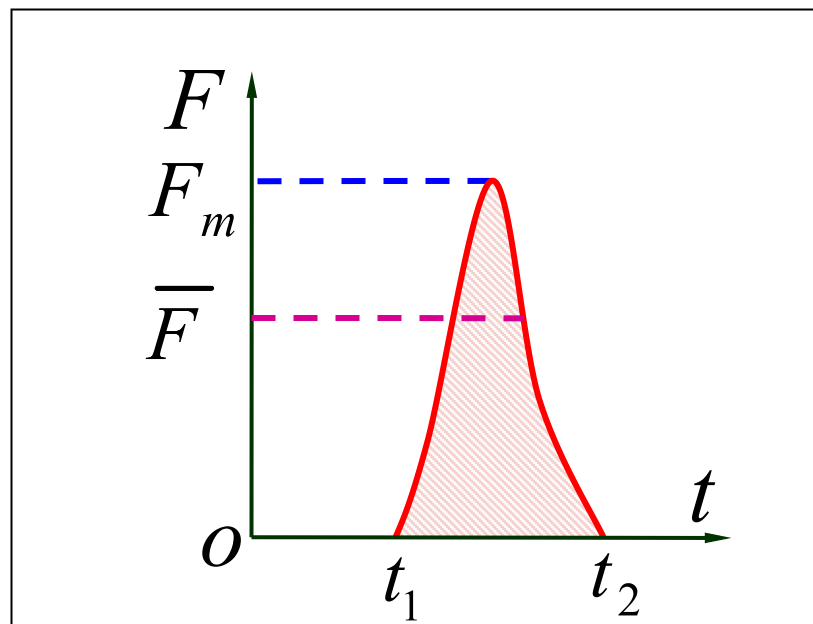


注意

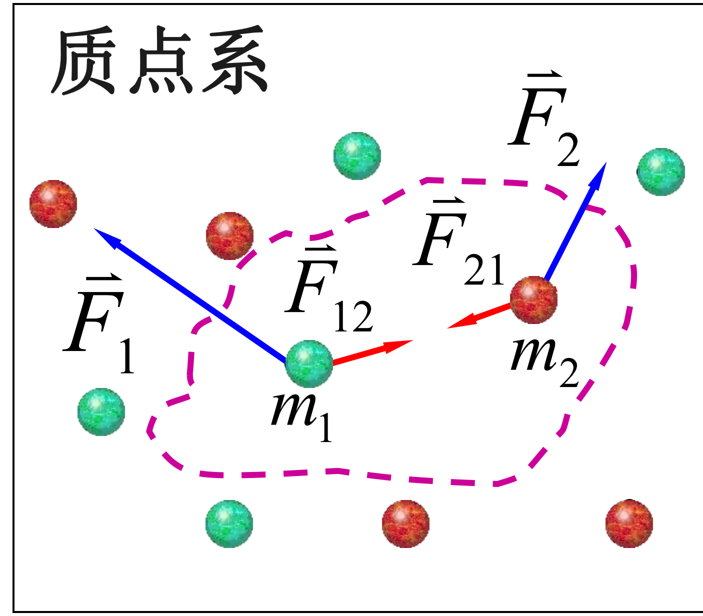
在 $\Delta\vec{p}$ 一定时

Δt 越小，则 $\overline{F}$ 越大．

例如人从高处跳下、飞机与鸟相撞、打桩等碰撞事件中，作用时间很短，冲力很大．



质点系的动量定理



$$\int_{t_1}^{t_2}(\vec{F}_1+\vec{F}_{12})\mathrm{d}t = m_1\vec{v}_1 - m_1\vec{v}_{10}$$

$$\int_{t_1}^{t_2}(\vec{F}_2+\vec{F}_{21})\mathrm{d}t = m_2\vec{v}_2 - m_2\vec{v}_{20}$$

因为内力 $\vec{F}_{12}+\vec{F}_{21}=0$，故

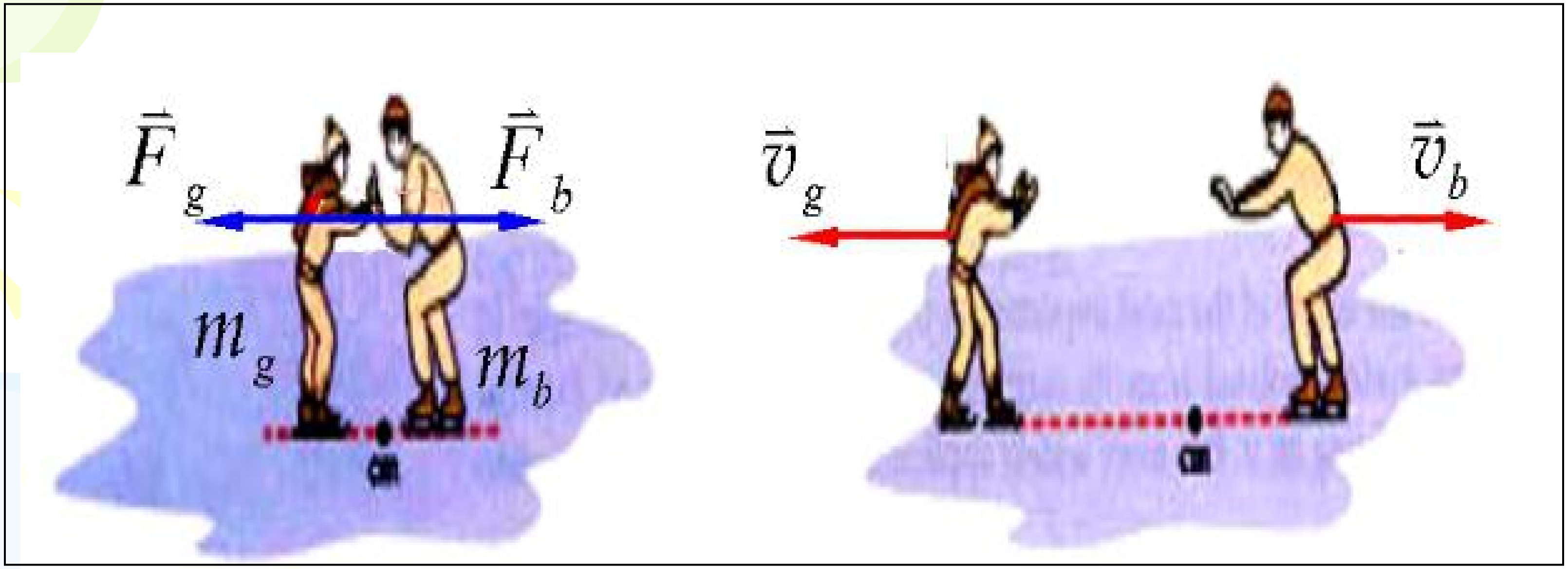
$$\int_{t_1}^{t_2}(\vec{F}_1+\vec{F}_2)\mathrm{d}t = (m_1\vec{v}_1+m_2\vec{v}_2)-(m_1\vec{v}_{10}+m_2\vec{v}_{20})$$

注意　内力不改变质点系的动量

质点系动量定理 作用于系统的合外力的冲量等于系统动量的增量.

$$\int_{t_1}^{t_2}\vec{F}^{\,\mathrm{ex}}\mathrm{d}t=\sum_{i=1}^{n}m_i\vec{v}_i-\sum_{i=1}^{n}m_i\vec{v}_{i0}$$

$$\vec{I}=\vec{p}-\vec{p}_0$$



初始速度 $v_{g0}=v_{b0}=0$ $m_b=2m_g$ 则 $\vec{p}_0=0$

推开后速度 $v_g=2v_b$ 且方向相反 则 $\vec{p}=0$

推开前后系统动量不变 $\vec{p}=\vec{p}_0$

变质量体的力学

火箭初始质量m_0，设在外太空受合力为0，燃料对火箭的相对速度大小 C 不变，求当火箭质量为m时的速度？

设在很短一段时间dt内喷出的燃料质量为dm。
质量为m的火箭速度由v变为v＋dv，
质量为dm的燃料速度由v变为v－C，则

$$m(v+dv-v)+dm(v-C-v)=F=0$$

$$mdv-dmC=0$$

$$dv=C\frac{dm}{m} \qquad \int_0^v dv=C\int_{m_0}^m \frac{dm}{m}$$

$$\int_0^v dv = C\int_{m_0}^{m}\frac{dm}{m} \qquad v = -C\ln\frac{m_0}{m}$$

讨论: 怎样提高火箭速度?

1 相对速度C需要小于0，即燃料的绝对速度与火箭方向相反；(燃烧获得的C的大小约5000m/s)

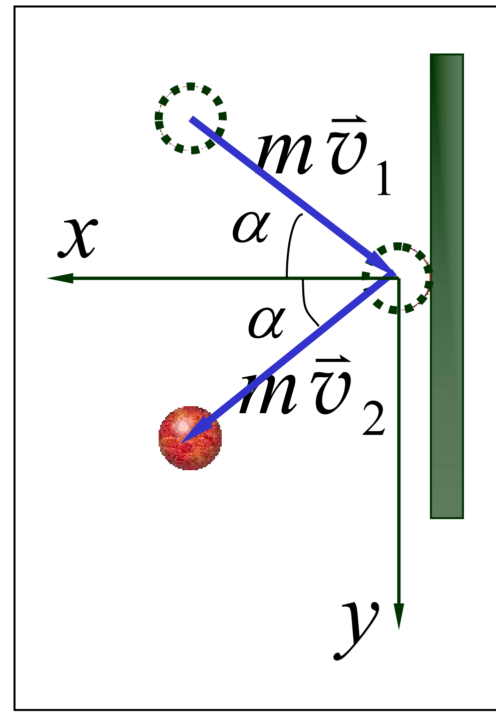
2, 光子火箭，离子火箭的设想；

3 初始质量中燃料质量与有效载荷的比例。

多级火箭的出现

例 1 一质量为0.05kg、速率为$10\mathrm{m\cdot s^{-1}}$的刚球,以与钢板法线呈45°角的方向撞击在钢板上,并以相同的速率和角度弹回来.设碰撞时间为0.05s.求在此时间内钢板所受到的平均冲力 $\overline{F}$.（忽略重力）

解 建立如图坐标系, 由动量定理得



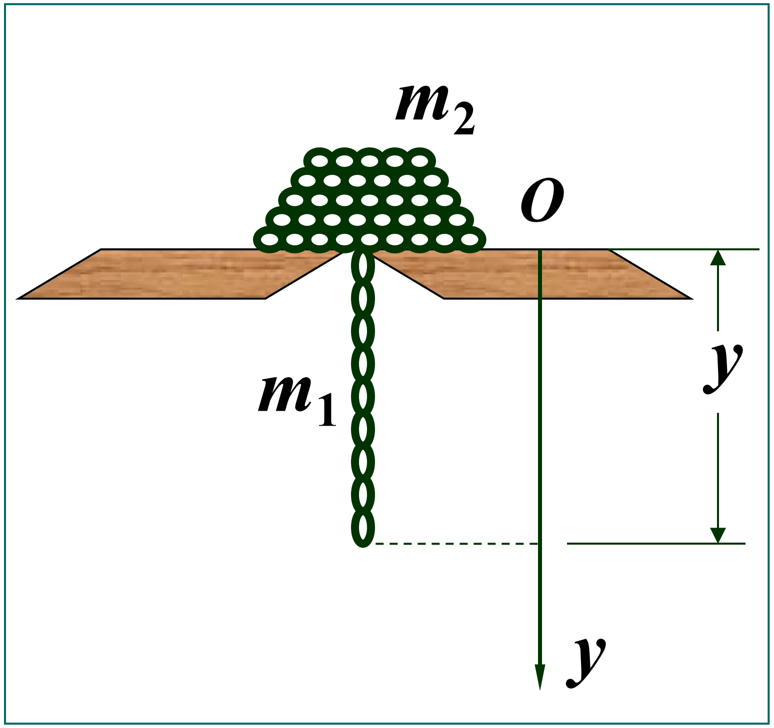
$$\overline{F}_x \Delta t = m v_{2x} - m v_{1x}$$
$$= m v \cos\alpha - (-m v \cos\alpha)$$
$$= 2 m v \cos\alpha$$

$$\overline{F}_y \Delta t = m v_{2y} - m v_{1y}$$
$$= m v \sin\alpha - m v \sin\alpha = 0$$

$$\overline{F} = \overline{F}_x = \frac{2 m v \cos\alpha}{\Delta t} = 14.1\,\mathrm{N}$$ 方向沿 x 轴反向

例 2 一柔软链条长为l,单位长度的质量为λ.链条放在桌上,桌上有一小孔,链条一端由小孔稍伸下,其余部分堆在小孔周围.由于某种扰动,链条因自身重量开始落下．求链条下落速度与落下距离之间的关系．设链与各处的摩擦均略去不计,且认为链条软得可以自由伸开．

解 以竖直悬挂的链条和桌面上的链条为一系统,建立如图坐标



则 $F^{\text{ex}}=m_1 g=\lambda y g$

由质点系动量定理得

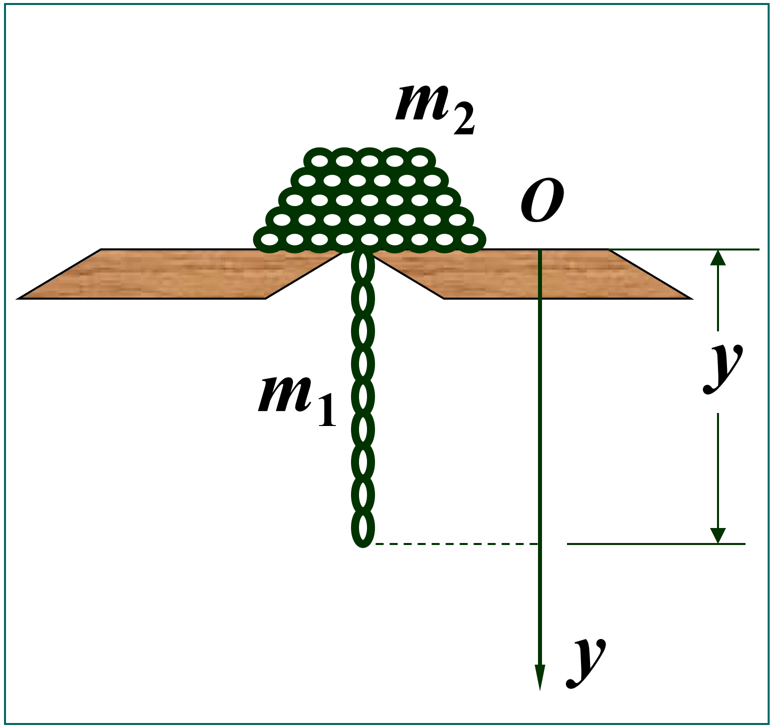
$$F^{\text{ex}}\mathrm{d}t=\mathrm{d}p$$

$$F^{\mathrm{ex}}\mathrm{d}t=\mathrm{d}p$$

又 $\mathrm{d}p=dm_1 v=\lambda\,\mathrm{d}(yv)$

$\therefore\quad \lambda yg\,\mathrm{d}t=\lambda\,\mathrm{d}(yv)$

则 $\quad yg=\dfrac{\mathrm{d}(yv)}{\mathrm{d}t}$ 凑项



两边同乘以 $y\mathrm{d}y$ 则

$$y^2 g\,\mathrm{d}y=y\mathrm{d}y\frac{\mathrm{d}(yv)}{\mathrm{d}t}=yv\,\mathrm{d}(yv)$$

$$g\int_0^y y^2\,\mathrm{d}y=\int_0^{yv} yv\,\mathrm{d}(yv)$$

$$\frac{1}{3}gy^3=\frac{1}{2}(yv)^2$$

$$v=\left(\frac{2}{3}gy\right)^{1/2}$$

动能定理

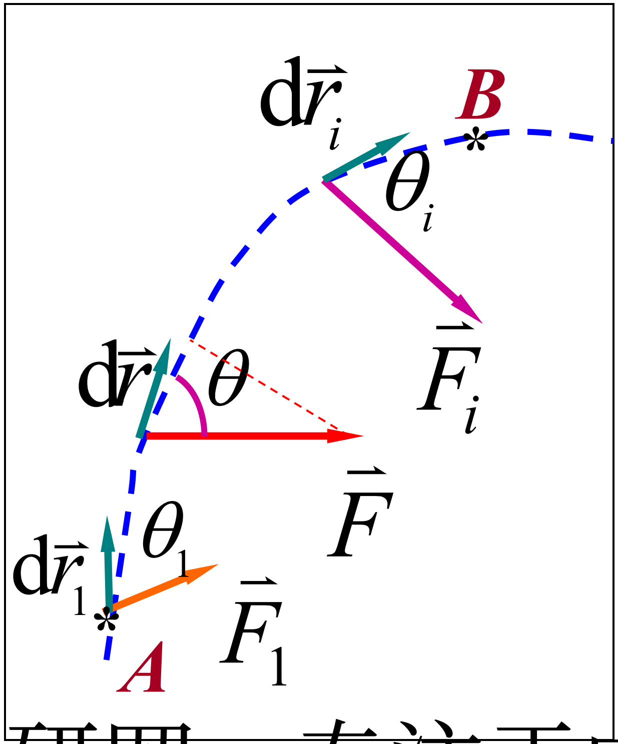
theorem of kinetic energy

力的空间累积效应：$\vec{F}$ 对 $\vec{r}$ 积累 ⟶ W，动能定理.

一　功

力对质点所作的功为力在质点位移方向的分量与位移大小的乘积．（功是标量，过程量）

$$\mathrm{d}W = F\cos\theta\left|\mathrm{d}\vec{r}\right| = F\cos\theta\mathrm{d}s$$



$$\mathrm{d}W = \vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{r}$$

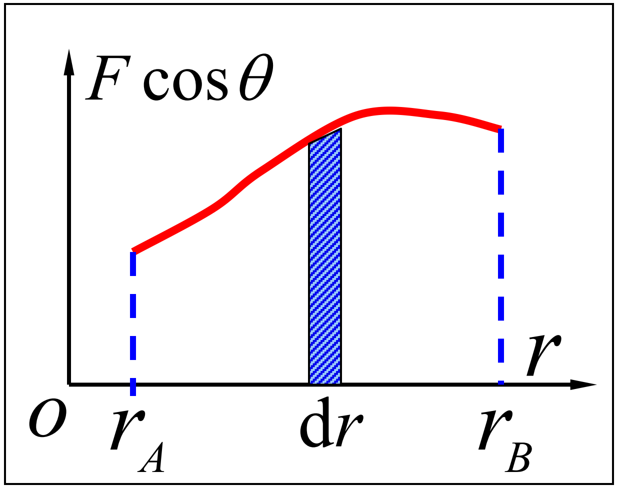
$$0^\circ < \theta < 90^\circ,\quad \mathrm{d}W > 0$$

$$90^\circ < \theta < 180^\circ,\quad \mathrm{d}W < 0$$

$$\theta = 90^\circ\quad \vec{F}\perp\mathrm{d}\vec{r}\quad \mathrm{d}W = 0$$

- 变力的功 $\mathrm{d}W = \vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{r}$

$$\boxed{W = \int_A^B \vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{r} = \int_A^B F\cos\theta\,\mathrm{d}r}$$



- 合力的功 **=** 分力的功的代数和

$$W = \int\sum\vec{F}_i\cdot\mathrm{d}\vec{r} = \sum\int\vec{F}_i\cdot\mathrm{d}\vec{r} = \sum_i W_i$$

$$\begin{cases}\vec{F} = F_x\vec{i} + F_y\vec{j} + F_z\vec{k}\\ \mathrm{d}\vec{r} = \mathrm{d}x\vec{i} + \mathrm{d}y\vec{j} + \mathrm{d}z\vec{k}\end{cases}$$

$$W = \int F_x\mathrm{d}x + \int F_y\mathrm{d}y + \int F_z\mathrm{d}z$$

$$W = W_x + W_y + W_z$$

- 功的大小与参照系有关

- 功的单位 $1\mathrm{J}=1\mathrm{N}\cdot\mathrm{m}$

- 功率：单位时间内做的功，即做功的效率。

- 平均功率 $\overline{P} = \dfrac{\Delta W}{\Delta t}$

- 瞬时功率 $P = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta W}{\Delta t} = \dfrac{\mathrm{d} W}{\mathrm{d} t} = \vec{F} \cdot \vec{v}$

$$P = F v \cos\theta$$

- 功率的单位（瓦特）$1\,\mathrm{W} = 1\,\mathrm{J} \cdot \mathrm{s}^{-1}$ $\quad 1\,\mathrm{kW} = 10^{3}\,\mathrm{W}$

例 1 一质量为 m 的小球竖直落入水中， 刚接触水面时其速率为v_0. 设此球在水中所受的浮力与重力相等, 水的阻力为 $F_{\mathrm{r}} = -bv$, b 为一常量. 求阻力对球作的功与时间的函数关系 .

解 如图建立坐标轴

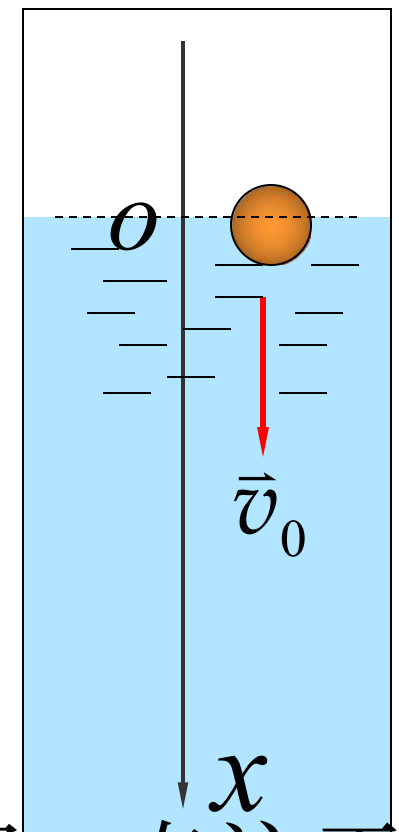
$$W=\int \vec{F}\cdot \mathrm{d}\vec{r}=\int -bv\,\mathrm{d}x=-\int bv\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t$$

即
$$W=-b\int v^2\,\mathrm{d}t$$

又由 2 - 5 节例 5 知
$$v=v_0\,\mathrm{e}^{-\frac{b}{m}t}$$

$$\therefore W=-bv_0^2\int_0^t \mathrm{e}^{-\frac{2b}{m}t}\mathrm{d}t$$

$$W=\frac{1}{2}mv_0^2(\mathrm{e}^{-\frac{2b}{m}t}-1)$$



二 质点的动能定理

$$W=\int \vec{F}\cdot \mathrm{d}\vec{r}=\int F_{\mathrm{t}}\left|\mathrm{d}\vec{r}\right|=\int F_{\mathrm{t}}\mathrm{d}s \qquad F_{\mathrm{t}}=m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$$

$$W=\int_{v_1}^{v_2} m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}s=\int_{v_1}^{v_2} mv\mathrm{d}v=\frac{1}{2}mv_2^2-\frac{1}{2}mv_1^2$$

- 动能（状态函数）

$$\boxed{E_{\mathrm{k}}=\frac{1}{2}mv^2=\frac{p^2}{2m}}$$

◆ 动能定理

合外力对质点所作的功，等于质点动能的增量 .

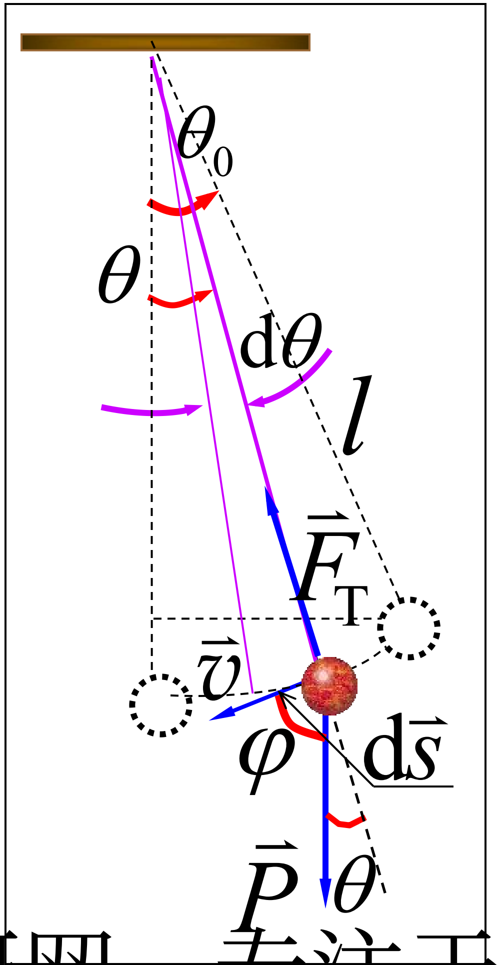
$$W = E_{\mathrm{k2}} - E_{\mathrm{k1}}$$

注意

功和动能都与 参考系有关；动能定理仅适用于惯性系 .

只有力在运动方向的分量才能改变物体的动能

例 2 一质量为1.0kg 的小球系在长为1.0m 细绳下端，绳的上端固定在天花板上．起初把绳子放在与竖直线成 30° 角处，然后放手使小球沿圆弧下落．试求绳与竖直线成 10° 角时小球的速率．



解

$$\mathrm{d}W=\vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{s}=\vec{F}_\mathrm{T}\cdot\mathrm{d}\vec{s}+\vec{P}\cdot\mathrm{d}\vec{s}$$

$$=\vec{P}\cdot\mathrm{d}\vec{s}=-mgl\,\mathrm{d}\theta\cos\varphi$$

$$=-mgl\sin\theta\,\mathrm{d}\theta$$

$$W=-mgl\int_{\theta_0}^{\theta}\sin\theta\,\mathrm{d}\theta$$

$$=mgl(\cos\theta-\cos\theta_0)$$

$$m = 1.0\text{kg} \qquad l = 1.0\text{m}$$

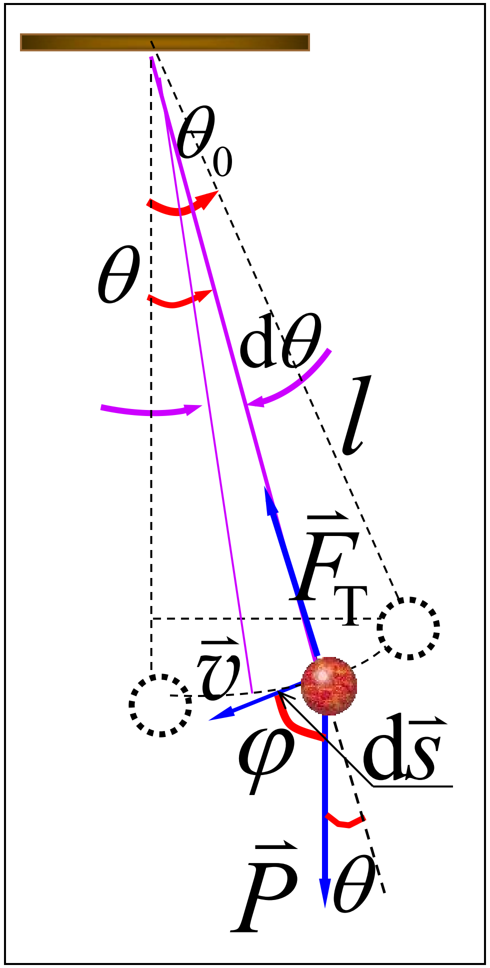
$$\theta_0 = 30^\circ \qquad \theta = 10^\circ$$

$$W = mgl(\cos\theta - \cos\theta_0)$$

由动能定理 $W = \dfrac{1}{2}mv^2 - \dfrac{1}{2}mv_0^2$

得 $v = \sqrt{2gl(\cos\theta - \cos\theta_0)}$

$$= 1.53\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$$



非惯性系与惯性力

non-inertial reference frame

（1）惯性系：牛顿运动定律成立的参考系.

研究地面上物体运动，地面通常可认为是惯性系，相对于地面作匀速直线运动的参考系也是惯性系.

（2）非惯性系：牛顿运动定律不成立的参考系.

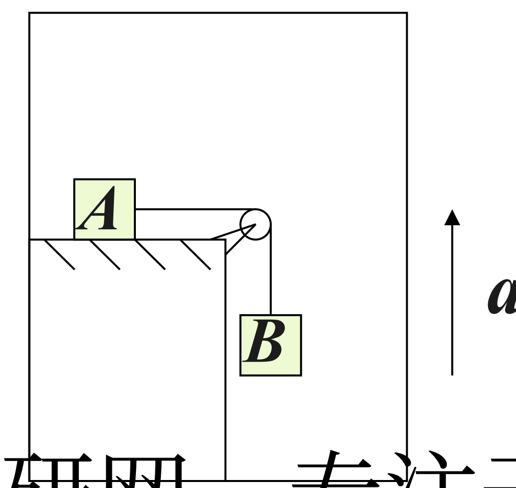
在加速度为 $\vec{a}$ 的非惯性系中引入一个力，使物体的受力满足牛顿运动定律，这个力就是惯性力。

1. 找不到相应的施力物体；

2. 大小为 $\vec{F}_{惯} = -m\vec{a}$

例题

系统处于$a = g/2$加速上升的电梯内，设A，B物体的质量同为m，A放在水平桌面上，绳子和定滑轮的质量不计，A与桌面的摩擦系数为μ，若物体A在桌面上加速运动，则绳子的张力为____________。



$$T = \frac{3}{4}(1+\mu)mg$$