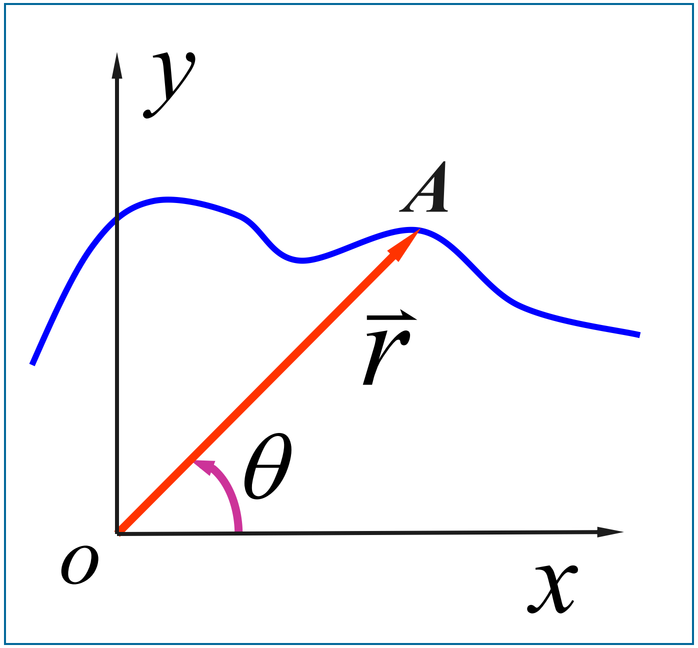
一 平面极坐标

设一质点在 Oxy 平面内运动，某时刻它位于点 A.矢径 $\vec{r}$ 与 x 轴之间的夹角为 θ. 于是质点在点 A 的位置可由 $A(r,\theta)$ 来确定 .



以 (r,θ) 为坐标的参考系为**平面极坐标系** .

它与直角坐标系之间的变换关系为

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$$

极坐标描述下的圆周运动(r(t)=r)

角坐标 $\theta(t)$，逆时针为正

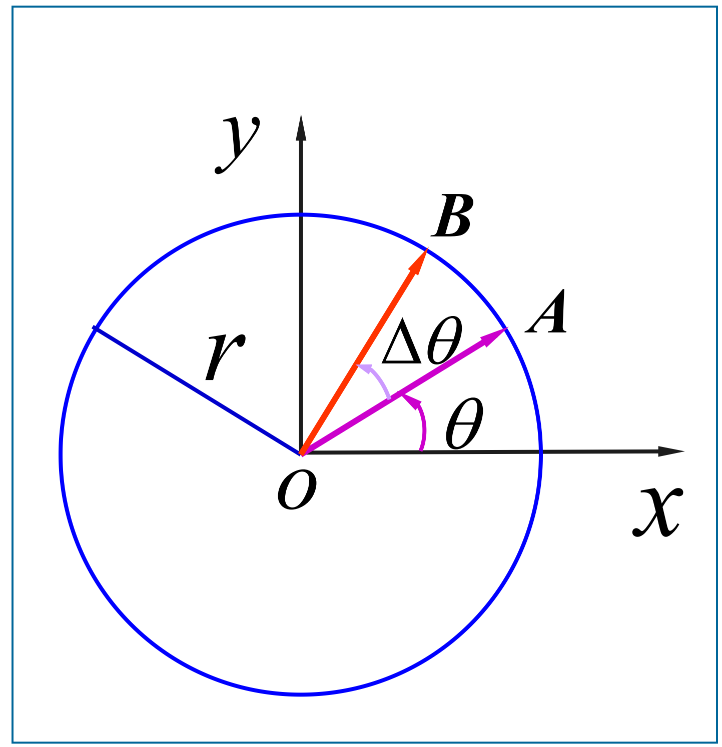
角速度 $\omega(t)=\dfrac{\mathrm{d}\theta(t)}{\mathrm{d}t}$

速 率

$$v=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta t}=r\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\theta}{\Delta t}$$

$$v=\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t},\ v(t)=r\omega(t)$$

角加速度 $\alpha=\dfrac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}$



二自然坐标系下的圆周运动

$$\boxed{\vec{a}=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\vec{e}_{\mathrm{t}}+v\,\omega\vec{e}_{\mathrm{n}}}$$

匀速 $\vec{v}=v\vec{e}_{\mathrm{t}}=r\omega\vec{e}_{\mathrm{t}}$

质点作变速率圆周运动时

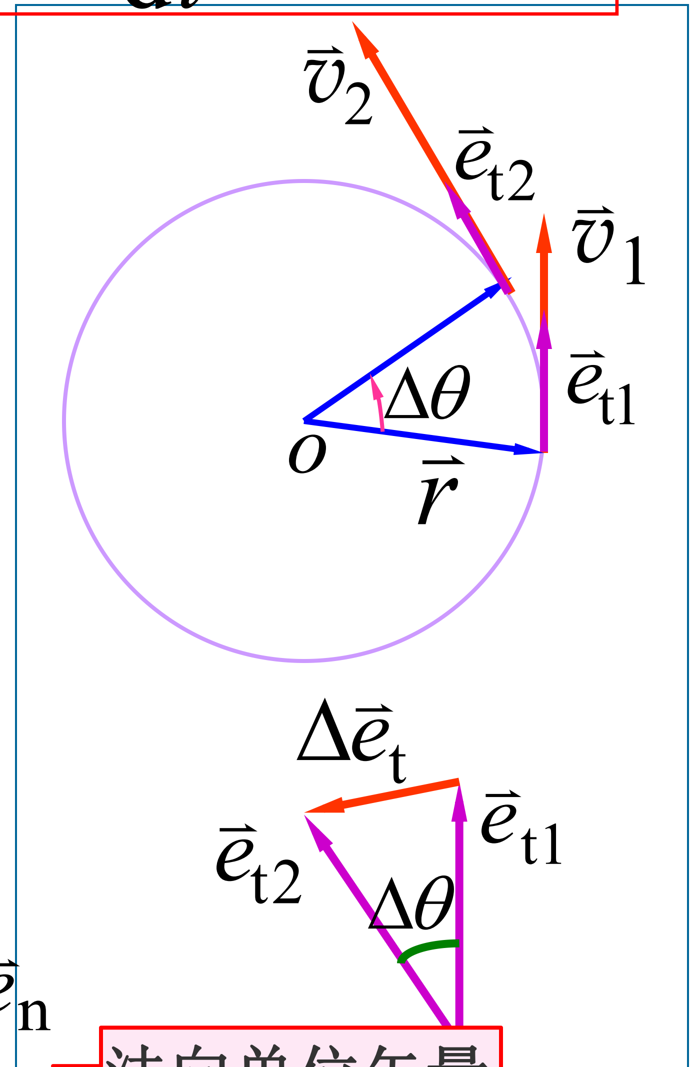
$$\vec{a}=\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\vec{e}_{\mathrm{t}}+v\frac{\mathrm{d}\vec{e}_{\mathrm{t}}}{\mathrm{d}t}$$

切向加速度

$$a_{\mathrm{t}}=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=r\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}=r\alpha$$

切向单位矢量的时间变化率

$$\frac{\mathrm{d}\vec{e}_{\mathrm{t}}}{\mathrm{d}t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{e}_{\mathrm{t}}}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\theta}{\Delta t}\vec{e}_{n}=\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\vec{e}_{\mathrm{n}}$$



法向单位矢量

$$\boxed{\vec{a}=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\vec{e}_{\mathrm{t}}+v\,\omega\vec{e}_{\mathrm{n}}}$$

切向加速度（速度大小变化引起）

$$a_{\mathrm{t}}=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=r\alpha$$

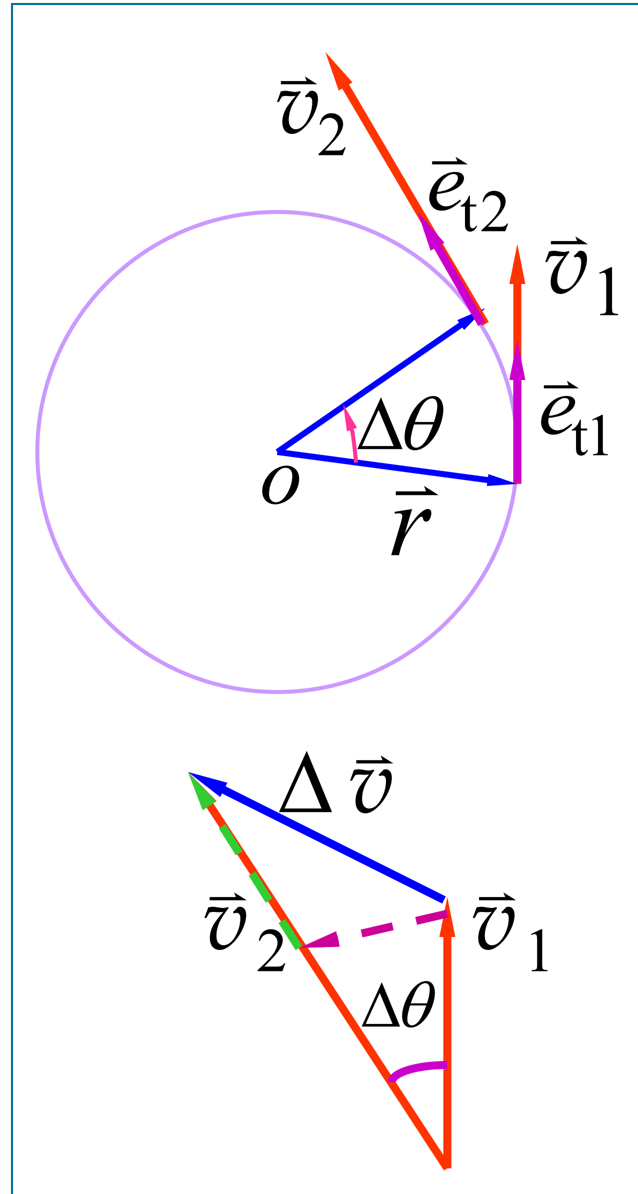
法向加速度（速度方向变化引起）

$$a_{\mathrm{n}}=v\omega=\omega^{2}r=\frac{v^{2}}{r}$$

圆周运动加速度

$$\vec{a}=a_{\mathrm{t}}\vec{e}_{\mathrm{t}}+a_{\mathrm{n}}\vec{e}_{\mathrm{n}}$$

$$a=\sqrt{a_{\mathrm{t}}^{2}+a_{\mathrm{n}}^{2}}$$



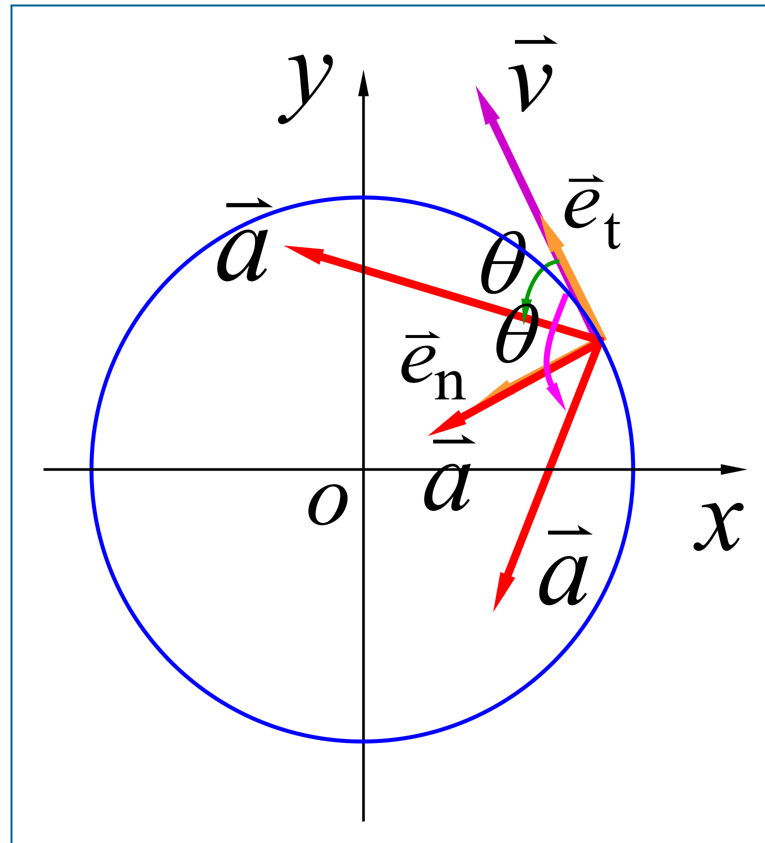
$$\vec{a}=a_{\mathrm{t}}\vec{e}_{\mathrm{t}}+a_{\mathrm{n}}\vec{e}_{\mathrm{n}} \qquad \theta=\tan^{-1}\frac{a_{\mathrm{n}}}{a_{\mathrm{t}}}$$

$$\because a_{\mathrm{n}}>0 \quad \therefore 0<\theta<\pi$$

切向加速度

$$a_{\mathrm{t}}=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=r\alpha$$

$$a_{\mathrm{t}}\begin{cases}>0,\ 0<\theta<\dfrac{\pi}{2},\ v\ \text{增大}\\ =0,\ \theta=\dfrac{\pi}{2},\ v\equiv\text{常量}\\ <0,\ \dfrac{\pi}{2}<\theta<\pi,\ v\ \text{减小}\end{cases}$$



$$
\begin{cases}
\Delta s = r\Delta\theta, \quad \text{弧长} \\
v = \dfrac{|d\vec{r}|}{dt} = \dfrac{ds}{dt} = r\dfrac{d\theta}{dt} = r\omega \\
a_t = \dfrac{dv}{dt} = r\dfrac{d\omega}{dt} = r\alpha \\
a_n = \dfrac{v^2}{r} = v\omega = r\omega^2
\end{cases}
$$

- 速度只有切向分量，没有法向分量；
- 加速度的方向是变化的；
- 加速度的法向分量永远指向圆心。

一般曲线运动（自然坐标）

“以直代曲”—求速度　　“以圆代曲”—求加速度

$$\vec{v}=\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\vec{e}_{\mathrm{t}}\qquad \vec{a}=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\vec{e}_{\mathrm{t}}+\frac{v^{2}}{\rho}\vec{e}_{\mathrm{n}}$$

其中 $\rho=\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}\theta}$ 曲率半径．

三 匀速率圆周运动和匀变速率圆周运动

1 匀速率圆周运动：速率 v 和角速度 ω 都为常量．

$$a_{\mathrm{t}}=0 \qquad \vec{a}=a_{\mathrm{n}}\vec{e}_{\mathrm{n}}=r\omega^{2}\vec{e}_{\mathrm{n}}$$

2 匀变速率圆周运动　　类似于匀变速率直线运动

$a_{\mathrm{t}}=$ 常量　　$\alpha=$ 常量

如 $t=0$ 时，$\theta=\theta_0, \omega=\omega_0$

$$\begin{cases}\omega=\omega_0+\alpha t\\ \theta=\theta_0+\omega_0 t+\dfrac{1}{2}\alpha t^2\\ \omega^2=\omega_0^2+2\alpha(\theta-\theta_0)\end{cases}$$

讨 论

对于作曲线运动的物体，以下几种说法中哪一种是正确的：

（**A**）切向加速度必不为零；

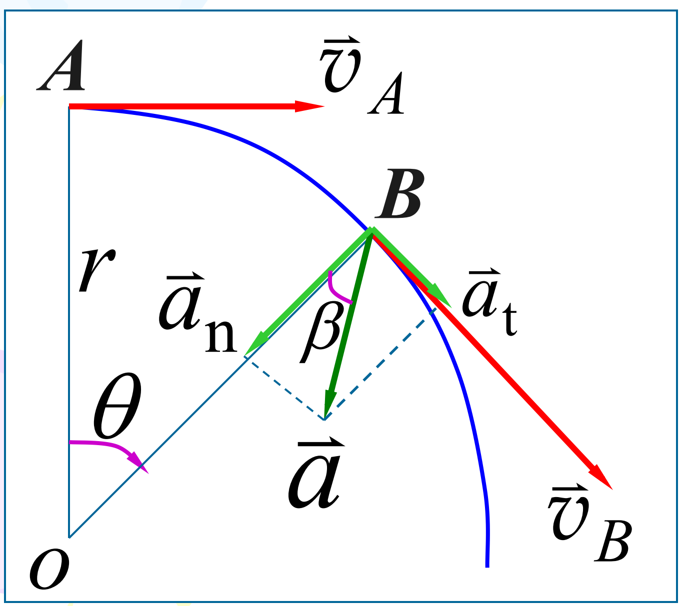
（**B**）法向加速度必不为零（拐点处除外）；

（**C**）由于速度沿切线方向，法向分速度必为零，因此法向加速度必为零；

（**D**）若物体作匀速率运动，其总加速度必为零；

（**E**）若物体的加速度 $\vec{a}$ 为恒矢量，它一定作匀变速率运动．

例 如图一超音速歼击机在高空 A 时的水平速率为 1940 km/h， 沿近似于圆弧的曲线俯冲到点 B ,其速率为 2192 km/h，所经历的时间为 3s，设圆弧 $\overset{\frown}{AB}$ 的半径约为 3.5km，且飞机从A 到B 的俯冲过程可视为匀变速率圆周运动，若不计重力加速度的影响，求：(1) 飞机在点B 的加速度；(2)飞机由点A 到点B 所经历的路程 .



解（1）因飞机作匀变速率运动所以 a_t 和 α 为常量 .

$$a_t = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$$

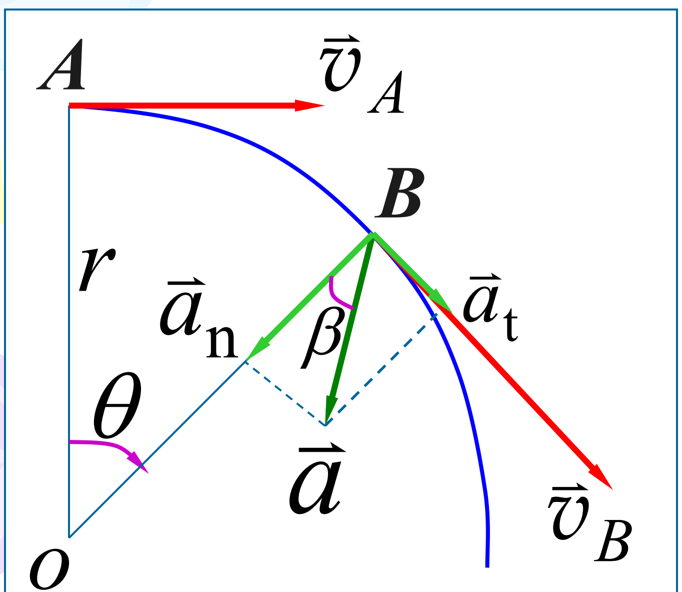
分离变量有 $\displaystyle\int_{v_A}^{v_B} \mathrm{d}v = \int_0^t a_t \mathrm{d}t$

已知：$v_A = 1940\,\mathrm{km \cdot h^{-1}}$　$v_B = 2192\,\mathrm{km \cdot h^{-1}}$

$t = 3\,\mathrm{s}$　$\overset{\frown}{AO} = 3.5\,\mathrm{km}$

$$\int_{v_A}^{v_B} \mathrm{d}v = \int_0^t a_t \mathrm{d}t \qquad a_t = \frac{v_B - v_A}{t} = 23.3\,\mathrm{m \cdot s^{-2}}$$

在点 B 的法向加速度　$a_n = \dfrac{v_B^2}{r} = 106\,\mathrm{m \cdot s^{-2}}$



在点 B 的加速度

$$a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2} = 109\,\mathrm{m \cdot s^{-2}}$$

$\vec{a}$ 与法向之间夹角 β 为

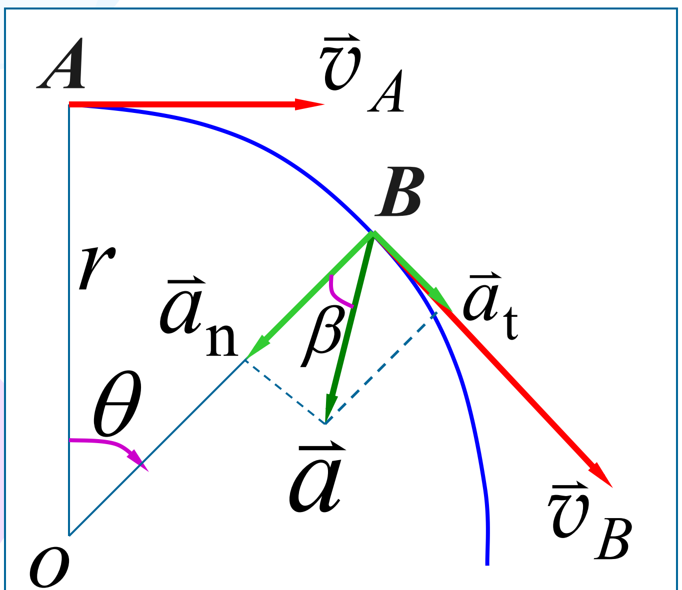
$$\beta = \arctan \frac{a_t}{a_n} = 12.4^\circ$$

已知：$v_A = 1940\mathrm{km\cdot h^{-1}}$　$v_B = 2192\mathrm{km\cdot h^{-1}}$

$t = 3\mathrm{s}$　　$\overset{\frown}{AO} = 3.5\mathrm{km}$

（2）在时间 t 内矢径 $\vec{r}$ 所转过的角度 θ 为

$$\theta = \omega_A t + \frac{1}{2}\alpha t^2$$



飞机经过的路程为

$$s = r\theta = v_A t + \frac{1}{2}a_t t^2$$

代入数据得

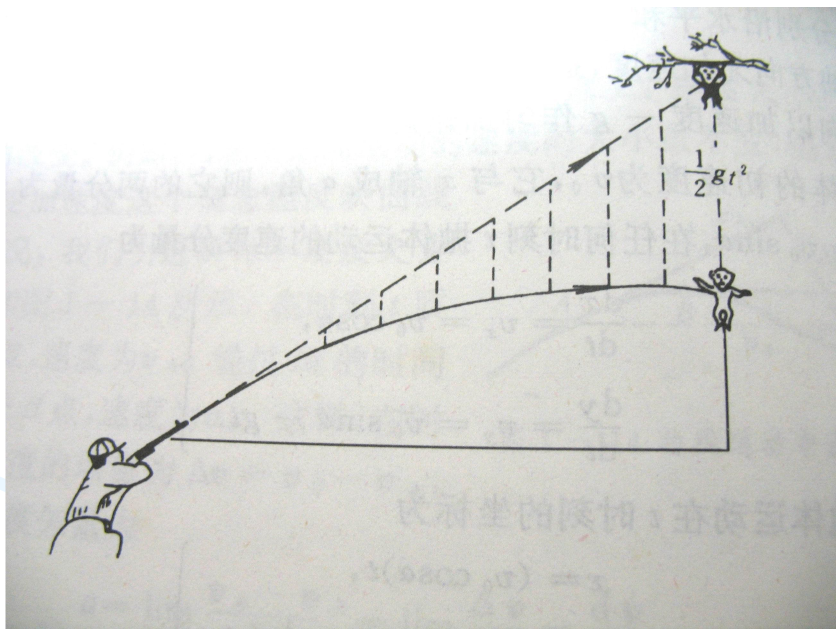
$$s = 1722\ \mathrm{m}$$

抛体运动

- 欧洲中世纪对抛体的描述

图 1 — 15 欧洲中世纪的抛体理论

- 忽略空气阻力的影响
  - 水平和垂直分量互相独立
- 猎人与猴子的老故事



猎人犯的错　　　猴子犯的错

最大射程和最大射高

初始条件

$$\begin{cases} x=(v_0\cos\alpha)t \\ y=(v_0\sin\alpha)t-\dfrac{1}{2}gt^2 \end{cases} \Rightarrow x=\frac{v_0^2\sin(2\alpha)}{g}$$

当角度 $\alpha=45^0$ 时x有最大值 $x_{\max}=v_0^2/g$ 最大射程

当角度 $\alpha=90^0$ 时

$$y=v_0t-\frac{1}{2}gt^2=-\frac{1}{2}g(t^2-\frac{2v_0}{g}t+\frac{v_0^2}{g^2})+\frac{1}{2}g\times\frac{v_0^2}{g^2}$$

$$\boxed{y_{\max}=v_0^2/(2g)}$$

最大射高

- 例 大马哈鱼总是逆流而上，游到乌苏里江去产卵，游程中有时要跃上瀑布。这种鱼跃出水面的速度可达32km/h。它最高可跃上多高的瀑布？和人的跳高记录相比如何？

鱼跃出水面的速度 $v_0 = 32km/h = 8.89m/s$ ，若竖直跃出水面，则跃出的高度为

$$h = v_0^2/(2g) = 4.03(m)$$

对比：人跳高的世界记录是2.45m（古巴，1993）。