（4）上述三种情况都不是，还要由其他因素决定。

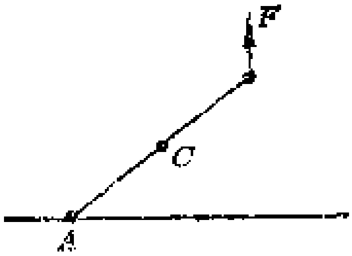


图 7-126

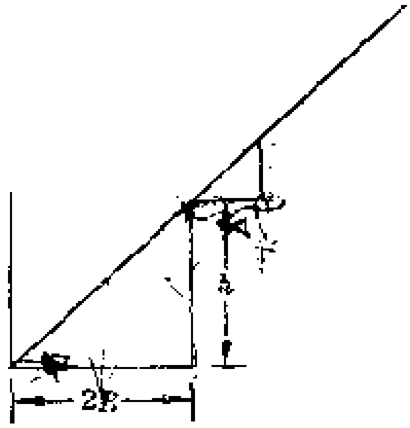


图 7-127

7-127 一长为 $2l$ 的均匀棒放在半径为 $R=5.0$ 厘米、高为 $h=10.0$ 厘米的杯中，如图 7-127。棒伸出杯口外，杯子固定不动。问在下述几种情况下，棒长不超过多长才不致滑出杯口？

（1）忽略一切摩擦；

（2）棒底与杯内壁之间的摩擦系数为 $\mu=0.20$，忽略其他地方的摩擦；

7-128 上题中，如果棒的质量为 $m=1.0$ 公斤，杯的质量为 $M=2.2$ 公斤，杯是轴对称形的，杯与地面间的摩擦力很大。问如果棒固定于杯内，棒长超过多长杯子就要翻倒？

7-129 一个均匀球壳，内半径为 R_1、外半径为 R_2，在倾角为 θ 的固定斜面上无滑动地滚下，试求：

（1）滚动的角加速度 α；

（2）设斜面高为 h，球壳从顶部由静止开始滚下而到达斜面底部时，球质心的速度 v。

7-130 一个均匀圆柱体从一倾角为 $10°$ 的固定斜面顶端由静止开始无滑动地滚下 10 厘米后，另一个均匀球体也从此斜面顶端由静止开始无滑动地滚下，如图 7-130 所示。问在离开斜面顶端多远处球心赶上圆柱的轴？

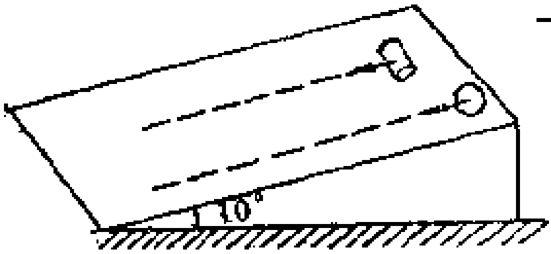


图 7-130

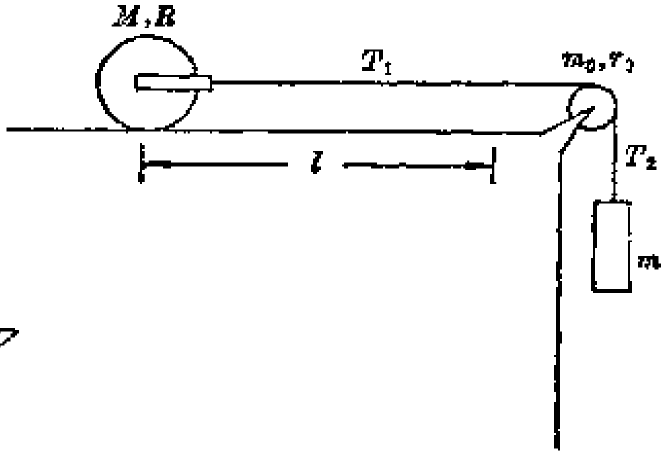


图 7-131

7-131 如图 7-131 所示，在水平的固定桌面上，有一个质量为$M=10$公斤、半径为$R=20$厘米的均匀圆柱体，绳子的一端系在这柱体的框架上，跨过一质量为$m_0=0.5$公斤、半径为$r_0=10$厘米的均匀盘状定滑轮后，另一端系一质量为$m=5.0$公斤的重物。m下落时，圆柱体沿桌面作纯滚动。设框架及绳子质量，各轴上的摩擦均可不计，绳子长度不变，试用下述方法求M从静止开始滚过距离$l=1.0$米时的滚动角速度：

(1) 用质心定律或转动定理计算；

(2) 用能量关系计算。

7-132 一个质量为$m_1=2.0$公斤的物体，放在固定的水平桌面上，物体与桌面之间的滑动摩擦系数为$\mu=0.25$。绳的一端系在这物体上，跨过质量为$m_0=250$克、半径为$r_0=5.0$厘米的均匀的圆盘状滑轮后，缠在一质量为$m_2=2.0$公斤、半径为$r=20$厘米

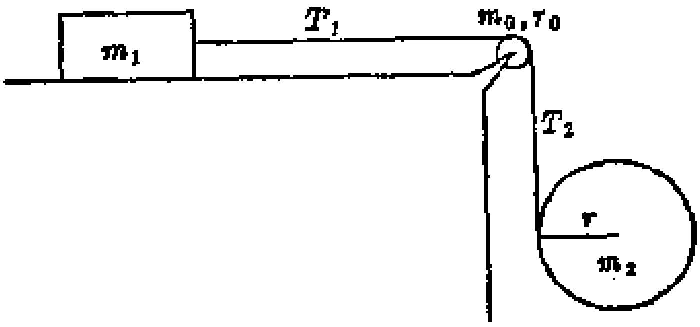


图 7-132

的均匀圆柱体上，如图 7-132 所示。当放手让圆柱体下落时，设绳子质量和轴间摩擦均可不计，绳子长度不变。求 m_1 的加速度 a_1。

7-133 一条长度不变、质量可略去不计的绳子，跨过均匀的圆盘状定滑轮 m_0 后，系在两个物体 m_1 和 m_2 上，m_1 和 m_2 分别放在一固定斜面的两边，这两边的倾角分别为 60° 和 45°，如图 7-133 所示。已知 $m_1=1.0$ 公斤，$m_2=1.5$ 公斤，滑轮半径为 $r_0=5.0$ 厘米，物体与斜面间的摩擦系数 $\mu=0.15$。略去轴上的摩擦，分析 m_1 和 m_2 的运动情况。

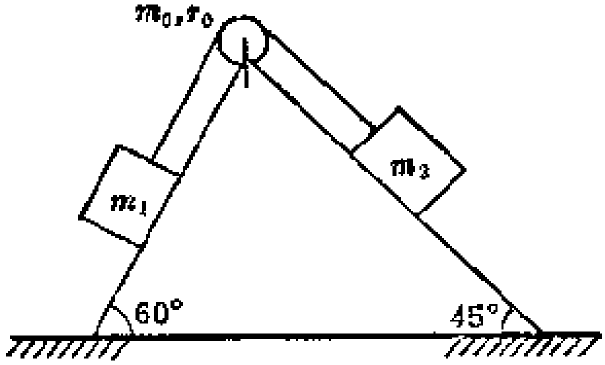


图 7-133

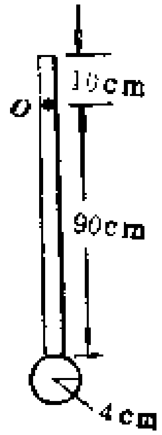


图 7-134

7-134 一根长 100 厘米、重 100 克的均匀细棒下端，焊有半径为 4.0 厘米、密度为 7.8 克/厘米³ 的钢球。在离棒上端 10 厘米处有一小孔，一水平光滑钢丝穿过这小孔把棒挂起，使棒在竖直面内作小角度摆动，如图 7-134 所示。求等值摆长。

7-135 一根均匀细棒的横截面为圆形，圆的半径 r 与距尖端的距离 x 成正比，即 $r=\beta x$，β 为比例系数。把这棒当作一个复摆，分别用两端 A 和 B 做悬点，使它绕水平轴作小角度摆动，如图 7-135(1)及(2)所示。设以尖端 A 为悬点时周期为 T_A；以另一端为悬点时周期为 T_B，求周期比 $\dfrac{T_A}{T_B}$（提示：细棒即 $r\ll$ 棒长，亦即 $\beta\ll1$）。

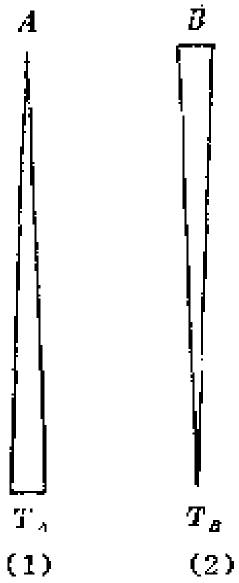


图 7-135

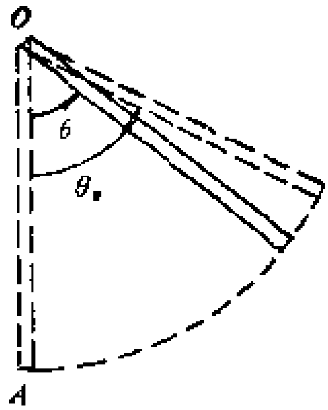


图 7-137

7-136 设地球是一均匀球体，密度为5.5吨/米^3，半径为6.4×10^3公里。试求：

(1) 绕自转轴的转动惯量；

(2) 自转的转动能量；

(3) 自转的角动量；

(4) 北京(北纬40°)随地球运动的切线速度。

7-137 如图7-137所示，一根均匀的细棒长100厘米，重1.0公斤，上端O悬在一光滑的水平轴上，因而可以在竖直面内转动。先用手扶住让它静止在距离竖位置转角为θ_0的位置上，然后放手让它摆下。当它摆到$\theta=60°$时，转动角速度为$\omega=3.0$弧度/秒，试求：

(1) 起始时的角度θ_0；

(2) 下落到竖直位置时质心的速度v_C；

(3) 下落到竖直位置时下端A的切向加速度a和法向加速度a_n；

(4) 下落到竖直位置时，杆作用在轴上的力F；

(5) 设以最低点的重力势能为零，问下落到何处时，

其重力势能与转动动能相等？

7-138 如图 7-138 所示，一质量为 m、长为 l 的均匀细棒放在光滑的水平面上，一竖直轴 O 通过棒的一端，棒可以绕这轴自由转动。当棒静止时，在另一端加上一个垂直于棒的水平力 $\boldsymbol{F}$，问这时轴作用在棒上的力为多少？方向如何？

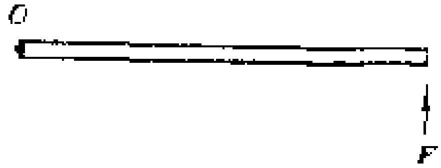


图 7-138

7-139 有一根均匀细棒在光滑水平面上静止不动，一端突然受到与棒身垂直的水平力的冲击。棒的另一端是(1)自由的，或(2)被一光滑的竖直轴拴住。证明两种情况下棒所获的动能之比为 4:3。

7-140 一根很轻的均匀细棒长为 $2l$，质量可以忽略，两端各拴着一个小球，质量分别为 m_1 和 m_2，且 $m_1>m_2$。棒中心 O 有一小孔，一水平的光滑钢丝穿过这小孔，使棒能在竖直面内转动，如图 7-140 所示。设棒在重力作用下由水平位置从静止开始转动，试求：

(1) 开始转动时 m_1 的加速度和棒作用在 O 轴上的力；

(2) 转过平衡位置时 m_1 的加速度和此时作用在 O 轴上的力。

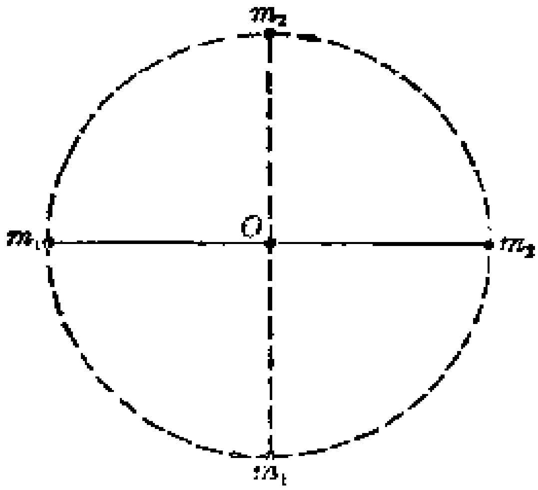


图 7-140

7-141 一长为 40 厘米、质量为 100 克的均匀细棒的中心固定一个质量为 100 克的质点，它们静止在光滑的水平面上。棒的一端突然受到与棒身垂直的水平力的冲击，当棒转过一周时，求棒中心的位移。

7-142 如图 7-142 所示，一根均匀的棒长为 l、质量为 m，放在光滑的水平面上。当在距中心 C 为 x 的 P 点施一垂直于棒的冲量 $J=\int F dt$ 时，试问：

（1）刚刚撞击以后质心的速度 v_C 为多大？棒绕通过质心的轴的角速度 ω_C 为多大？端点 A 的速度 v_A 为多大？

（2）欲使 $v_A=0$，P 点的位置应于何处？（这时 P 点称为打击中心。）

（3）如把棒的 A 端垂直挂起，冲击在何处才能使棒绕 A 转动而在支点无侧向的力？

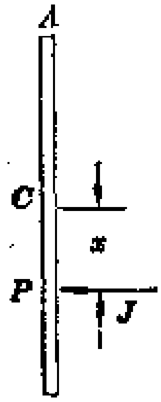


图 7-142

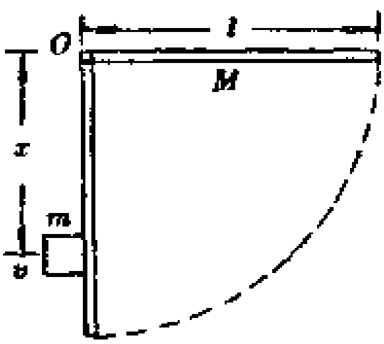


图 7-144

7-143 证明刚体转动惯量的平行轴定理：

$$I=I_C+md^2$$

其中 m 为刚体的总质量，I_C 为刚体对通过它的质心的轴 $O'O'$ 的转动惯量，I 为刚体对平行于轴 $O'O'$ 的轴 OO 的转动惯量，d 为这两个平行轴间的距离。

7-144 一根长为 l、质量为 M 的均匀细棒，可绕一端的水平光滑轴 O 自由转动。今棒从水平位置由静止开始放下，当它转到竖直位置时正好与另一边飞来的质量为 m 的小物体相碰，如图 7-144 所示。碰后两者正好都停下来，并知这时轴上不受侧向的力。试求：

（1）小物体 m 的速度；

（2）小物体 m 碰在棒上的位置 x；

（3）两者质量之比 $\frac{m}{M}$。

7-145 用手抓住长为 $2l$ 的均匀细棒 AB 的两端，使它在水平方向静止不动。先放开 B 端的手，让棒绕 A 端转动，略去棒与手之间及空气的摩擦，当棒转到竖直位置时，再放开 A 端的手让它自由运动下落，如图 7-145 所示。试问：

（1）在以后的下落过程中，质心的轨迹怎样？

（2）质心的加速度怎样？

（3）当棒从竖直位置落下高度 h 时，它绕质心转了几圈？

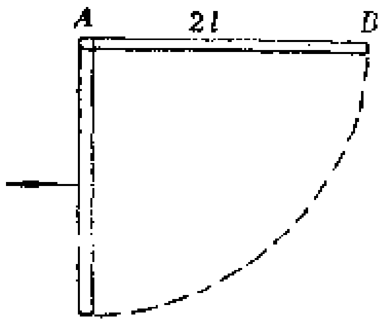


图 7-145

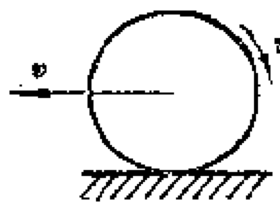


图 7-147

7-146 回答以下问题：

（1）为什么骑自行车在冰上行驶时，刹闸就容易摔倒？

（2）为什么骑自行车在路上快速前进时刹前闸则后轮有可能抬起，人和车向前滚翻？

7-147 将一个已按图 7-147 所示方向以角速度 ω 旋转、半径为 R 的圆盘切着地面向前扔出时，盘将有可能先是朝前，然后又向后滚，试说明这是什么道理？在什么情况下会发生这种现象？

7-148 一根长为 l、质量为 m 的均匀细杆，可以绕通过它一

端的水平轴 O 无摩擦地转动。当它静止地吊着时，由于受到外力的冲击，开始以角速度 $\omega_0=\sqrt{\frac{6g}{l}}$ 绕 O 轴转动，如图 7-148 所示。试求：

(1) 它转过的角度 θ 与时间 t 的关系；

(2) 它转到轴上竖立时(即 $\theta=\pi$)所需的时间。

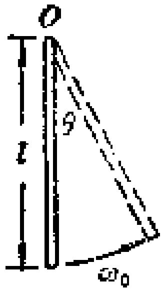


图 7-148

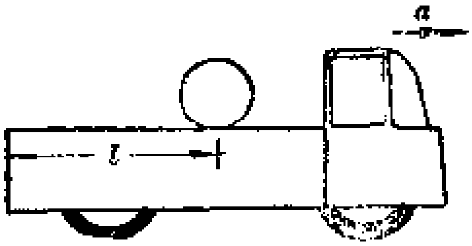
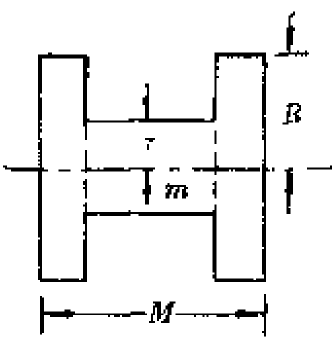


图 7-149

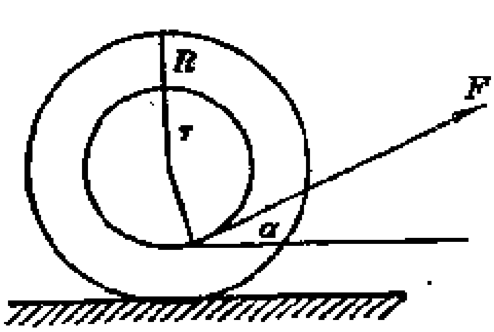
7-149 一个均匀的圆柱放在平板卡车上，车停在平路上。圆柱体的轴到车板后沿的距离为 l，如图 7-149 所示。现在车突然以匀加速度 a 向前开动，设圆柱体在车上滚动时没有滑动，问它滚下车时车跑了多远？

7-150 如图 7-150 所示，线轴的外半径为 R、总质量为 M，绕线部分的半径为 r、质量为 m。设各部分质量分布都是均匀的。今将绕线的一端以一与水平成 α 角的力 F 拉它，问线轴将如何运动？已知它与地面间的摩擦力为 f_μ。(假定无滑动，且 $F\sin\alpha<Mg$。)



正视图

(1)



侧视图

(2)

图 7-150

7-151 一均匀铅球从高为 h 的固定斜面顶上，由静止无滑动地滚下，求滚到底时球心的速度。试用下述几种方法求解：

（1）转动定理，以通过球与斜面的接触点的水平轴为瞬时转动轴；

（2）质心运动定律；

（3）机械能守恒定律；

（4）角动量定理。

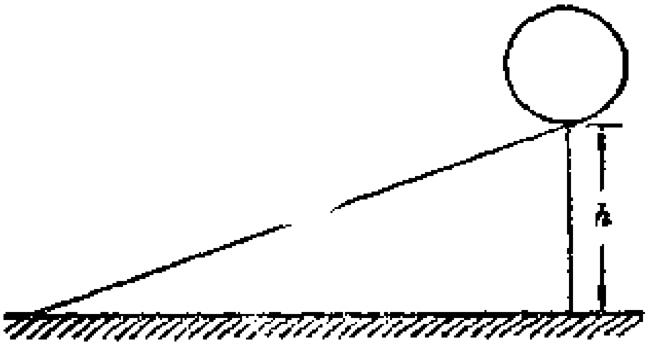


图 7-151

7-152 如图 7-152 所示，一个半径为 R 的半球固定在地面上，在它的顶部有一半径为 r 的均匀球从静止开始滚下，设滚下时没有滑动，问当 θ 等于多少时小球离开大球面？

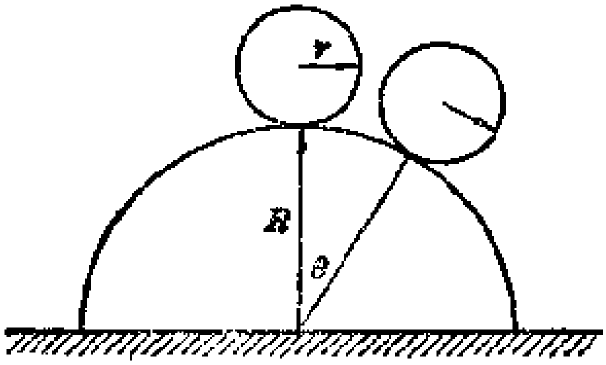


图 7-152

7-153 一个直角棱柱体的高为 h、质量为 M、倾角为 θ，静止在光滑的水平面上。一个半径为 r、质量为 m 的均匀球放在顶部，从静止开始无滑动地滚下，如图 7-153 所示。试求：

（1）球滚到底部时，球心的速度 v；

(2) 棱柱体的加速度 a 和球滚到底部时棱柱体移过的距离 S。

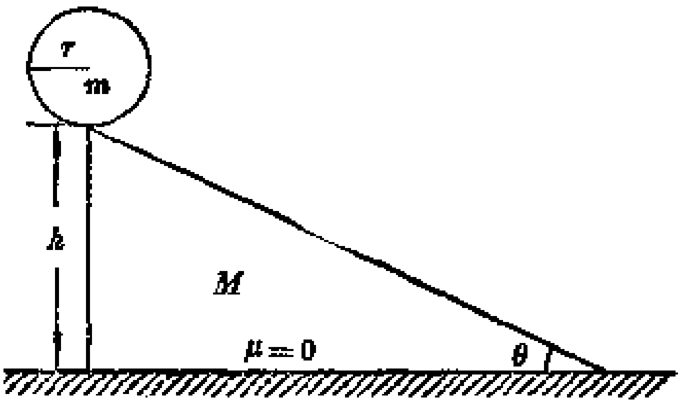


图 7-153

7-154 在水平路轨上有一台斗车，它的两轮轴相距 80 厘米，都比水平路轨高 20 厘米，如图 7-154 所示。当没有外力推它时，由于斗车的重量，两轮轴受到的压力分别为左轴 $P_1=100$ 公斤，右轴 $P_2=90$ 公斤。现在以 $F=4.0$ 公斤的水平力推车，F 的作用点比路轨高 140 厘米。如不考虑轮子的质量，试问：

(1) 如果车在运动的方向上匀速前进，求这时轮轴所受的压力；

(2) 如果在同一力的作用下，斗车作 $a=0.10$ 米/秒^2 的加速度运动，问两轮轴受力各为多少？已知斗车的重心 c 比路轨高 61 厘米。

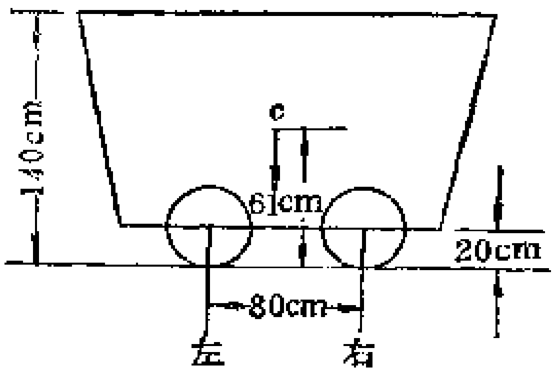


图 7-154

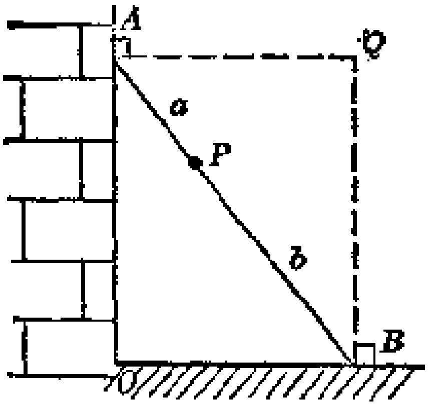


图 7-155

7-155 一直杆 AB 靠在墙上，如图 7-155。由于摩擦力不够大，它的上端沿墙滑下；在滑动过程中，此杆始终在既与墙垂直、也与地面垂直的平面内。证明：

(1) 这杆上任一点 P 的轨迹为一椭圆，P 到两端的距离 a 和 b 分别为椭圆的半长轴和半短轴；

(2) 杆的瞬时轴的轨迹是以墙脚 O 为圆心、杆长为半径的圆；

(3) 过 A 和 B 分别作墙和地面的法线 AQ 和 BQ，P 点的瞬时速度与 $\overline{PQ}$ 垂直。

第八章 机 械 振 动

§1. 简谐振动的描述

8-1 如图 8-1 所示，下列几种情况哪些是简谐振动，哪些不是？并说明理由。

(1) 织布机的梭子在光滑水平经线上，在两边冲力作用下作往返运动；

(2) 小球在地面上作完全弹性的上下跳动；

(3) 细线悬一小球在水平面上作匀速圆周运动；

(4) 浮在水里的均匀矩形木块，用力将它部分按入水中，然后松手，木块作上下浮动。不计水的粘滞阻力；

(5) 上述(4)中，如果是一个密度小于水的均匀正三棱

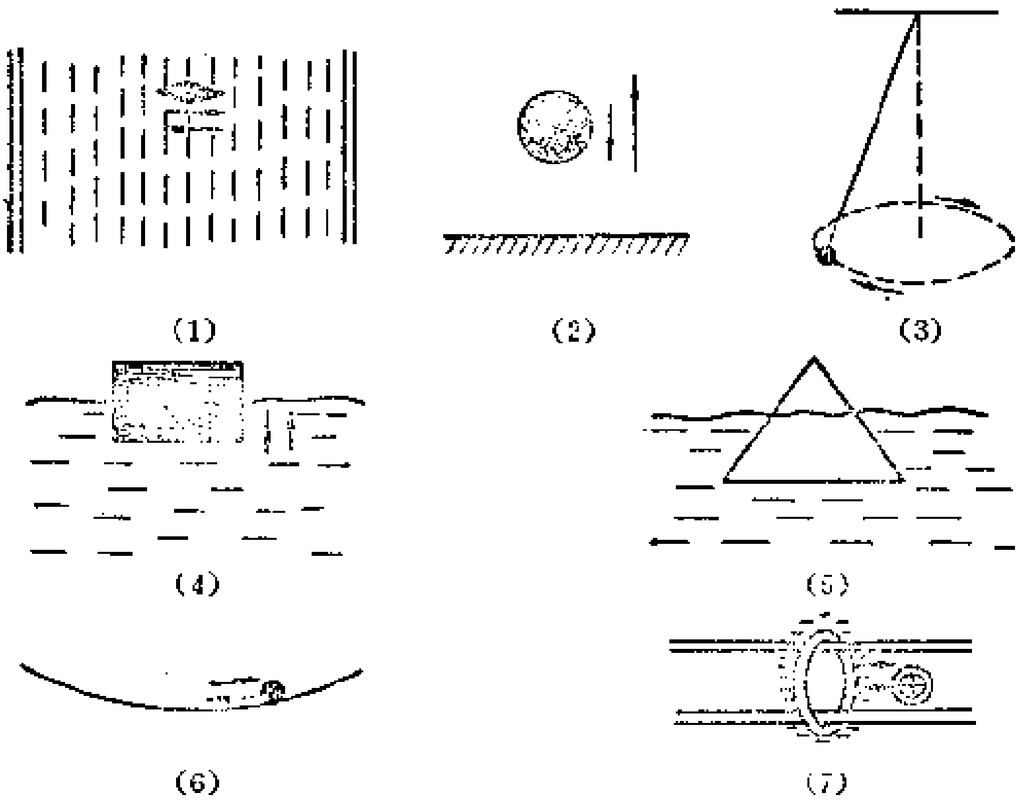


图 8-1

锥体，锥顶向上在水中上下浮动，浮动距离较大，又是怎样？

(6) 小球在半径很大的较光滑凹球面底部作短距离的往返滚动时球心的运动；

(7) 一个带负电荷的圆环套在光滑水平的薄玻璃管上，玻璃管内有一带正电荷的小球在静电力的作用下作往返运动，假定在运动过程中小球和圆环上的电荷分布都不变。

8-2 什么情况下，简谐振动的速度与加速度是同号的(即速度为正、加速度亦为正，速度为负、加速度亦为负)？什么情况下是异号的？

8-3 说明简谐振动 $x=A\cos(\omega t+\varphi_0)$ 的周期为什么是 $T=\frac{2\pi}{\omega}$。如果 $x_1=A_1\cos(n\omega t+\varphi_0)$，周期又是多少？

8-4 两个相同的弹簧各系一物体作简谐振动。不计弹簧质量，问在下列情况下其运动周期是否一样：

(1) 物体质量 $m_1=m_2$、振幅 $A_1=A_2$，一个在光滑水平面上作水平振动，一个在竖直方向悬挂作竖直振动；

(2) $m_1=2m_2$、振幅 $A_1=2A_2$，都在光滑水平面上作水平振动；

(3) $m_1=m_2$、振幅 $A_1=2A_2$，都在光滑水平面上作水平振动；

(4) $m_1=m_2$，一个在地球上，一个在月球上作竖直振动。

8-5 以下三个单摆，都以很长的摆长、很小的角度作简谐振动。它们的周期是否相同？如不相同则哪个大，哪个小？

(1) 摆长 $l_1=l_2=l_3$，摆球质量 $m_2=2m_1$、$m_3=3m_1$；

(2) 摆长 $l_2=2l_1$，$l_3=3l_1$，摆球质量 $m_1=m_2=m_3$；

(3) 摆长 $l_1=l_2=l_3$，摆球质量 $m_1=m_2=m_3$，振幅 $A_2=$

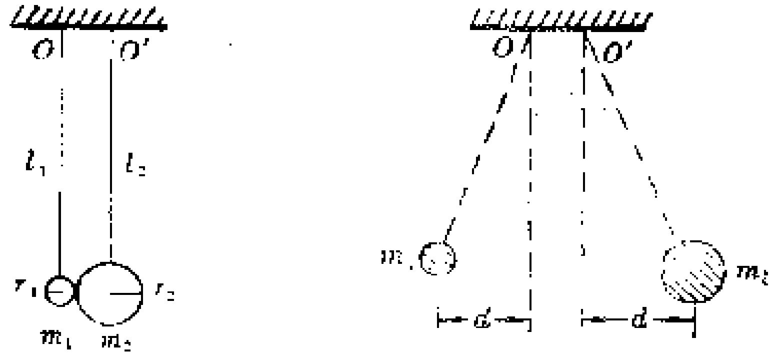
$2A_1$、$A_3=3A_1$；

(4) 摆长 $l_1=l_2=l_3$，摆球质量 $m_1=m_2=m_3$，第一个在地面上，第二个在匀速前进的火车上，第三个在匀加速水平前进的火车上；

(5) 摆长 $l_1=l_2=l_3$，摆球质量 $m_1=m_2=m_3$，第一个在匀速上升的升降梯中，第二个在匀加速上升的升降梯中，第三个在匀减速上升的升降梯中；

(6) 摆长 $l_1=l_2=l_3$，摆球质量 $m_1=m_2=m_3$，第一个在地球上，第二个在环绕地球的同步卫星上，第三个在月球上。已知月面的重力加速度是地面的重力加速度的1/6。

8-6 用细线 l_1 及 l_2 挂在一起的两个小球，其质量分别为 m_1 和 $m_2=2m_1$，悬点间距离正好等于两球半径之和 r_1+r_2，且 $l_1+r_1=l_2+r_2$，如图 8-6(1) 所示。将它们分别向左右拉开同一个小距离 d 后，同时由静止开始摆下，如图 8-6(2)所示。问它们将在何处相碰？



(1) (2)

图 8-6

8-7 把简谐振动 $S=A\cos\left(\omega t+\dfrac{\pi}{3}\right)$，

(1) 写成正弦函数的表达式；

(2) 分别以周期 T 和频率 ν 代替 ω，写出两种表达式；

(3) 求速度 v 和加速度 a；

（4）作 S-t、v-t、a-t 图(一个周期)，时间轴分别以 t、T、ωt 表出。

8-8 简谐振动 $S=6\cos\left(5t-\frac{\pi}{4}\right)$厘米，试问：

（1）振幅、周期、频率各是多少？

（2）起始位移、速度、加速度各是多少？

（3）π 秒末的位移、速度、加速度各是多少？

（4）作 S-t 图(一个周期)，时间轴以秒为单位。

8-9 如图 8-9 所示，一质点作简谐振动，在一个周期内相继通过相距为 11 厘米的两点 A、B，历时 2.0 秒，并具有相同的速率；再经过 2.0 秒后，质点又从另一方向通过 B 点。求质点运动的周期和振幅。

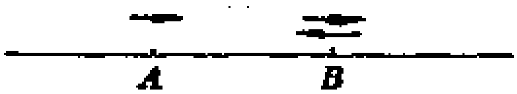


图 8-9

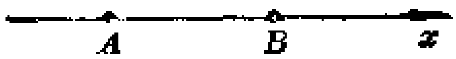


图 8-10

8-10 如图 8-10 所示，两个质点 A、B 相距 7.0 厘米，都沿 x 轴作简谐振动，它们的位置表达式为：

$$x_A=A_1\sin\left(\omega_A t-\frac{\pi}{2}\right);\quad x_B=A_2\sin\left(\omega_B t+\frac{\pi}{2}\right);$$

其中 $\omega_A=20$ 秒$^{-1}$，$\omega_B=21$ 秒$^{-1}$，$A_1=3.0$ 厘米，$A_2=4.0$ 厘米。若在 $t=0$ 时开始振动，试问：

（1）开始振动后 0.035 秒时，A、B 间的距离是多少？

（2）这时刻它们之间的相对速度是多少？

8-11 一质点在一直线上作简谐振动，当其距平衡点 O 为 2.0 厘米时，加速度为 4.0 厘米/秒^2，问该质点从一端(静止点)运动到另一端所需的时间。

8-12 简谐振动的振幅为 A，频率为 ν，写出它在离平衡位置为 x 处的速度表达式 $v(x)$。

8-13 一物体作简谐振动，周期为 T，求其在第一个周期内经过下列过程所需的时间：

(1) 由平衡位置到位移最大处；

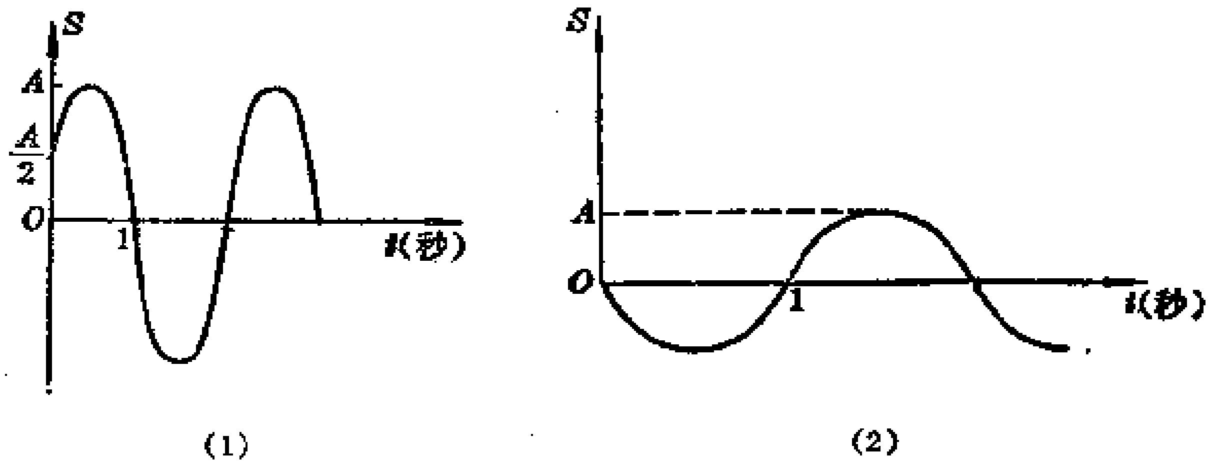
(2) 由平衡位置到位移等于最大位移的$\frac{1}{2}$处；

(3) 由最大位移的$\frac{1}{4}$处到位移最大处。

8-14 证明：一个长度不变的矢量，一端固定，另一端作匀速圆周运动，则它在任何方向的投影都是简谐振动。其中矢量的模是简谐振动的振幅，矢量的旋转角速度是简谐振动的角频率，矢量与该方向间的夹角即为简谐振动的周相。投影方向的不同表示选取起始时刻不同。

8-15 一马达带动一偏心轮作匀角速度旋转，此偏心轮安装于机座上，绕一水平轴转动。证明由于质心偏离轮轴中心而引起的机座所受的竖直方向的力是一简谐力。

8-16 从下述简谐振动的位移 S-t 图，如图 8-16(1)、(2)所示，分别写出这两简谐振动的表达式。



(1) (2)

图 8-16

8-17 为什么说简谐振动的周相是描述系统的运动状态的？简谐振动的初周相是不是一定指它开始振动时刻的周相？同一个

简谐振动，能否选不同时刻当作时间的起始点，即选取不同时刻作为 $t=0$，它们之间差别何在？

8-18 如果把一个单摆拉开一个小角度 θ_0，然后放开让其自由摆动。试问：

(1) 此 θ_0 是否即为初周相？

(2) 单摆绕悬点转动的角速度是否即为简谐振动的角频率？

(3) 我们说单摆作简谐振动是指单摆的什么量在作简谐振动？

8-19 同一个简谐振动能否写成正弦函数表达式或余弦函数表达式，其区别何在？

8-20 证明：两个频率相同的简谐振动的周相差是不随时间改变的。

8-21 同一简谐振动的位移 S、速度 v、加速度 a 之间的周相差是多少？谁比谁超前？

8-22 在下列三种情况下，分别求其中 S_1 和 S_2 两个简谐振动的周相差，哪个超前？

(1) $S_1=A_1\cos\left(\omega t-\dfrac{\pi}{2}\right)$,

$S_2=A_2\sin\left(\omega t+\dfrac{\pi}{6}\right)$;

(2) $S_1=A_1\sin\left(\omega t+\dfrac{\pi}{2}\right)$,

$S_2=A_2\sin\left(\omega t-\dfrac{3\pi}{4}\right)$;

(3) $S_1=3\cos\left(\pi t+\dfrac{\pi}{4}\right)$,

$S_2=-2\sin\left(\pi t+\dfrac{\pi}{3}\right)$;

把每一组 S_1、S_2 在同一张图纸上作 S-t 图，对此进行讨论并得出必要的结论。

8-23 一简谐振动的表达式为 $x=A\cos(\omega t+\varphi_0)$，其中 A 和 φ_0 是由初始条件 $t=0$ 时 $x=x_0$、$v=v_0$ 决定的。证明：

$$A=\sqrt{x_0^2+\frac{v_0^2}{\omega^2}};\qquad \varphi_0=\tan^{-1}\left(-\frac{v_0}{x_0\omega}\right)。$$

如果写成 $x=A\sin(\omega t+\varphi_0')$，则 A 和 φ_0' 又是怎样？

8-24 在 $t=0$ 时单摆处于图 8-24(1)所示状态，求初周相 φ_0 及图 8-24(2)、(3)、(4)各状态的周相以及到达这些状态的时刻。已知周期为 T，若以向右方向为正，分别写出正弦、余弦表达式。

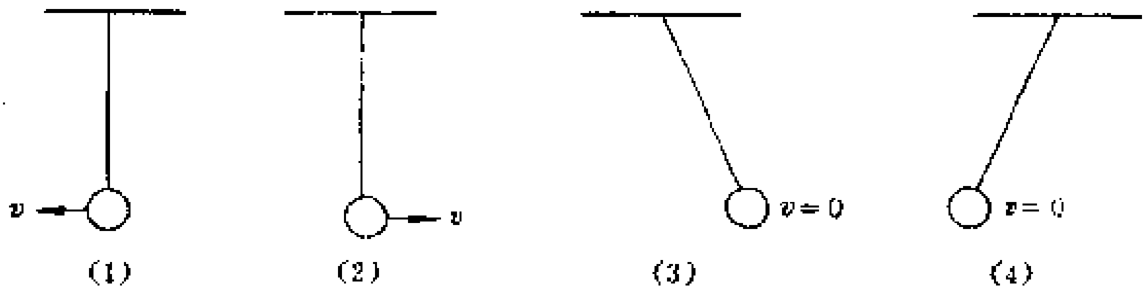


图 8-24

8-25 在 $t=0$ 时，周期为 T、振幅为 A 的单摆分别处于如图 8-25(1)、(2)、(3)、(4)所示的状态。若以向右方向为正，写出它们的振动表达式。

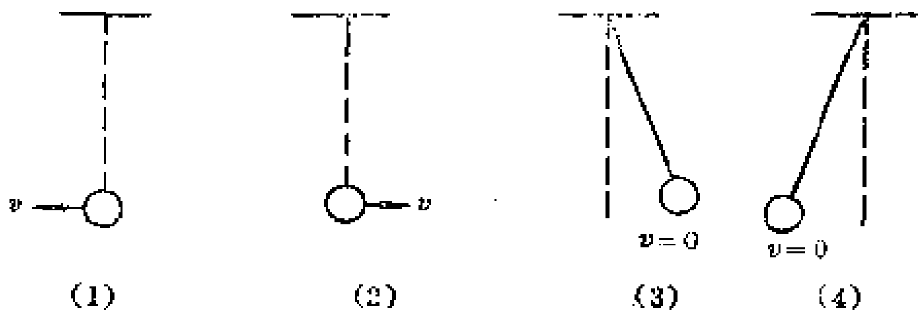


图 8-25

8-26 写出图 8-26 所示的简谐振动的初周相 φ_0，a、b、c、d、e、f 各点的周相 φ 以及到达这些状态的时刻 t 各是多少？已知周期为 T。并分别写出：

(1) 正弦表达式；

(2) 余弦表达式。

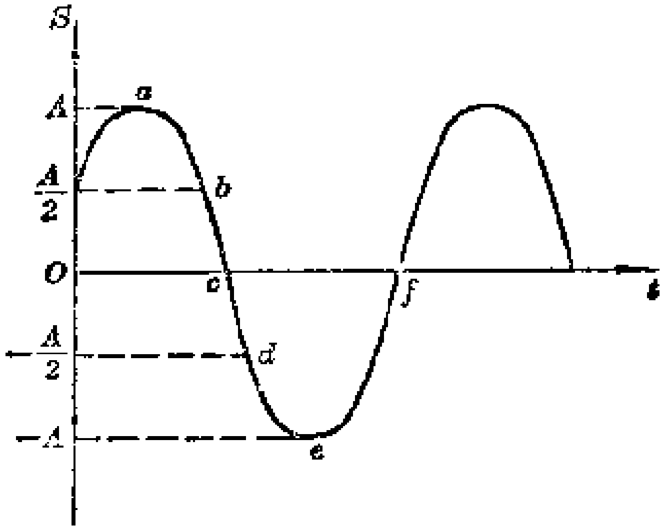


图 8-26

§2. 简谐振动的动力学问题

8-27 把一汽油发动机活塞的运动看作简谐振动。若其冲程(振幅的两倍)为 12 厘米，发动机的转速为 3600 转/分，试求：

(1) 活塞在冲程末了时的加速度；

(2) 若活塞重 450 克，此时它受到的合力是多少？

8-28 如图 8-28 所示，一个单摆的摆长 $l=39.2$ 厘米，质量 $m=500$ 克。当 $t=0$ 时，$\theta=0.1$弧度，$\frac{d\theta}{dt}=-0.02$ 秒$^{-1}$，求其摆锤的位移 S 与时间的关系以及在 $\theta=0$ 时作用于质点的力 F。

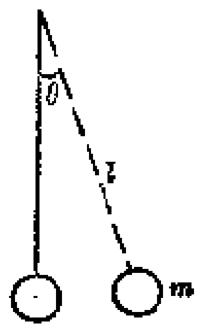


图 8-28

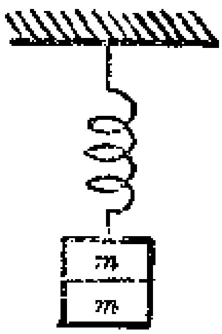


图 8-29

8-29 如图 8-29 所示的弹簧，其一端固定在天花板上，另一端挂两个相同的质量 m 各为 1.0 公斤的物体，此时弹簧伸长 2.0 厘米，静止不动。如果挂在下面的一个物体自己脱落掉下，若不计弹簧质量，求剩下的物体运动的振幅和周期。

8-30 一物体质量为 4.9 公斤，挂在一弹簧上作上下振动，周期是 0.50 秒。问当此物体移去后，弹簧的平衡位置移动了多少？设弹簧自身的重量不计。

8-31 一倔强系数为 k 的弹簧上端固定，下端系一质量为 m 的物体，物体放在支架上，使弹簧保持没有系物时的自然长度，静止不动。今将支架突然移开，若不计弹簧自重，以起始运动时的位置作为坐标原点，求物体运动的表达式。

8-32 一质量为 m 的物体悬于一竖直的弹簧上，使弹簧拉伸了 l 长度而到达新的平衡位置。随后让此系统自由振动。若不计弹簧自重，证明它的周期与一长为 l 的单摆周期是一样的。

8-33 一倔强系数为 k 的弹簧和一质量为 m 的物体组成一振动系统。若弹簧自身的质量不计，弹簧的自然长度为 l_0。问下述情况下其振动周期及平衡时弹簧的长度有何不同：

(1) 整个系统放在光滑水平面上，如图 8-33(1)；

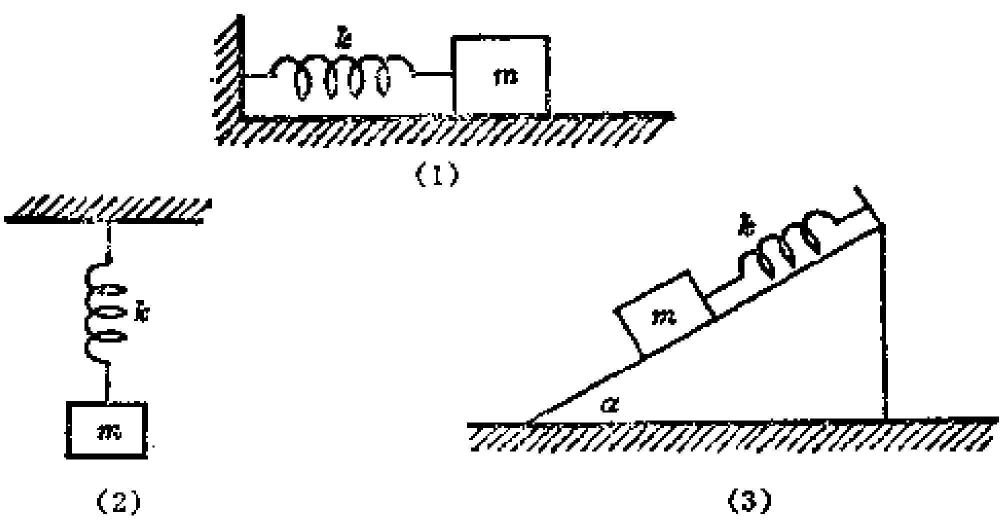


图 8-33

（2）整个系统竖直挂起，如图 8-33(2)；

（3）整个系统放在倾角为 α 的光滑斜面上，如图 8-33(3)。

8-34 两个相同的弹簧，倔强系数都是 k，本身质量都略去不计，每个弹簧都系一质量为 m 的物体而成为一振动系统。试分析下述情况下是否简谐振动，如是简谐振动，求其周期。参看图 8-34(1)——(7)。

（1）串联在一起，吊起 m；

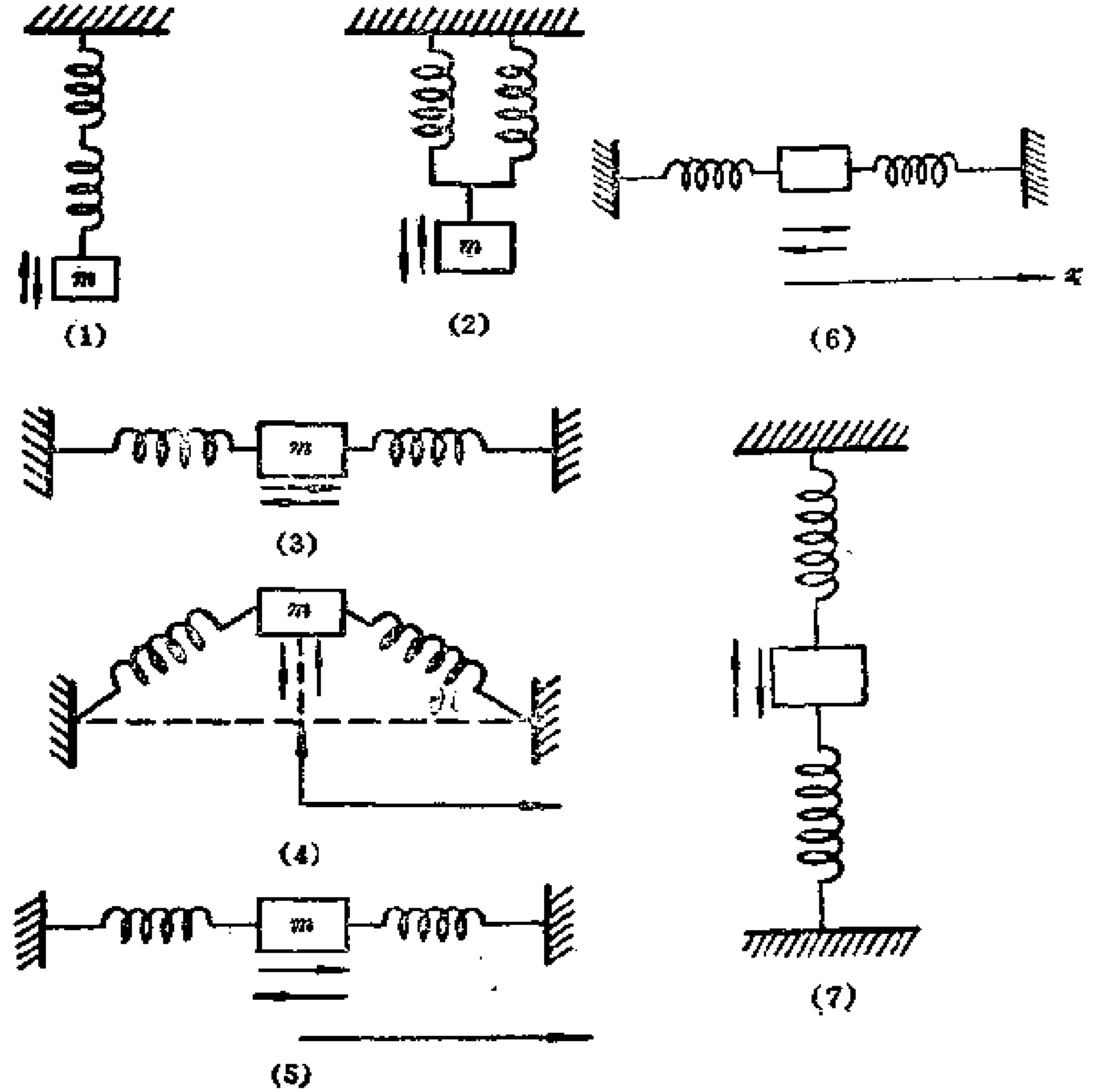


图 8-34

(2) 并联在一起，均衡地吊起 m；

(3) 在光滑水平桌面上，物体处于中间。平衡时弹簧不伸长，物体振动方向与弹簧伸缩方向相同；

(4) m 在 y 方向振动，如图 8-34(4) 所示。各时刻两弹簧长度相等，平衡时弹簧自然伸长；

(5) 在光滑水平桌面上，物体处于中间，m 在平衡位置时每个弹簧拉长了 x_0；

(6) 如(5)，但 m 在平衡位置时每个弹簧被压缩了 x_0；

(7) 如图 8-34(7)，将物体 m 置于两竖直放置的弹簧中间上下振动，m 在平衡位置时上面弹簧伸长量等于下面弹簧的缩短量。

8-35 如图 8-35 所示，一个盘子挂在一倔强系数为 k 的弹簧下，一个质量为 m 的物体由高为 h 处的空中落到盘中并与盘粘在一起，于是盘子开始振动，求振动的振幅 A 以及物体刚落在盘子时的周相，以弹簧开始运动时作为时间起点，以向下为正。设盘子与弹簧质量可忽略不计。

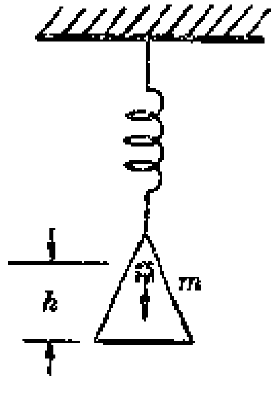


图 8-35

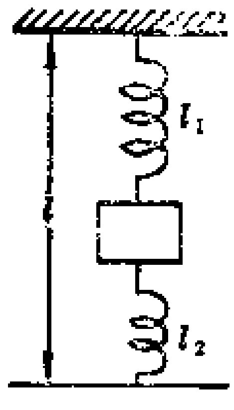


图 8-36

8-36 如图 8-36 所示，一弹簧的自然长度为 l，倔强系数为 k，当其处于自由状态时，将上下两端固定。今将它截成长度分别为 l_1 和 l_2 的两段($l=l_1+l_2$)，并令 $l_1=2l_2$，把质量为 m 的小物体系在中间让它作上下方向振动，若略去弹簧的质量和物体的大

小，求其振动周期。

8-37 利用转动定理 $\Sigma L = I\ddot{\theta}$ 及牛顿定律 $\Sigma F = m\ddot{x}$ 分别列出作振幅很小的振动的单摆振动方程并求解。对这两个解进行比较并讨论。式中 ΣL 是合外力矩，I 是对轴的转动惯量，θ 是摆角，ΣF 是合外力，m 是摆锤质量，x 是摆动位移。

8-38 一个单摆如图 8-38 所示，摆长 $l=150$ 厘米，悬点 O 的正下方有一固定的钉子 A，$OA=54$ 厘米，设摆动角度很小，求此摆的周期。

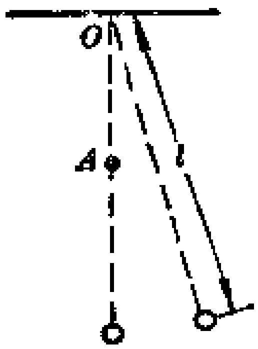


图 8-38

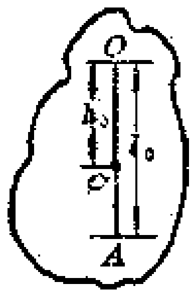


图 8-42

8-39 在一平板上放一重量为 1.0 公斤的物体，平板在竖直方向上下地作简谐振动，周期为 0.50 秒，振幅为 2.0 厘米。试求：

(1) 位移最大时物体对平板的压力；

(2) 平板以多大振幅振动时，物体刚好要跳离平板。

8-40 一物体静止于一水平板上，此板沿水平方向作简谐振动，频率为 2.0 秒$^{-1}$。物体与板面的静摩擦系数为 0.50。试问：

(1) 要使物体在板上不至发生滑动，能允许振幅的最大值是多少？

(2) 若此板沿竖直方向作简谐振动，振幅为 5.0 厘米，要使物体不离开板，最大频率是多少？

8-41 能否在复摆上找一点，在此点上加上一质量有限大的质点而不改变复摆的周期？如能找到，此点应在何处？

8-42 一复摆悬于 O 点，重心为 C，$OC=h_0$，等值摆长 $l_0=$

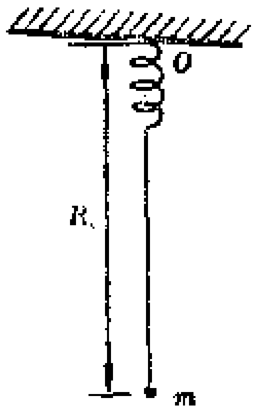
OA，如图 8-42 所示。证明：

(1) O 与 A 一定位于重心 C 的两侧；

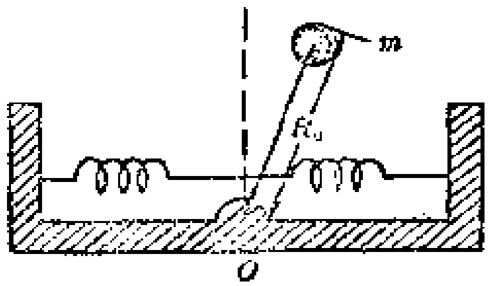
(2) 如果以 A 为悬点，则振动周期与以 O 为悬点时相同。(O 和 A 两点称为复摆的共轭中心。)

8-43 甲地的重力加速度为 979.442 厘米/秒^2，乙地的重力加速度为 980.129 厘米/秒^2。问在甲地对准的一个摆钟移到乙地后，每 24 小时快或慢几秒？设其他条件不变。

8-44 图 8-44 所示的两个摆都是用弹簧与基座作弹性联接的。(1) 是有弹性联接的单摆；(2) 是倒立摆，弹簧维持在一水平直线上作振动。设弹簧的恢复力矩都是 $L=-C_0\theta$，摆锤的质量都是 m。略去摆杆和弹簧质量，分别求出它们的小振动周期。



(1)



(2)

图 8-44

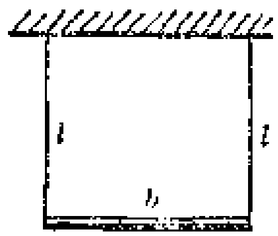


图 8-45

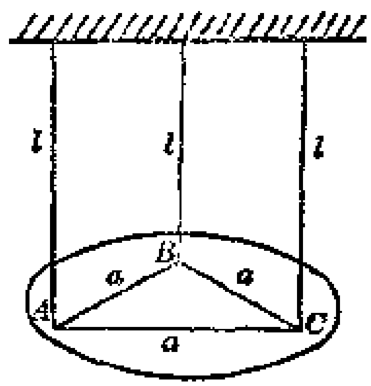


图 8-46

8-45 一均匀细棒两端都以长为 l 的相同的细线悬挂起来，

在静止时棒是水平的，两线都垂直于地面，如图 8-45 所示。今将棒绕竖直的中心轴略略转一下，即发生很小的振动，求振动周期。

8-46 一圆盘形的均匀薄板以三根长为 l 的细线均衡地悬挂起来，悬点 A、B、C 是一等边三角形，边长为a，平衡时圆盘水平、三根悬线均竖直。今将圆盘绕其几何轴扭转一个小角度，然后让它自由运动，求摆动周期，并对结果进行讨论。

8-47 用扭摆可以测物体的转动惯量。扭摆的底为一质量均匀分布的圆盘，半径为 R，质量为 m，悬点通过中心轴，如图 8-47 (1)所示。把圆盘扭转一个角度后放手，它便以悬线为轴来回扭摆，测得其摆动周期为 T_1。加上一待测物体M后，如图 8-47(2)所示，其摆动周期为 T_2。求M绕摆轴的转动惯量。

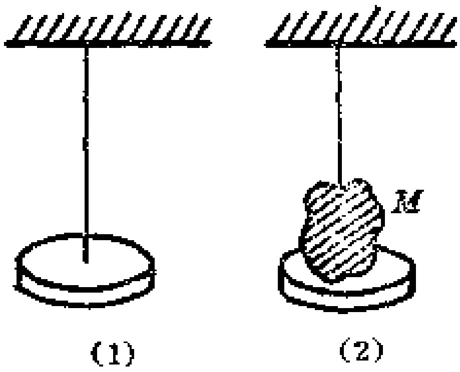


图 8-47

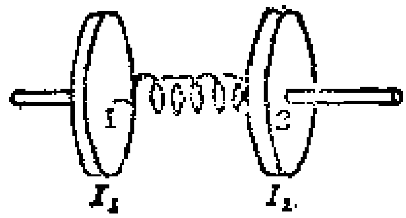


图 8-48

8-48 两圆盘可绕一贯穿两者的轴线转动，如图 8-48 所示。两圆盘对此轴的转动惯量分别是 I_1 和 I_2，两盘用轻弹簧相连，弹簧的扭转系数是C。若忽略摩擦的影响，试问：

(1) 将两盘反方向地扭转一个小角度再放开，圆盘的振动周期是多少？

(2) 固定第二盘，振动周期会否改变？改变了多少？

8-49 一竖直放置的U形管内有液体m克，如图 8-49 所示。U 形管的横截面是均匀的，横截面积为 S。设由于某一扰动而使液体在管内发生振动，若不计粘滞阻力和毛细作用，已知液体密度

为 ρ，求振动周期。

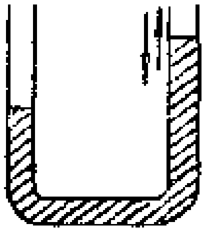


图 8-49

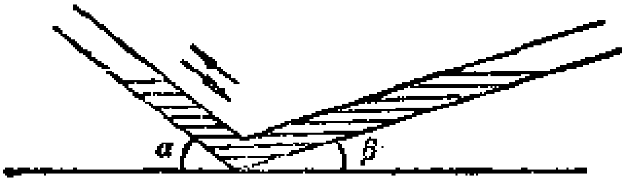


图 8-50

8-50 m 克液体放在有同样横截面积 S 的 L 形弯管中，如图 8-50 所示。弯管的两段与水平面的夹角分别为 α 和 β，若液体的密度为 ρ。不计液体的粘滞阻力和毛细作用，求液体振动周期。

8-51 如图 8-51 所示，一质量为 m 的均匀木板水平地搁在两个以相同角速度 ω 相向旋转的滚子上，两滚子轴间的距离为 d，它们具有相同的直径。滚子与木板之间的滑动摩擦系数为 μ。问当木板偏离对称位置后，它如何运动？如果是作简谐振动，其周期是多少？

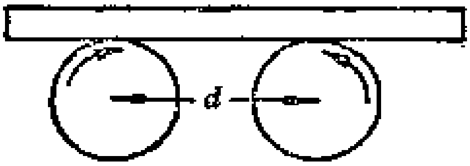


图 8-51

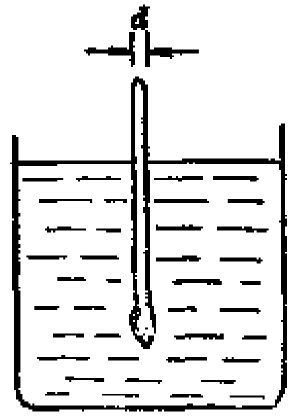


图 8-52

8-52 如图 8-52 所示，一比重计的直径为 d，质量为 m，飘浮在密度为 ρ 的液体中。设在竖直方向轻轻推动比重计一下，液体的运动及粘滞摩擦均可不计。求其振动周期。

8-53 一质量为 m 的质点系于长为 l 的细弦 AB 的中部，如图 8-53 所示。细弦水平，质量可忽略不计，弦上张力 P 保持不变。求质点 m 在平衡位置附近作微小横向振动的周期。

8-54 一两端固定并张紧的弦线 AB，其质量可忽略。有一质量为 m 的质点悬于弦上一点，这点距 A、B 分别为 a 和 b，如图 8-

54 所示，弦的张力为 P。证明：当振幅很小时其横向振动周期为 $T=2\pi\sqrt{\dfrac{mab}{P(a+b)}}$。问当 m 在何处时周期最大？

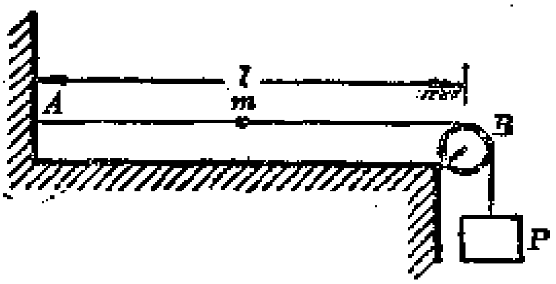


图 8-53

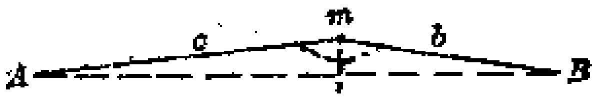


图 8-54

8-55 证明：简谐振动系统的总能量与其振幅的平方和振动频率的平方都成正比。

8-56 一质量为 100 克的物体作简谐振动，振幅为 1.0 厘米，加速度的最大值为 4.0 厘米/秒^2。以平衡位置势能为零，

(1) 求总振动能；

(2) 求过平衡位置时的动能；

(3) 问在何处势能与动能相等？

(4) 若物体在平衡位置时周相为 0，问当动能为势能的两倍时，周相为多少？

8-57 两个相同的弹簧上端都固定，下端各挂一个重物作简谐振动，弹簧的质量可忽略。若在下列情况下，求其振动能量之比 $E_1:E_2$。

(1) 物体质量 $m_2=2m_1$、振幅 $A_2=A_1$；

(2) 振动周期 $T_2=2T_1$、振幅 $A_2=2A_1$；

(3) 振动频率 $\omega_2=2\omega_1$、振幅 $A_2=A_1$、物体质量 $m_2=2m_1$；

(4) 将单个弹簧悬重物 m_1，作振幅 A_1 的振动与两个弹簧串联，下悬重物 $m_2=2m_1$、振幅 $A_2=A_1$ 的情况作比较。

(5) 将单个弹簧悬重物 m_1，作振幅 A_1 的振动与两个弹簧并联，下悬物体 $m_2=2m_1$，振幅 $A_2=A_1$ 的情况作比较。

8-58 一水平放置的弹簧系一小球，已知球经平衡位置向右运动时 $v=100$ 厘米/秒，周期 $T=1.0$ 秒，求再经过 1/3 秒时间，小球的动能是原来的多少倍？弹簧质量不计。

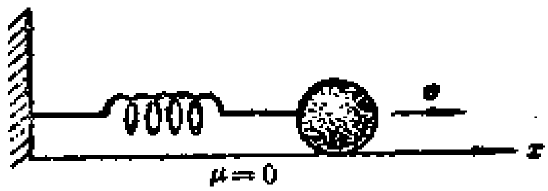


图 8-58

§3. 简谐振动的合成

8-59 两个方向相同、频率相同的简谐振动，其表达式为：

$$S_1=5\sin(10t+0.75\pi)\text{ 厘米},$$

$$S_2=6\sin(10t+0.25\pi)\text{ 厘米},$$

分别用矢量图法和计算法求合振动。

8-60 两个方向相同的简谐振动 $S_1=5\cos\left(10t+\frac{3\pi}{4}\right)$ 厘米，$S_2=6\cos\left(10t+\frac{\pi}{4}\right)$ 厘米，试求：

(1) 合振动的振幅和初周相；

(2) 另有一方向相同的简谐振动 $S_3=7\cos(10t+\varphi_{03})$ 厘米，问当 φ_{03} 为何值时，S_1+S_3 的振幅最大？

(3) φ_{03} 为何值时，S_2+S_3 的振幅最小？

8-61 两个方向相同、频率相同的简谐振动，其合振幅为 10 厘米。合振动的周相与第一个振动的周相差为 30°。若第一个振动的振幅为 $A_1=8.0$ 厘米，求第二个振动的振幅 A_2 及第一与第二两振动的周相差。

8-62 有一直线与 x、y、z 轴的夹角分别为 α、β、γ，写出沿此直线的简谐振动的表达式。

8-63 已知两组相互垂直的振动为

(1) $\begin{cases} x = a\sin\omega t \\ y = b\cos\omega t \end{cases}$

(2) $\begin{cases} x = a\cos\omega t \\ y = b\sin\omega t \end{cases}$

每组合成的结果各是什么运动，它们之间有何不同？

8-64 已知一合振动，如图 8-64 所示，作顺时针的匀速圆周运动，半径为 A，角速度为 ω，当 $t=0$ 时刻 $x_0 = -\frac{\sqrt{3}}{2}A$。求 x 方向及 y 方向的分振动。

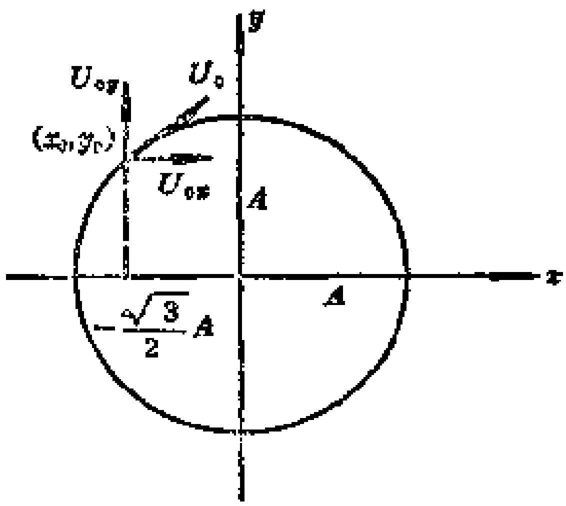


图 8-64

8-65 两个相互垂直的简谐振动

$$x = a\sin(\omega t + \alpha)$$

$$y = b\cos\left(\omega t + \alpha + \frac{\pi}{12}\right)$$

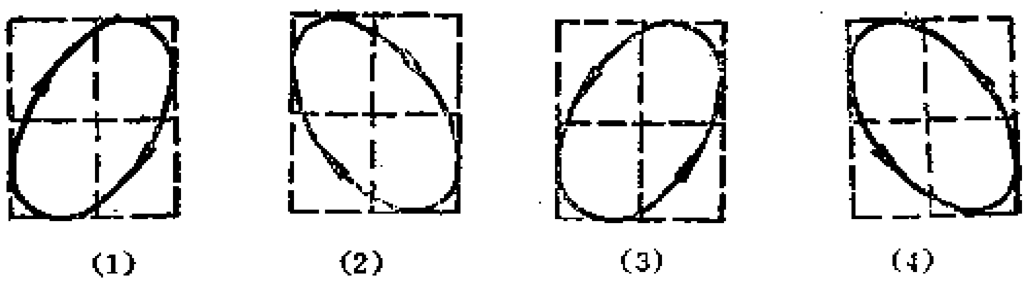


图 8-65

问它们合成的振动是图 8-65(1)——(4)中的哪一个？

8-66 地震的瑞利面波在地面沿 x 方向以速度 v 传播时，介质质点在波的传播方向和垂直地面方向所组成的平面内运动，其水平分量 U 和垂直分量 W 分别为：

$$U=0.42\sin\left[\omega\left(t-\frac{x}{v}\right)\right],$$

$$W=-0.62\cos\left[\omega\left(t-\frac{x}{v}\right)\right]。$$

问质点在 U-W 平面内作什么运动？并试画出其图形。

8-67 两个简谐振动 x_1 和 x_2 的振动方向之间的夹角为 $60°$，如图 8-67 所示。已知它们的表达式为：

$$x_1=A_1\cos\left(\omega t+\frac{\pi}{2}\right),$$

$$x_2=A_2\cos\omega t。$$

问这两个振动的合振动是什么运动？

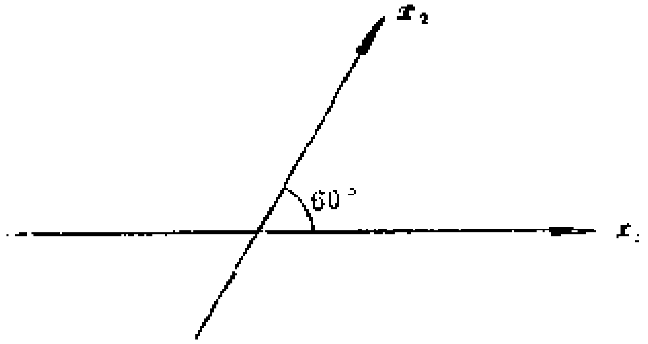


图 8-67

8-68 证明：任意两个频率相同的简谐振动的合成必为一椭圆振动。

8-69 ν_1 和 ν_2 是两个方向相同频率不同的简谐振动的频率，且 $\nu_1\approx\nu_2$。证明：拍频频率 $\nu=|\nu_2-\nu_1|$；并由此求一音叉频率，已知这音叉与一频率为 511 赫兹的音叉产生的拍频为每秒一次；与另一频率为 512 赫兹的音叉产生的拍频为每秒二次。

8-70 一质点同时在两正交方向作简谐运动，振幅相等，频率

为 3:2，起始位移都为零。画出它的李萨如图形。

§4. 阻尼振动和受迫振动

8-71 某阻尼振动的振幅在一个周期后减为原来的$\frac{1}{3}$，问此振动周期较无阻尼存在时的周期 T_0 大百分之几？

8-72 一个摆的自由振动周期为 $T_0=2.00$ 秒，今在阻尼常数 $D=0.50$ 的条件下作阻尼振动，试求：

（1）相隔半个周期时相邻两个振动振幅之比$\frac{A_k}{A_{k+1}}$；

（2）驰豫时间(驰豫时间为振幅减为起始的$\frac{1}{e}$所经历的时间)；

（3）阻尼振动的周期 T。

[注：阻尼常数D定义为 $D=\frac{\beta}{\omega_0}$，$\omega_0=\frac{2\pi}{T_0}$，$\beta$ 和 ω_0 为阻尼振动方程 $\ddot{x}+2\beta\dot{x}+\omega_0^2x=0$ 中的系数。]

8-73 一单摆作阻尼振动，摆长为 $l=0.800$ 米，其起始振幅为 $A_0=0.100$ 弧度，5 分钟后振幅衰减为$\frac{1}{10}A_0$，求对数减缩 λ。

[注：对数减缩 $\lambda=\ln\frac{A_k}{A_{k+1}}$，$A_k$ 及 A_{k+1} 为阻尼振动相邻两次隔半个周期振动的振幅。]

8-74 一振动的质点起始时振幅为 1.0 厘米，对数减缩 $\lambda=0.002$。问该质点在完全停止之前所经历的总路程是多少？

8-75 A_K 是阻尼振动的第K个振幅，A_{K+n} 是第K个以后相隔 n 个半周期的振幅，如图 8-75 所示。阻尼振动的方程为

$\ddot{x}+2\beta\dot{x}+\omega_0^2x=0$，阻尼常数 D 定义为 $D=\dfrac{\beta}{\omega_0}$。若 e 为自然对数的底。证明：

$$D=\frac{\dfrac{1}{\pi n\lg e}\lg\dfrac{A_K}{A_{K+n}}}{\sqrt{1+\dfrac{1}{\pi^2n^2(\lg e)^2}\left(\lg\dfrac{A_K}{A_{K+n}}\right)^2}}。$$

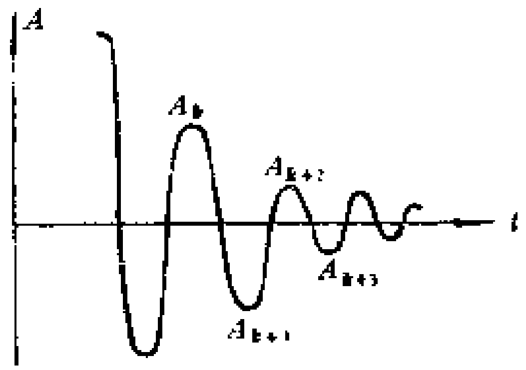


图 8-75

8-76 证明：如果阻尼常数 D 很小，则有 $D\cong\dfrac{0.11}{N}$，其中 N 为振幅衰减一半所经过的周期数。

8-77 一个摆作阻尼振动，初振幅为 $A_0=3.0$ 厘米，过 10 秒钟后振幅衰减为 1.0 厘米。问再过多少时间振幅衰减为 0.30 厘米？

8-78 一音叉的频率为 $f=600$ 赫兹，若对数减缩 $\lambda=0.0080$，问经过多少时间后音叉振动能量减到原来的百万分之一？

8-79 某阻尼振动 $\ddot{x}+2\beta\dot{x}+\omega_0^2x=0$ 的品质因数 Q 定义为：

$$Q=2\pi\frac{\text{贮存的能量}}{\text{一个周期内损失的能量}}$$

证明：当 $\beta\ll\omega_0$ 时，$Q\approx\dfrac{\omega_0}{2\beta}$。

8-80 一个摆的自由振动周期为 1.0 秒，现在让它在阻尼常数 $D=0.45$ 的情况下作阻尼振动。当它衰减的振幅等于 1.0 厘米时，加上周期性外力矩 $L=L_0\sin\omega t$，其中 $L_0=0.0010$ 公斤力·米，外力矩周期 $T=2.0$ 秒。已知摆的转动惯量 $I=0.010$ 公斤·米^2。问经过多少时间以后，摆的振动成为稳态的受迫振动？[注：设暂态量的振幅比稳态振幅小一个数量级时就可看成为稳态的受迫振动。]

8-81 地震仪在正弦形地动 $x=h\sin\omega t$ 的策动下作受迫振

动。证明：

(1) 当地震仪的固有振动频率 $\omega_0 \ll \omega$ 时，地震仪记录的是地动位移；

(2) 当 $\omega_0 \approx \omega$ 时，地震仪记录的是地动速度；

(3) 当 $\omega_0 \gg \omega$ 时，地震仪记录的是地动加速度。

8-82 证明：

(1) 只有在振动系统的阻尼常数 $D \leqslant \frac{1}{\sqrt{2}}$ 时，才可能发生共振现象；

(2) 共振频率 $\nu_{共}=\nu_0\sqrt{1-2D^2}$，$\nu_0$ 为系统的自由振动频率；

(3) 共振时，系统作受迫振动的振幅随阻尼常数 D 的减小而急剧增大。

8-83 证明：系统发生共振时，其运动方向与外加策动力的方向相同。从而说明共振时为什么能够达到最大的振幅值。

8-84 火车在铁轨上行驶时，每经过一接轨处便受到一次震动，使车箱在弹簧上作上下振动。设铁轨每段长 12.5 米，车箱上每个弹簧承受的重量为 0.50 吨，弹簧每受 1.0 吨重的力将压缩 16 毫米。若弹簧本身重量不计，问火车以什么速率行驶时，弹簧的振幅最大？

8-85 一物体挂在弹簧下，物体-弹簧系统的固有振动周期为 $T_0=\frac{1}{2}$ 秒。今在物体上加一竖直方向的正弦力，其最大值为 $F=$ 100 达因；此外，还有一不大的摩擦力存在。设系统在共振时的振幅为 $A=5.0$ 厘米，并设摩擦力与速度成正比，即 $f_{阻}=-\alpha\dot{x}$。求摩擦阻力系数 α，和最大摩擦力的数值 f_{max}。

8-86 一质量 $M=2.5\times10^2$ 公斤的底坐均衡地放在四个 $k=$

25 公斤/厘米的弹簧上，弹簧本身的质量不计。底座上放置一转速为 3000 转/分的电机，此时电机给底座一个 $f=H\cos\omega t$ 的力，$H=2.2$ 公斤。试问：

（1）这时底座的振幅 A 等于多少？

（2）电机的转速为多大时发生共振？

8-87 将一拉紧的钢弦放在一频率为 100 赫兹的交流电磁铁前，钢丝固有频率达到 $f=100$ 赫兹时，振动达到最大振幅 $A_0=5.0$ 毫米。若再拉紧钢丝使其固有频率增至 $f_2=101$ 赫兹时，振幅降至 2.0 毫米。问在去除电磁铁后多少时间，钢丝的振幅才能由 5.0 毫米减至 2.0 毫米？

8-88 在许多场合，我们要避免振动系统与外力发生共振而带来的有害影响。从原则上说，可采取以下几种方法：

（1）打乱外力的周期性，使受迫振动不能产生；

（2）加大振动系统的阻尼，使在周期性外力作用下不能产生周期性的受迫振动；

（3）把外力的频率改变到与系统固有振动频率相差很远，使共振不发生；

（4）把系统的固有频率改变到与周期性外力的频率相差甚远，使共振不发生；

（5）减小周期性外力的振幅，在不可避免发生共振的情况下减小共振振幅。

说明以下诸情况是属于哪一种方法：

（1）改变电机的转速；

（2）调整机器的转动部分，使其质量中心尽量通过中心轴；

（3）将房屋的木梁之间用大钉相联，在发生振动时相互牵制，减弱振动；

(4) 将房屋用圈梁圈起，成为一个大的整块体；

(5) 队列过桥时变成便步走；

(6) 挑担颤悠太甚时倒换脚步；

此外请你再列出一些其他事实，并予以说明。

8-89 房屋打地基时，常常用一种夯，叫做蛤蟆夯。它是由装在铁架子上的一个小马达带动一个偏心轮构成的，你能说明其原理吗？

8-90 磬是我国古代的一种乐器，用金属或玉制成。有作成薄板状悬挂着的，也有作成带有花孔的薄碗状放在桌子上的。用小木槌敲击，便发出清脆的声音。唐代洛阳的一个庙里，磬常常在夜半不敲而自鸣，和尚因此吓病了。他的好友曹绍夔知道这是别的地方夜里打钟引起的，于是拿锉在磬上锉了几个缺口，以后磬就不再半夜自鸣了。你能说清楚这磬自鸣和不自鸣的原因吗？

§5. 杂　　题

8-91 一个质点在 x、y 平面上在一有心力 $\boldsymbol{f}$ 作用下运动，$\boldsymbol{f}=-C(x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j})$。该质点的质量为 m，C 为常量。试求：

(1) x、y 方向的运动方程；

(2) 什么条件下质点作圆周运动？其周期为多少？

(3) 什么条件下质点在与 x 轴相交为 $45°$ 角的直线上运动？其周期是多少？

8-92 长为 l 的杆 AB 的一端 B 绕 0 点作匀速圆周运动，速

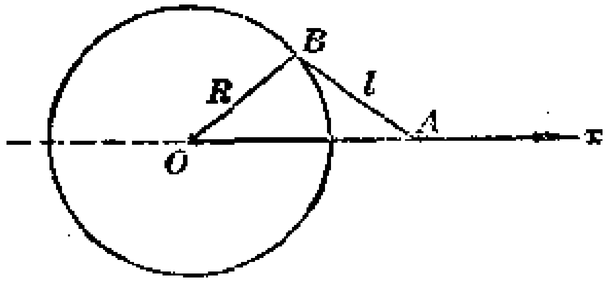


图　8-92

度大小为 v。圆周的半径为 $R=l$，杆的另一端 A 在过 0点的固定直线上运动，如图 8-92 所示。证明 A 端的速度为 $v_A=v\sqrt{1-\frac{x^2}{4R^2}}$，其中 X 为 A 点在横轴上的坐标；并证明 A 端是在作简谐振动。

8-93 一平放的板沿竖直方向作简谐运动，振幅为 5.0 厘米，频率为 $\frac{10}{\pi}$ 秒$^{-1}$。当此板运动到最低处时，轻轻放上一物体。若不计空气阻力，试问：

(1) 在何处物体离开此板？

(2) 物体可升高到距此板最高点多远的地方？

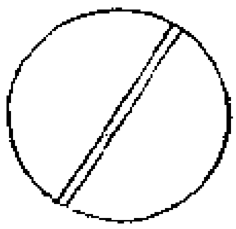
(3) 在何处物体重新回到板上？[提示：用作图法。]

8-94 设想有一直矿井穿过地球中心，一物体从井口跌入这井中，如图 8-94(1)所示。设井内阻力不计，已知地球半径为6370 公里，地球密度为 $\rho=5.5$ 克/厘米^3。

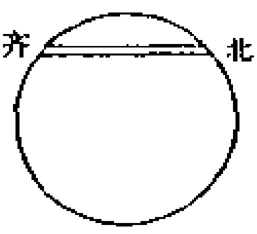
(1) 问此物体在井中作何运动？并求出其周期。

(2) 求物体到达地心时的速度；

(3) 如果这矿井不通过地心，而是由北京到乌鲁木齐一条光滑直隧道，如图 8-94(2) 所示。则当一物体跌入这隧道口后作何运动？用多少时间到达乌鲁木齐地面？设运动中不计阻力，不计两地海拔之差，并不考虑地球自转。



(1)



(2)

图 8-94

8-95 一单摆摆长为 $l=100$ 厘米，摆球质量为 $m=10.0$ 克。小球处在平衡位置静止不动，以向右方向为正。

(1) 在 $t=0$ 时给小球一水平向左的冲量 $I=10.0$ 达因·秒，求小球摆动的最大摆角及初周相；

(2) 若冲量是向右的，其初周相及最大摆角又是多少？

8-96 一单摆长为 $l=100$ 厘米，摆球质量为 $m=10.0$ 克，作振幅为 $\frac{1}{100}$ 弧度的振动。当摆向右运动到距平衡位置 $\frac{1}{200}$ 弧度的时候，加一个与摆运动方向相反的冲量 $I=\frac{1}{2}(\sqrt{3}-1)\sqrt{g}$ 达因·秒，如取这一时刻为 $t=0$，写出以后摆运动的表达式。

8-97 一个不计质量的弹簧，倔强系数为 k，两端分别系上质量为 m 和 M 的小物体，放在光滑水平面上。把弹簧-质点系压缩一段长度 l 后撒手，令其自己振动，求振动周期。

8-98 两个质量分别为 $\frac{3}{4}M$ 和 M 的物体，分别固定在一自由长度为 L、倔强系数为 k 的弹簧两端，在一无摩擦的水平桌面上静止地放着；一质量为 $\frac{M}{4}$ 的物体以速度 v 沿两物体质心的连线方向运动，与质量为 $\frac{3}{4}M$ 的质点作对心碰撞并与其粘合在一起。设弹簧的质量可忽略不计，求弹簧振动的振幅和周期。并说明此后弹簧怎样运动。

8-99 一半径为 $r=5.00$ 厘米的均匀金属球与一长为 $l=25.0$ 厘米、质量可略去不计的轻金属杆组成的复摆，如把这单摆当作质点集中在球心的单摆，问其周期的相对误差是多少？

8-100 一弹簧下悬一薄板 A，薄板的表面与地面垂直，如图 8-100 所示。板在空气中的振动周期为 T_1。再把它放入液体

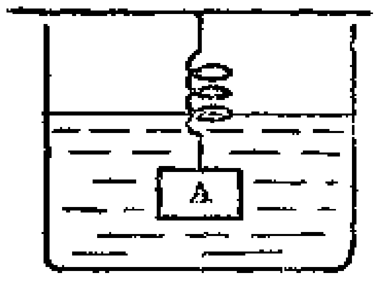


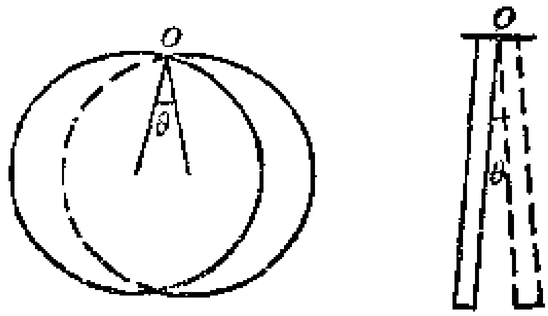
图 8-100

中振动，此时周期为 T_2。设薄板质量为 m，表面积为 S，忽略空气的阻力。液体的粘滞阻力为 $f_{粘}=2S\eta v$，v 为运动速度。求液体的粘滞系数 η。

8-101 一半径为 R 的刚性圆盘，质量均匀分布，在盘边装有一质量、大小、摩擦均可略去不计的小环，一水平钢丝穿过这小环为轴 O，轴 O 垂直于盘面，盘绕轴作小角度的振动，如图 8-101(1)。

(1) 求振动周期 T_1 与将此圆盘拧过 90°，即绕与上轴垂直的水平轴作小振动的周期 T_2[如图 8-101(2)]之比。

(2) 如果在第一种悬挂情况下平行地移动转动轴而使其周期等于 T_2，摆的轴线应改到什么地方？



(1) (2)

图 8-101

8-102 如图 8-102 所示，一绝热密封容器中间有一活塞 b，质量 $m=1.5$ 千克，当活塞处于中间时，两边空气的压强都等于一个标准大气压 P_0，两边长度均为 $l=20$ 厘米，活塞面积为 $S=100$ 厘米^2。若不计摩擦，求活塞作微小振动时的振动周期。已知空气的定压比热与定容比热之比为 $\gamma=1.40$。

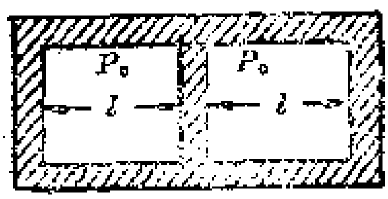


图 8-102

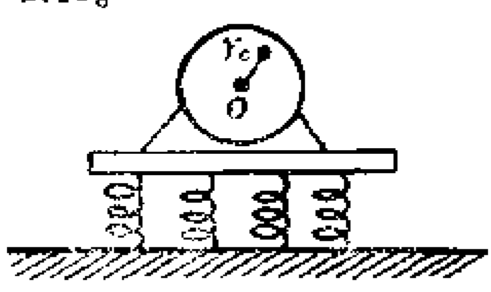


图 8-103

8-103 一质量为 $m=50$ 公斤的电机放在一弹簧机座上，其自由振动的圆频率为 w_0，其示意图如图 8-103 所示。如电机的质心偏离转轴中心线为 $r_c=0.30$ 厘米，电机转动角速度为 $\omega=1500$ 转/分，弹簧系统振动时阻力正比于运动速度，比例系数为 $\alpha=5.0\times10^4$ 达因·秒/厘米。设电机只在竖直方向振动。问在发生共振的情况下电机振动的振幅为多大？由此结果，可以得到什么结论？

8-104 证明：一振动系统在两个外力 $F_1(t)$ 和 $F_2(t)$ 同时作用下作受迫振动，其效果等于该系统分别在 $F_1(t)$ 和 $F_2(t)$ 作用下所作受迫振动的叠加。

第九章　机　械　波

§1. 机　械　波

9-1　一平面简谐波的表达式为$S_1=A\cos\left[\omega\left(t-\frac{x}{v}\right)+\varphi_0\right]$。试问：

(1) $\frac{x}{v}$表示什么？

(2) φ_0表示什么？

(3) 如把它写成$S_1=A\cos\left[\omega t-\frac{\omega x}{v}+\varphi_0\right]$；则$\frac{\omega x}{v}$表示什么？

(4) 如果把它写成$S_1=A\cos(\omega t-kx+\varphi_0)$；则$k$表示什么？

(5) 另一个波的表达式为$S_2=A\cos\left[\omega\left(t+\frac{x}{v}\right)+\varphi_0\right]$；$S_2$与$S_1$有何区别？

(6) 再一个波的表达式为$S_3=A\sin\left[\omega\left(t-\frac{x}{v}\right)+\varphi_0\right]$；$S_3$与$S_1$有何区别？

(7) 用周期T代替ω表示S_1；

(8) 用频率ν代替ω表示S_1；

(9) 用波长λ代替ω和v表示S_1。

9-2　在平面简谐波的传播方向的一条波线上，A、B、C、D各点离波源分别为$\frac{1}{4}\lambda$、$\frac{2}{4}\lambda$、$\frac{3}{4}\lambda$、λ。设振源的振动为

$$S = A\cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right),$$

振动周期为 T，试问：

（1）各处质点开始振动的时间比振源落后多少？

（2）它们与振源的振动周相差各是多少？

（3）$t=T/4$ 时，各处质点离平衡位置的位移为多少？

（4）$t=T/2$ 时，各处质点的振动速度为多少？

9-3 在波的传播路程上有 A、B 两点，媒质的质点都作简谐振动，B点的周相比 A 点落后 30°。已知 A、B 之间的距离为 2.0 厘米，振动周期为 2.0 秒。求波速 v 和波长 λ。

9-4 某简谐波波长为 10 米，传至 A 处引起 A 处质点振动，振动周期为 0.20 秒，振幅为 0.50 厘米。试问：

（1）波的传播速度 v 是多少？

（2）质点经过平衡位置时的运动速度$\frac{dS}{dt}$是多少？

9-5 一平面波的表达式为 $S=a\cos(bt-cx)$，

（1）指出它的振幅、角频率、周期、波长、频率和波速；

（2）如 $S=20\cos\pi(2.5t-0.01x)$ 厘米，算出上述各物理量的数值。

9-6 平面简谐波的振幅为 1.0 厘米，频率为 100 赫兹，波速为 400 米/秒。以波源处的质点经平衡位置向正方向运动时作为时间起点，求距波源 800 厘米处媒质质点振动的表达式。

9-7 图 9-7 所示为一沿 x 正方向传播的平面简谐波，波速为 $v=5.00$ 厘米/秒，周期为 $T=2.00$ 秒，振幅为 $A_0=2.0$ 厘米。$x=10$ 厘米处一点 A 在 $t=3.0$ 秒时 $S_A=0$，$\left(\frac{dS}{dt}\right)>0$；求 $t=5.0$ 秒时，$x=0$ 处的位移 S_{05} 和速度 $\left(\frac{dS}{dt}\right)_{05}$。

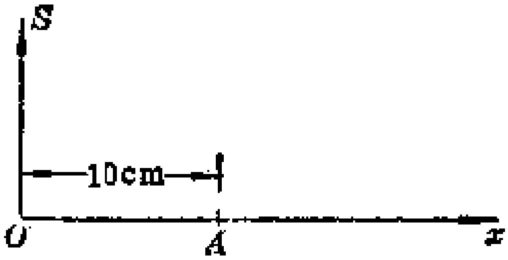


图 9-7

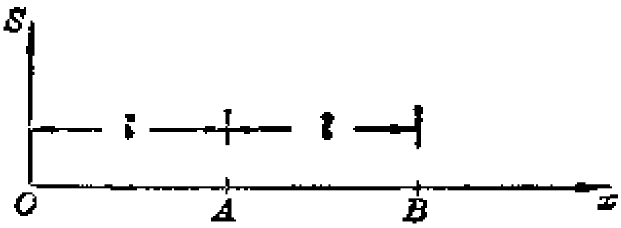


图 9-8

9-8 一平面简谐波向正 x 方向传播，如图 9-8 所示。0 点为振源，已知 $0A=AB=l=10$ 厘米，振幅为 10 厘米，角频率 $\omega=7\pi$ 秒$^{-1}$。当 $t=1.0$秒时，A 处质点的振动状况为 $S_A=0$、$\left(\dfrac{dS}{dt}\right)_A<0$；$B$ 处质点 $S_B=5.0$ 厘米、$\left(\dfrac{dS}{dt}\right)_B>0$。设波长 $\lambda<l$，求波的表达式。

9-9 一个平面简谐波表达式为

$y=A\sin\left[\omega t-\dfrac{2\pi x}{\lambda}+\varphi_0\right]$，分别作 y-t 图和 y-x 图，并说明两个图的物理意义。又某时刻的$y(x)$图如图 9-9 所示. 是否表示在 x_1——x_2 区间内媒质质点的运动是向 y 增加方向？

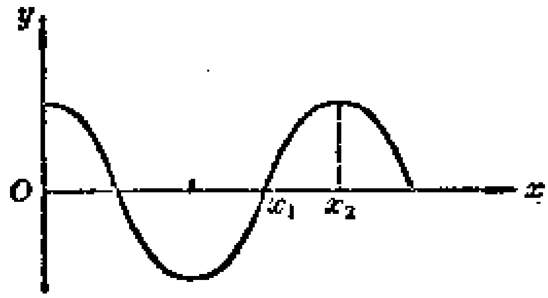


图 9-9

9-10 图 9-10 所示为一沿 x 轴方向传播的平面简谐波在 $t=0$ 时刻的 S-x 曲线。

(1) 问原点 O 和 1、2、3、4 等点振动的初周相各是多少？

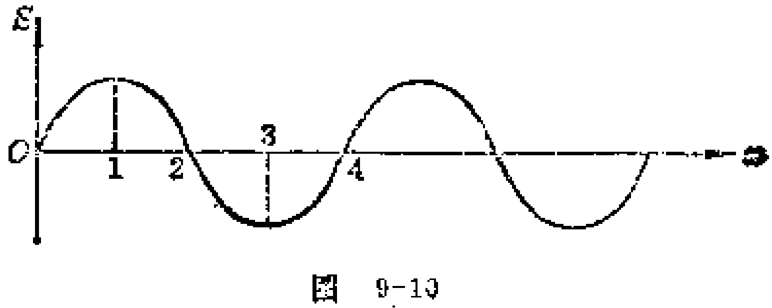


图 9-10

(2) 如果波的传播方向是逆着 x 轴方向，问这些点的初周相各是多少?

9-11 证明：简谐波传播空间中的任一小块媒质中，波的动能与势能相等。

9-12 两个不同的音叉在完全相同的两段绳上产生稳定的简谐波，振幅为$A_1=2A_2$，波长为$\lambda_1=\frac{1}{2}\lambda_2$。设绳子除与音叉外不与其他物体交换能量。求两音叉给予绳子的功率之比$\frac{P_1}{P_2}$。

9-13 证明：在各向同性的均匀媒质中，略去媒质的吸收，球面波的振幅与离波源的距离 r 成反比。($r\neq0$。)

9-14 一正弦式空气波，沿直径为 14 厘米的圆柱形管子的轴向传播，波的平均强度为 9.0 尔格/秒·厘米²，频率为 300 赫兹，波速为 300 米/秒。试问：

(1) 波中的平均能量密度和最大能量密度各是多少?

(2) 每两个相邻同周相面间的区域中含有多少能量?

9-15 如机械波的能量在传播过程中不断被媒质吸收，因而波往前传播时振幅逐渐减小。有一平面简谐波的表达式为$S=Ae^{-\alpha x}\cos\omega\left(t-\frac{x}{v}\right)$，$\alpha$是一个正的实数。证明其平均能量密度$\overline{\varepsilon_x}$随 x 的变化为：

$$\overline{\varepsilon_x}=\overline{\varepsilon_0}e^{-2\alpha x}$$

其中$\overline{\varepsilon_0}$为 $x=0$ 处的平均能量密度。

9-16 地震发生后，有一部分波沿地面传播，叫做面波。地震面波震级 M_S 的定义为：距震中一定距离处，表面波的振幅与周期之比$\frac{A}{T}$与另一标准地震($M_S=0$)的振幅与周期之比$\frac{A_0}{T_0}$的比值的常用对数值，即：

$$M_S=\lg\frac{\frac{A}{T}}{\frac{A_0}{T_0}}。$$

证明：在此定义下，地震所释放的能量 E 与震级的关系为：$\lg E=2M_S+C_0$，式中 C_0 是一个常数。

9-17 波遇到两种媒质的界面时发生反射，设入射波与反射波的振动方向不变。如果入射波是一纵波，要使反射波是一横波，设纵波在媒质中的传播速度是横波传播速度的 $\sqrt{3}$ 倍。问入射角为多少？

9-18 两正弦波向同一方向前进，波速分别为 v_1 和 v_2，波长分别为 λ_1 和 λ_2，试求：

（1）对应于这两个波，其振动具有相同周相之各点在空间的移动速度 u；

（2）相邻两个上述点之间的距离 D；

（3）由上得到，如果 $v_1\approx v_2$、$\lambda_1\approx\lambda_2$，则 $u=v-\lambda\frac{dv}{d\lambda}$ 即群速度；

（4）由此证明拍频的频率为两个频率之差。

9-19 证明：在一细绳中传播的横波速度为 $v=\sqrt{\frac{T}{\mu}}$，其中 T 为绳中的张力，μ 为单位长度绳子的质量。

9-20 如图9-20所示，媒质中两相干简谐点波源 A、B 相距为30米，振幅相等，频率均为100赫兹，周相差为 π，波的传播速度是400米/秒。求 A、B 间连线上因干涉而静止的点的位置。

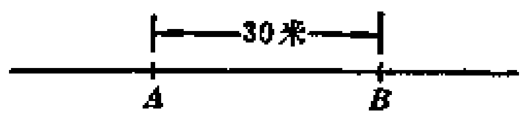


图 9-20

9-21 P 点与两振源 A、B 等距，相对位置如图 9-21 所示. A、B 的振动方向相同，自 A、B 两发出的两简谐波，频率都是 100 赫

兹，周相差为 π，媒质中波速为10米/秒，到达P点时，振幅都是5.0厘米。

(1) 求P点振动的表达式；

(2) 若A、B的周相差为0，则又如何？

(3) 若A、B的周相差为$\frac{\pi}{2}$，则又如何？

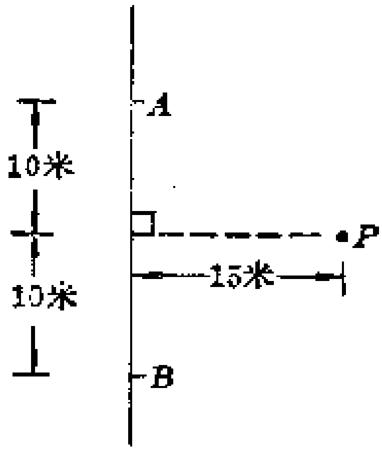


图 9-21

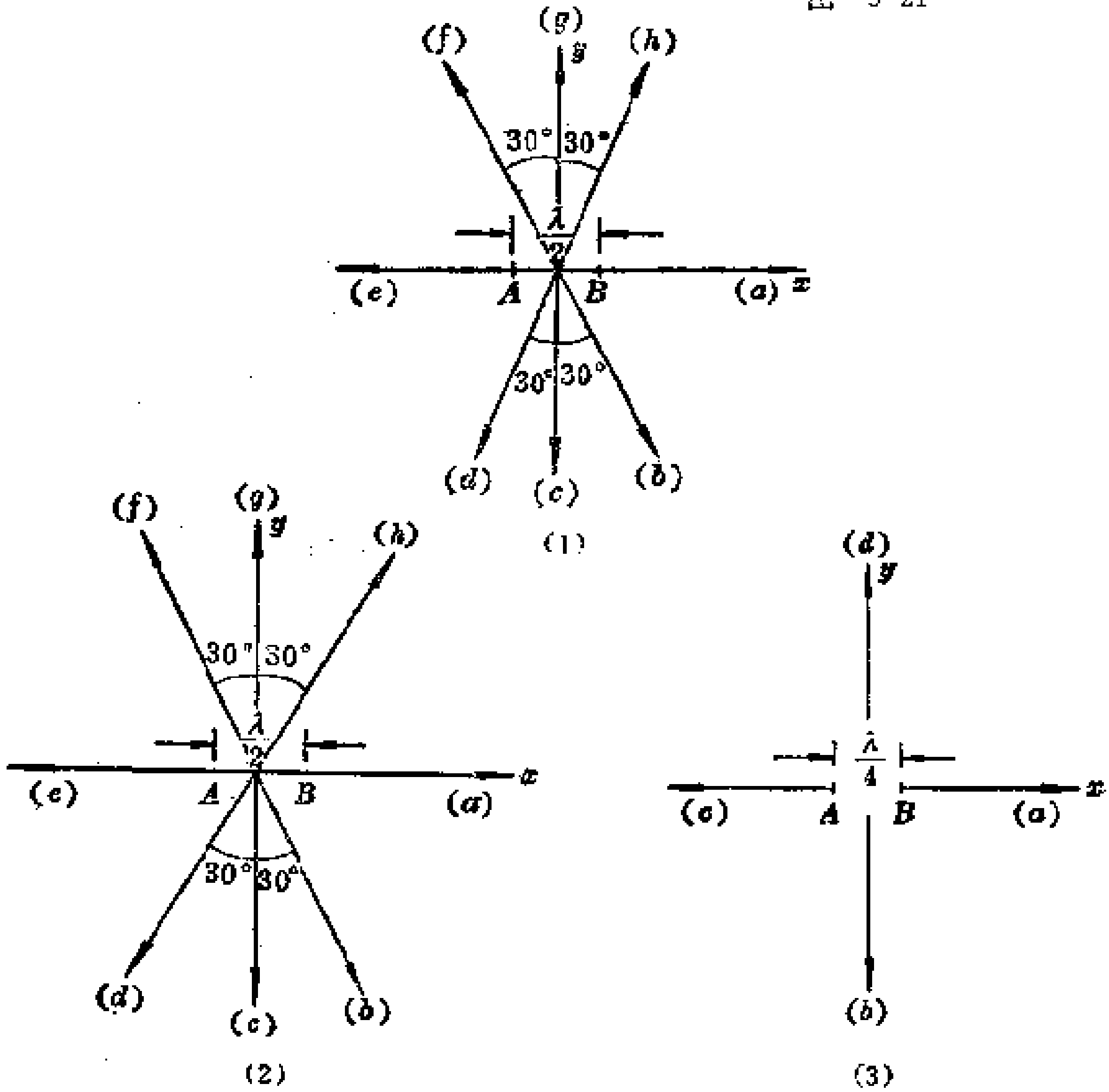


图 9-22

9-22 A、B 为在垂直于 x-y 面的方向作振动的相干简谐波源。设 A、B 的振幅相同，若原来 A 或 B 一个波的强度为 I_0. 试求下列三种情况下在距离≫波长 λ 处，各方向(a、b、c、d、e、f、g、h)上波的强度 I，

(1) A、B 相距为$\frac{\lambda}{2}$，同周相，如图 9-22(1)所示；

(2) A、B 相距为$\frac{\lambda}{2}$，反周相，如图 9-22(2)所示；

(3) A、B 相距为$\frac{\lambda}{4}$，B 周相落后$\frac{\pi}{2}$，如图 9-22(3)所示。

这实际上就是波定向发射的基本原理。

9-23 弦上一驻波中相邻两节点的距离为 65 厘米，弦的振动频率为 $\nu=2.3\times10^2$ 赫兹。求波的传播速度 v 和波长 λ。

9-24 说明驻波的能量在相邻波节与波腹之间来回传输，其能量振动的周期为驻波振动周期的一半。画图说明当振动达到最大振幅时能量集中在波节位置附近，当振动经过平衡位置时，能量集中在波腹的位置附近。

9-25 设入射波方程为 $y_1=A\sin\left(\omega t+\frac{2\pi x}{\lambda}\right)$，在 $x=0$ 处反射。在下述两种情况下，求当没有衰减情时合成的驻波方程，并说明何处是波腹？何处是波节？

(1) 反射端是自由端；

(2) 反射端是固定的。

9-26 如图 9-26 所示，一平面简谐波沿 x 方向传播，BC 为波密媒质的反射面，波由 P 点反射，$OP=\frac{3}{4}\lambda$，$DP=\frac{1}{6}\lambda$。$t=0$ 时，O 处质元由平衡点向正方向运动。求 D 点的入射波与反射波的合振动方程。设反射后波不衰减。

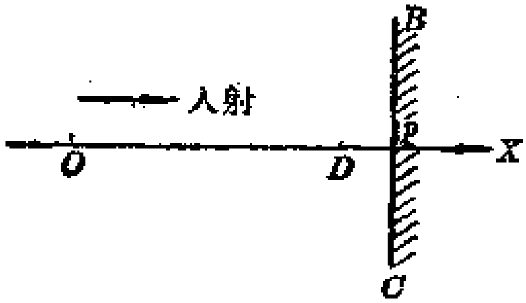


图 9-26

图 9-27

9-27 海城地震时在锦州接收到直达P波（纵波）的周期为1.00秒，在丹东接收到直达P波的周期为1.80秒，设锦州、丹东与海城在同一条直线上并位于海城的两边，如图9-27所示。求震源错动（认为地震的发生是震源处岩层的相对运动）速度在三城联线方向的分量及方向。假定震源为一点源。已知直达P波速度为6.3公里/秒。

9-28 一机车汽笛频率为650赫兹。机车以时速54公里驶向观察者，问观察者听到的声音频率是多少？设空气中声速为340米/秒。

9-29 甲火车以43.2公里/小时的速度行驶，其上一乘客听到对面驶来的乙火车鸣笛声的频率为$\nu_1=512$赫兹；当这一火车过后，听其鸣笛声的频率为$\nu_2=428$赫兹。求乙火车上的人听到乙火车鸣笛的频率ν_0和乙火车对于地面的速度u。设空气中声波的速度为340米/秒。

§2. 声学振动

9-30 设声波在空气中的传播是绝热的。证明：空气中声速与压强无关。

9-31 在30.0°C温度下用驻波法测空气中的声速，测得两波节之间距离为11.67厘米，使用的音叉的频率为1500赫兹。问这个结果与绝热传播声速的理论值比较，百分差是多少？空气的分子量为28.98，气体常数$R=8.3144\times10^7$尔格/摩·开，空气的定压比

热与定容比热之比为 $\gamma=1.400$。

9-32 求声波在气体中的传播速率与气体分子平均速率之比。考虑常温下的情况。考虑双原子分子气体和单原子分子气体。

9-33 在室温(20°C)附近，空气中声速随温度的变化式可近似地表为 $v=v_{20}(1+\alpha t)$，求 α。

9-34 声音由地面竖直往上传播。若地面的温度为16°C，竖直方向上地面大气层的温度梯度为 $\frac{dT}{dZ}=-0.007$°C/米。问声音传到10公里高需多少时间？已知空气的平均克分子量为28.98克，定压比热 c_p 与定容比热 c_v 之比 $\frac{c_p}{c_v}=1.40$。

9-35 水中声速为1450米/秒，求水的绝热压缩系数 β。

9-36 一两端固定的棒，长为 $l=1.00$ 米，摩擦时发声频率为 $\nu_0=700$ 秒$^{-1}$，求棒中声速。并说明可能有那些泛音？

9-37 用孔脱管测声速的装置如图9-37所示。一金属棒长为 $L=60$ 厘米，中点固定。管中放有锯末。振动后在管中的锯末形成疏密相间的分布，两堆锯末之间的距离为 $a=6.0$ 厘米。设此时空气的温度为20°C，求棒中的声速。

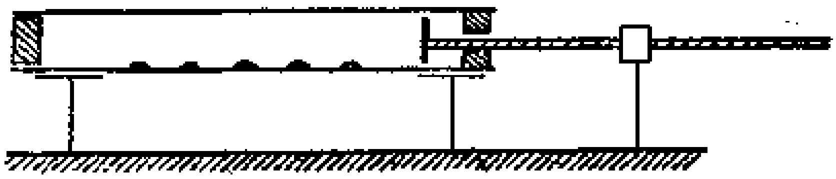


图 9-37

9-38 火车离站时鸣笛，一工人从铁轨上听见车声3.0秒以后再听见笛声，问此工人距站多远？设铁轨是笔直的，已知钢的杨氏模量 $E=2.0\times10^{12}$ 达因/厘米^2，密度为 $\rho=7.8$ 克/厘米^3；空气中声速为334米/秒。

9-39 媒质的波阻定义为 $z=\rho v$，即媒质密度 ρ 与波速 v 的乘

积。求下列媒质中的声阻：

（1）20°C 和标准大气压下的干空气；

（2）水，水中声速为 1450 米/秒；

（3）钢，$\rho=7.8$ 克/厘米^3，杨氏模量 $E=2.0\times10^{12}$ 达因/厘米^2；

（4）4.1K 的液氦。$\rho=0.125$ 克/厘米^3，压缩系数 $\beta=1.5\times10^{-2}$ 厘米^2/公斤。

9-40 （1）证明：媒质中传播声波时，声压的幅值 p（指压强改变的最大值）与媒质质点的最大位移 s_m 之间有下列关系：

$$p=k\rho v^2 s_m$$

从而导出 $p=\rho v\dot{s}_m$，式中 v 为波速，ρ 为媒质密度，$\dot{s}_m$ 为媒质质点的速度振幅，$k=\dfrac{2\pi}{\lambda}$，λ 为波长。

（2）根据上述结果计算：如一般人耳可闻的最小的压强幅值为 0.0002 达因/厘米^2，则对空气中传播的频率为 $\nu=1000$ 赫兹的声波，耳膜能感受的振动位移为多少？

（3）此时耳膜的最大振动速度为多少？

（4）如在 $\nu=1000$ 赫兹时，压强幅值达到 1000 达因/厘米^2 时就会引起耳膜的痛感，问这时耳膜的振幅为多少？

9-41 证明：在任何一个传播着的声波中，每一处压强的相对改变量 $\dfrac{\Delta p}{p}$ 等于该处声波传播速度 v 与质点振动速度 μ 之比乘 $\gamma\left(\gamma=\dfrac{c_p}{c_v}\right)$，$c_p$ 是定压比热，c_v 是定容比热。

9-42 声波在温度为 27°C、压强为一个大气压的空气中传播，其最大压强幅为 9000 达因/厘米^2。求最大压力处的温度。

9-43 有两个平面声波，s_1 在空气中传播，s_2 在水中传播。已

知空气中声速为 340 米/秒，水中声速为 1450 米/秒。

(1) 若这两个波的强度相等，问它们的压力振幅之比 p_1/p_2 是多少？

(2) 若这两个波的压力振幅相等，问它们的强度之比 I_1/I_2 是多少？

9-44 由许多独立的声源发出的声波强度是各个声源所发出的声波强度的叠加。试问：

(1) 两个小提琴同时演奏时，声波的强度比单独一个演奏时增加多少？

(2) 设一个小提琴的强度是 40 分贝，多少个这种小提琴同时演奏才可使强度增到 80 分贝？

9-45 声波中压强变化的振幅为 $p=100$ 达因/厘米^{2}时已是很响的声音了。问这种声音一秒钟内进入人耳的能量为多少？已知声速 $v=334$ 米/秒，空气密度为 1.29×10^{-3} 克/厘米^3，耳膜面积约为 4.0 厘米^2。

9-46 如果距一不大的声源 100 米处空气的压力幅为 0.9 达因/厘米^2。问在各方向声强都一样并不计衰减的条件下，这声源的总功率为多少？已知空气的声阻为 41 克/厘米^2·秒。

9-47 距声源 20 米处声强为 0.03 尔格/厘米^2·秒。声波的衰减系数为 5×10^{-5} 厘米$^{-1}$，问距声源 100 米处声强为多少？

9-48 声的吸收系数 α 定义为声波反射时能量的损失率。设声波于一秒钟内在室内反射的次数为 $n=\dfrac{vS}{4V}$，式中 v 是声速，S 和 V 分别是室的内面积和体积。试问：

(1) 在一个 $6.0\times10.0\times4.3$ 米^3 的密闭空屋内谈话，声音的强度降为百万分之一需多少时间？设 $\alpha=0.018$，$v=340$ 米/秒；