

静止粒子，碰撞后，入射粒子的运动方向偏转了 90° ，速率减小为 $\frac{4}{9}V_0$ ，

- (1) 求碰撞后靶粒子在实验室坐标系中的速度；
- (2) 在质心坐标系中描述此碰撞过程，并求出粒子在此坐标系中的散射角；
- (3) 在碰撞过程中能量守恒吗？
- (4) 相对于运动粒子的初始轨道上与靶粒子距离为 d 的一点 O ，系统的角动量守恒吗？

5-98 一个质子从远处射向一个带电量为 Ze 的重核，但没有描准，偏离了一个距离 b (b 叫做散射参量)，如图 5-98 所示。质子的动能为 $\frac{1}{2}M_p v_0^2$ ，重核的质量非常大，可以略去其反冲能量，即可以把重核当作是静止的。求质子能接近重核的最短距离 S 。

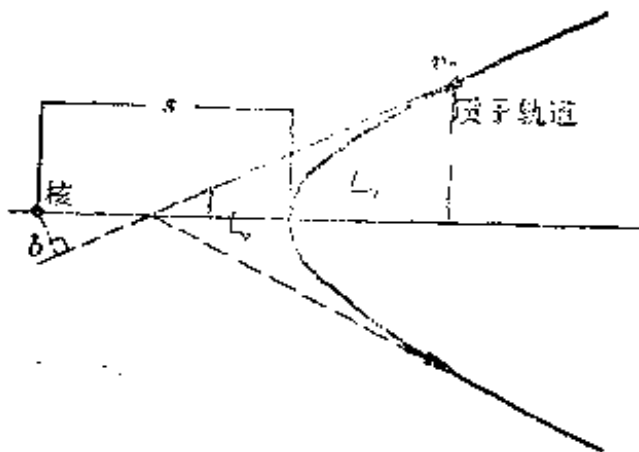


图 5-98

- 5-99** (1) 一陀螺，旋转方向如图 5-99 所示，其转轴与竖直方向夹角为 θ ，说明陀螺进动的方向；
- (2) 若陀螺为重 W 、底半径为 r 、高为 h 的圆锥体，求其进动周期。

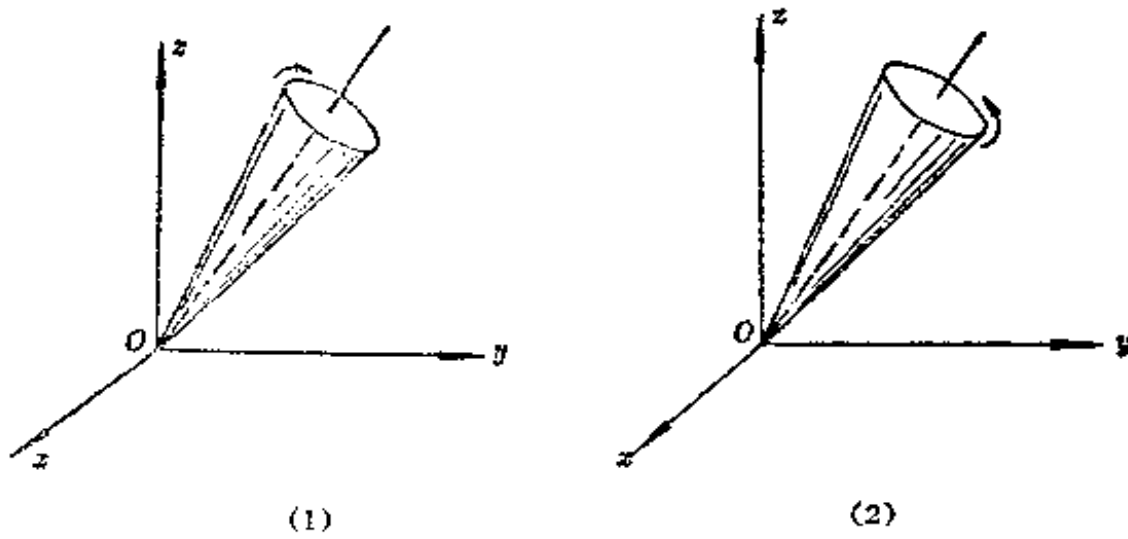


图 5-99

第六章 万有引力

6-1 有人说：“质量为 M 的物体作用在它外面任一质点 P 上的万有引力，等于把该物体的全部质量 M 都集中到它的质心 c 上形成的一个质点作用在 P 上的万有引力。”你能否证明他的说法是正确的还是错误的？

6-2 在卡文迪许测量万有引力常数的实验中，如图 6-2 所示，每个大球质量为 2.0 公斤，每个小球的质量为 20 克，连接两小球的杆长 20 厘米，小球球心与邻近的大球球心间的距离为 5 厘米，悬丝的扭转常数为 5.0×10^{-8} 米·牛/弧度，悬丝偏转角由离它 5.0 米远的标尺上的反射光斑的位移推算。

当两个大球由它们的初始位置移到另一位置（如图中虚线所示的位置）时，观察到光斑移动了 8 厘米。设光线入射角很小。

(1) 忽略较远处大球对小球的影响，根据给出的数据计算万有引力常数 G 的数值；

(2) 如果考虑较远的那个大球的影响，估算(1)的结果所需的修正。

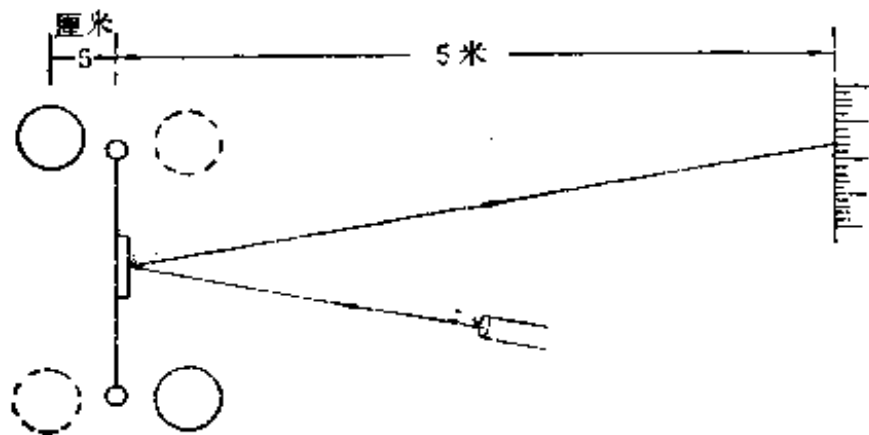


图 6-2

6-3 一宇航员降落在某一行星上，测得该星体的半径为地球半径的 0.71 倍，该行星表面上一长为 $l=1.00$ 米的单摆周期为 2.51 秒。问这个行星的质量是多少？

6-4 不计地球大气的阻力，计算星际空间一质点在地球万有引力作用下，自无穷远处由静止出发，落到地球表面时的速度。（注：此速度即第二宇宙速度，地球半径为 6.37×10^3 公里。）

6-5 两个均匀的球形天体，质量相同，半径不同，问哪个天体上的逃逸速度大？

6-6 在海拔为零的地面上有一圆锥形的高山，山顶海拔 1500 米，底边周长为 6000 米，山体岩石的密度为 4.5 克/厘米³。在山脚有一铅锤，设万有引力近似通过高山的质心，估算铅锤线偏离竖直方向的角度。

6-7 根据牛顿第二定律，作用在一个物体上的外力与它产生的加速度之比，叫做该物体的惯性质量；根据万有引力定律，地球吸引该物体的万有引力与该物体的质量成正比，这个质量叫做该物体的引力质量。（1）你觉得这两个质量的概念相同吗？（2）如果你用 m 表示惯性质量，用 m' 表示引力质量，证明：任何两个物体若它们的引力质量与惯性质量之比不相等，即 $\frac{m'_1}{m_1} \neq \frac{m'_2}{m_2}$ ，则它们自由下

落时，加速度便不相等。（3）你能想出一些判定两个物体的引力质量与惯性质量之比是否相等的实验吗？（高度精确的实验证明：任何两个物体，它们的引力质量与惯性质量之比都是相等的。）

6-8 已知月球到地球的距离为 3.84×10^5 公里，月球的质量为 7.35×10^{25} 克，地球的质量为 5.98×10^{27} 克。问地球吸引月球的万有引力是多少？

6-9 月球到地球的距离为 3.84×10^5 公里，地球到太阳的距离为 1.49×10^8 公里，地球的质量为 5.98×10^{27} 克，太阳的质量为

1.99×10^{33} 克。问太阳吸引月球的万有引力是地球吸引月球的万有引力的多少倍？

6-10 若有人把月球轨道的一部分画成如图 6-10 所示的样子，除去比例尺不合适以外，还有一个错误，你能找出来吗？

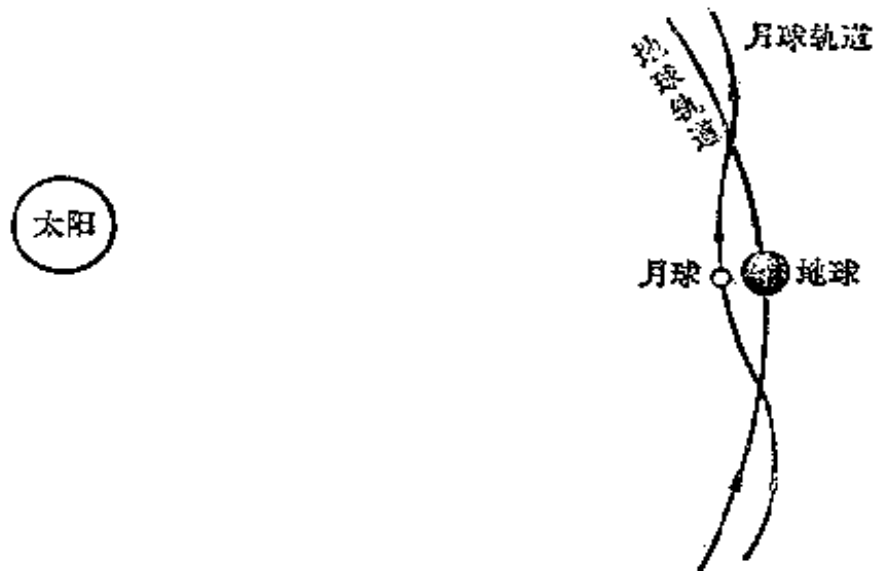


图 6-10

6-11 在地面上，任何物体如果没有东西支持它都会自动向下落，这是由于地球吸引它的万有引力所致。可是有些物体却正好相反，如氢气球、水中的气泡、火焰和烟等，它们都是向上运动的。万有引力适用于它们吗？为什么？

6-12 有人说：“我就不相信地球是圆的。如果地球是圆的，下边的人不就掉下去了吗？那多危险！即使有万有引力吸住他，不掉下去，那人头向下倒吊着也够难受的。”你怎样回答他？

6-13 在地球上看来，太阳和月亮一样，都在星空里自西往东绕地球转，为什么书上都说月亮绕地球转，而太阳却不绕地球转，倒是地球绕太阳转呢？

6-14 地壳上某一板块到地心的距离为 6300 公里。试求：

(1) 若这板块正在黄道面内，正午和午夜太阳作用在这板块单位质量上的万有引力之差；

(2) 月球在该板块的上中天和下中天时作用在这板块单位质量上的万有引力之差。

6-15 若略去空气的影响，计算得地面上抛体的轨道是抛物线，这是因为假定抛体在任何地方，地球对它的引力方向都相同的缘故。实际上，由于地球是圆的，抛体所受的地球引力都指向地心，所以它在不同地方所受地球的引力并不平行。因此，严格说来，略去空气阻力的影响后（如在月球上）抛体的轨道也不是抛物线，你能说出抛体轨道是什么曲线吗？

6-16 牛顿在 1666 年曾进行过月球绕地球运行的计算。但由于当时他所利用的测地术的数据不够精确，因而地球半径及月、地距离的数值不准确，使得计算的结果与实际情况有较大的出入。1671 年一法国天文学家测得地面同一经线上一纬度之间距离的较精确的数值，1675 年英国皇家学会得知该数值，1682 年牛顿用这个数值一度的距离计算了月球到地球的距离，此距离为地球半径的 60 倍。他根据这个新数据，重新计算了月球绕地球运行的向心加速度和地面上物体重力加速度的数值，结果与实际很好地符合，这两个加速度的值恰好和它们到地心的距离的平方成反比。于是证明了牛顿万有引力定律的正确性。

请你根据万有引力定律，由地月距离算出月球绕地球运行的周期，看与实际是否符合？

6-17 已知质子静止质量 $m_p = 1.67 \times 10^{-27}$ 公斤、带电荷 1.6×10^{-19} 库仑。铁原子核里面质子间的距离为 4.0×10^{-15} 米。(1) 计算铁原子核里两质子间的万有引力；(2) 比较质子间的万有引力和库仑斥力的大小。由此你能得到什么启示？

6-18 A 、 B 两个天体，质量分别为 m_1 和 m_2 ，其间距离为 r ，求其中心连线上一质点所受引力为零的点的位置。如果 A 为地球， B 为月球，地月距离约等于地球半径的 60 倍，月球质量约为地

球质量的 $\frac{1}{81}$ ，求地月中心连线上一质点受地月引力之和等于零的位置。

6-19 已知月球的质量约为地球的 $\frac{1}{81}$ ，其直径约为地球直径的 $\frac{3}{11}$ 。略去地球和月球自转的影响，问在地球上重量为 60 公斤的人，在月球上用弹簧秤称得的体重是多少公斤？

6-20 已知地球绕太阳公转的周期约为 365 日，地球到太阳的距离为 $a = 1.49 \times 10^8$ 公里，地球绕太阳公转的轨道可近似当作圆形，求太阳的质量。（万有引力常数 $G = 6.67 \times 10^{-11}$ 牛顿·米²/公斤²。）

6-21 把地球当作一个半径为 $R = 6.37 \times 10^3$ 公里、质量为 $M = 5.98 \times 10^{27}$ 克的均匀球体，略去空气阻力，求贴地表面绕地球飞行的人造卫星的速度 v （叫做第一宇宙速度）、加速度 a 和周期 T 。

6-22 已知万有引力常数为 $G = 6.670 \times 10^{-8}$ 厘米³/克·秒²，地球半径为 6400 公里，地球表面处的重力加速度为 $g = 980$ 厘米/秒²，要使在地球上空环绕地球作圆周运动的人造卫星相对于地面保持不动（这样的卫星叫做同步卫星，是一种很重要的人造地球卫星，现在已广泛用于全球范围内的电视转播和通讯），求这种卫星离地面的高度。

6-23 一人造地球卫星以圆形轨道环绕地球飞行测得它的周期为 $T = 90.0$ 分钟，已知地球的半径为 $R = 6.37 \times 10^3$ 公里，质量为 $M = 5.98 \times 10^{27}$ 克，万有引力常数为 $G = 6.67 \times 10^{-8}$ 厘米³/（克·秒²），求它离地面的高度。

6-24 求证：地球表面上高度为 h 的地方逃逸速度为

$$v = v_2 \sqrt{\frac{R}{R+h}},$$

式中 R 是地球半径， v_2 是地球表面上的逃逸速度，即第二宇宙速度。

6-25 在一半径为 R_0 的无空气的小行星表面上，以 v_0 的速度水平抛一物体使该物体正好在行星表面绕它作圆周运动。

(1) 用 v_0, R_0 表示该行星上的逃逸速度；

(2) 如在该小行星表面上把一物体竖直上抛，达到的最大高度恰好等于该小行星的半径 R_0 。问上抛速度应为多少？当这物体的高度为 $\frac{1}{2}R_0$ 时，它的速度为多少？

(3) 质量为 m 的物体距离该小行星表面为 y 时其位能为多少？设 $y < R_0$ 将答案展成 y 的级数(保留到 y^2 项)；

(4) 如 $y \ll R_0$ ，要使物体从星体表面升到高度 y ，上抛速度应为多少？

6-26 一宇宙飞船到地心的距离等于 10 个地球半径，它内部的物体都处于失重状态，如果忽略太阳引力，问它的加速度的大小是多少？假设这时飞船朝地球飞来，加速度为 a ，方向仍指向地心，问挂在飞船舱顶的弹簧秤下的物体的视重是多少？

6-27 两个质量均为 1.0 克的质点，相距 10 米，开始时相对静止，如果它们之间只有万有引力作用，问它们何时相碰？

6-28 月球上一阿特伍德机，如图 6-28 如图所示。绳子两端挂着物体 A 和 B 。 A 在地球上重 1.0 公斤， B 的质量为 M 。已知月球上的重力加速度为地球上重力加速度的 $1/6$ ， B 在 4.0 秒钟内由静止下降了 9.80 米，问 B 的质量 M 等于多少？(设滑轮和绳子的质量以及滑轮轴承的摩擦力均可不计，绳子长度不变。)

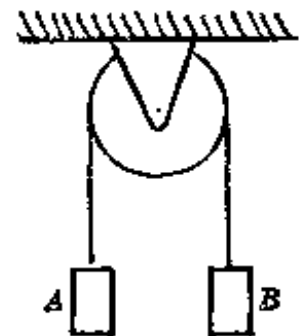


图 6-28

6-29 在地面上重量为 16 公斤的物体，在以 $a = \frac{1}{2}g_0$ (g_0 为

地面处的重力加速度)上升的人造地球卫星里，视重(即该物体与支持物的作用力)为 9.0 公斤。问这时该人造地球卫星离地球多远?

6-30 月球绕地球转，它的一面总是向着地球(即它的自转周期等于公转周期)。如果希望地球上在一个月内看到月球所有的表面一次，月球的角动量必须改变多少?

6-31 已知地球的质量为 5.98×10^{27} 克，月球的质量为 7.35×10^{25} 克，地球的半径为 6.37×10^3 公里，月球到地球的距离为 3.84×10^5 公里，月球绕地球公转的周期为 27.3 天。先把地球当作质量均匀分布的刚性圆球，求出它自转的角动量，再算出月球绕地球公转的角动量。假定我们用力把月球拉到地球上来，月球和地球合在一起成为一个刚体球，半径仍为 6.37×10^3 公里，质量分布均匀，问它的自转周期将是多少?(设月球公转轴与自转轴之间的夹角为 0。)

6-32 已知地球表面的重力加速度为 $g = 981$ 厘米/秒²，地球半径为 $R = 6370$ 公里，万有引力常数为 $G = 6.67 \times 10^{-8}$ 厘米³/克·秒²。求地球质量。

6-33 设 g 为海平面上的重力加速度。把地球看作半径为 R 的均匀球体。问海拔 h 处的重力加速度是多少?

6-34 已知水星的半径为地球半径的 0.40 倍，质量为地球质量的 0.04 倍，求水星表面的重力加速度。

6-35 原来静止在地面上的物体，必须具有多大的竖直向上的初速度 v_0 ，才能上升到等于地球半径的高度?(略去空气阻力。)

6-36 假设有一条穿过地心的平直隧道，一质点由地面落入此隧道，其初速为零，略去空气阻力和地转效应。证明：

(1) 该质点将以地心为平衡点作简谐振动，振动周期与以第一宇宙速度沿地面运行的人造地球卫星的周期相同；

(2) 该质点过地心时的速度等于第一宇宙速度。

6-37 一密度均匀的球形天体，半径为 R ，问它的质量至少为多大时，才能使它的第一宇宙速度大于光在真空中的速度？

6-38 一密度均匀的球形天体，它的质量等于太阳质量， $M = M_{\odot} = 1.98 \times 10^{30}$ 公斤，它的第一宇宙速度大于光在真空中的速度 $C = 3 \times 10^8$ 米/秒，引力常数 $G = 6.67 \times 10^{-11}$ 牛·米²/公斤²，问它的半径最大是多少？

6-39 在目前的天文观测范围内，物质的平均密度为 10^{-30} 克/厘米³。如果认为我们的宇宙是这样一个均匀大球体，其密度使得它的逃逸速度大于光在真空中的速度 C ，因此任何物质都不能脱离宇宙。已知 $G = 6.67 \times 10^{-11}$ 牛·米²/公斤²， $C = 2.9979 \times 10^8$ 米/秒。问宇宙的半径至少有多大？

6-40 逃逸速度(第二宇宙速度)大于真空中光速的天体叫做黑洞。设某黑洞的质量等于太阳的质量 $M = M_{\odot} = 1.98 \times 10^{30}$ 公斤，已知 $G = 6.67 \times 10^{-11}$ 牛·米²/公斤²， $C = 2.9979 \times 10^8$ 米/秒，求它的可能的最大半径(这个半径叫 Schwarzschild 半径)。

6-41 为什么发射人造卫星时必须用火箭把它竖直地送到离地面一定的高度，然后再转向，使其进入运行轨道，而不用大炮直接把人造卫星送入预定的轨道？在这个问题上，除了明显的技术上的困难以外，这样的人造卫星即使能穿出大气层达到第一宇宙速度，它也不能在绕地球的轨道上运行。你能否说明其原因？

6-42 已知地球到太阳的距离为 1.49×10^{11} 米，火星到太阳的距离是 2.28×10^{11} 米，求火星绕太阳公转的周期。

6-43 一行星沿椭圆轨道绕太阳运动，离太阳最近时(距离为 r)速度最大，为 V ；离太阳最远时(距离为 R)速度最小，为 v 。

(1) 证明：
$$\frac{V}{v} = \frac{R}{r}$$

(2) 地球绕太阳公转，在远日点的速度为 2.92×10^6 厘米/秒。已知地球轨道的偏心率为 0.01674，求地球在近日点公转的速度。

6-44 设某行星绕中心天体在圆轨道上运行，公转周期为 T 。用开普勒第三定律证明：一个物体从此轨道由静止落至中心天体所需的时间为 $t = \frac{T}{4\sqrt{2}}$ 。

6-45 (1) 一物体在月球轨道上(距地球 3.84×10^5 公里)，设只受地球引力，由静止开始自由落向地球。不考虑地球大气阻力，求落到地面所需的时间 t 和落地时的速度 v ；

(2) 一物体在地球轨道上(距太阳 1.49×10^8 公里)，设只受太阳引力，由静止开始自由落向太阳，求落到太阳表面所需的时间 T 和到达太阳表面时的速度 V 。(不考虑太阳大气的阻力。)

6-46 哈雷彗星绕日运动的周期为 76 年，估计它的远日点到太阳的距离。

6-47 设有两个人造地球卫星 M_1 和 M_2 ，沿同一椭圆轨道运动，地球中心在这椭圆轨道的一个焦点 P 上。又设 M_1 和 M_2 相距不远，因此，可将椭圆弧 $\widehat{M_1M_2}$ 看作直线，已知直线 M_1M_2 的中点经近地点时 $M_1M_2 = a$ ，近地点到地心的距离为 R_1 ，远地点到地心的距离为 R_2 。求直线 M_1M_2 的中点经远地点时这两卫星的距离，即在远地点处 M_1M_2 等于多少？

6-48 设一彗星在一抛物线轨道上运行，这抛物线与地球轨道相交，两个交点在地球轨道(设为圆形)直径的两端。

(1) 设地球半径为 R_0 ，地球公转速率为 v_0 ，写出此彗星轨道方程，并证明这彗星的最大速率为 $2v_0$ 。

(2) 用开普勒第二定律证明彗星在地球轨道内的时间

为 $\frac{2}{3\pi}$ 年。

6-49 一个宇宙飞船环绕一行星作圆轨道运动，轨道半径为 R_0 ，飞船速率为 v_0 ，一火箭突然点火，给飞船增加了向外的径向速度分量 v_r ($v_r < v_0$)。由此使它的轨道变为椭圆形。

(1) 证明行星作用在该飞船上的引力可写成

$$|F| = \frac{mv_0^2 R_0}{r^2},$$

其中 m 是飞船的质量， r 是飞船到行星中心的距离；

(2) 求出用 R_0 、 v_0 和 v_r 表示的新轨道方程，画出 $v_r = \frac{1}{2}v_0$ 时的轨道草图；

(3) 求新轨道的半长轴 a ，并证明，对于原轨道和新轨道，乘积 Ea 是相同的（其中 E 是总能量）。

6-50 一宇宙飞船环绕一行星作匀速圆周运动，轨道半径为 R_0 ，飞船速率为 v_0 。飞船的火箭发动机突然点火，使飞船的速率 v_0 变到 βv_0 ，加速度方向与速度方向相同。

(1) 求用 R_0 和 β 表示的新轨道方程。证明：当 $\beta < \sqrt{2}$ 时，轨道为椭圆，总能量为负；当 $\beta > \sqrt{2}$ 时，轨道为双曲线，总能量为正；

(2) 在双曲线情形下，设 α 为火箭发动机点火时飞船速度方向与飞船逃逸时速度方向（逃逸时速度方向为飞船离行星无穷远时的速度方向）之间的夹角，求 α 与 β 的关系。画出 $\beta = \sqrt{3}$ 时的草图。

6-51 一人造地球卫星在圆轨道上绕地球飞行，轨道距地面的高度为500公里，在飞行中开动附加火箭，使其速度大小增加10%，而速度方向不变。求新轨道的远地点与地面的距离以及卫星在远地点处的速率。

6-52 宇宙飞船绕一行星作圆轨道飞行，轨道半径为 R ，飞行速率为 v_0 。船长想把轨道改为经过 B 点的椭圆形轨道， B 点距行星中心为 $3R$ 。

(1) 写出这个椭圆轨道的方程。令飞船在 A 点，为了使飞船进入这个椭圆轨道，它的速率必须增加多少？

(2) 从 A 到 B 的航程要用多少时间？

(3) 求飞船的位矢 $r \perp AB$ 时速度的径向分量和切向分量 \dot{r} 和 v_{\perp} 。

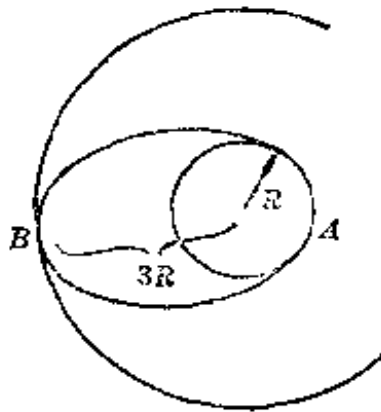


图 6-52

6-53 一个质点绕力心作椭圆运动， P_1 、 P_2 为过椭圆中心 O 的直径的两端点， v_{p1} 、 v_{p2} 分别为质点在此两端点处的速率。求证： $v_{p1}v_{p2} = \text{常数}$ 。

第七章 刚体力学

§ 1. 刚体的静力平衡

7-1 有人说：如果作用在一个物体上的合外力为零，则该物体所处的状态与不受外力时完全一样。你认为他说的对不对？为什么？
外力不为零时物体运动

7-2 力 $F = 30i + 40j$ 牛，作用在 $r = 8i + 6j$ 米处的一点上。试求：

- (1) 力 F 绕原点的力矩 L ；
- (2) 力臂 d ；
- (3) 力 F 垂直于 r 的分量 F_{\perp} 。

7-3 一条均匀的细棒 AB 重 $P = 10$ 公斤，水平地放置，其上各处所受力 F_1, F_2, F_3, F_4 的大小和方向如图所示。各力都在一竖直平面内。试求：

- (1) 各力对于与 AB 垂直的水平轴 O 的力矩；
- (2) 这些力对于轴 O 的合力矩；
- (3) 要使 AB 维持平衡，在 B 点应加一个多大的垂直向下的力 F_5 ？轴 O 固定。

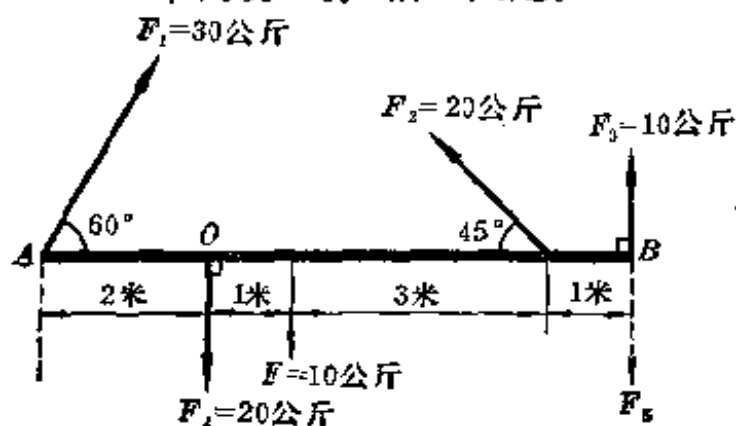


图 7-3

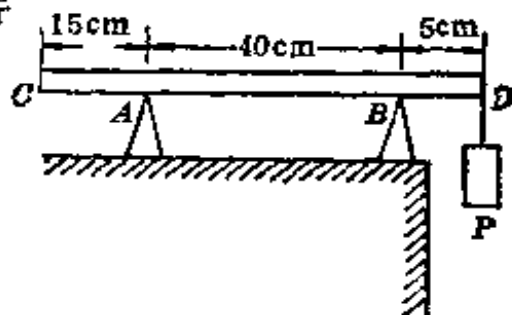


图 7-4

(4) 这时轴 O 所受力 F 的大小和方向如何?

7-4 一长 60 厘米、重 800 克的均匀横梁 CD 架在两个同样高度的刃口 A 和 B 上, 在 D 端吊一个 400 克重的物体 P , 如图 7-4 所示。求两刃口所受梁的压力 P_A 和 P_B 。

7-5 一手刹车如图 7-5 所示。 O 点是一固定的轴 (与纸面垂直), A 点连接一水平的制动杆, 在把手 B 上施一水平的力 $F=30$ 公斤。当刹住车时, 把手从竖直方向转过 5° , 制动杆仍保持水平, 求这时的制动力 f 。

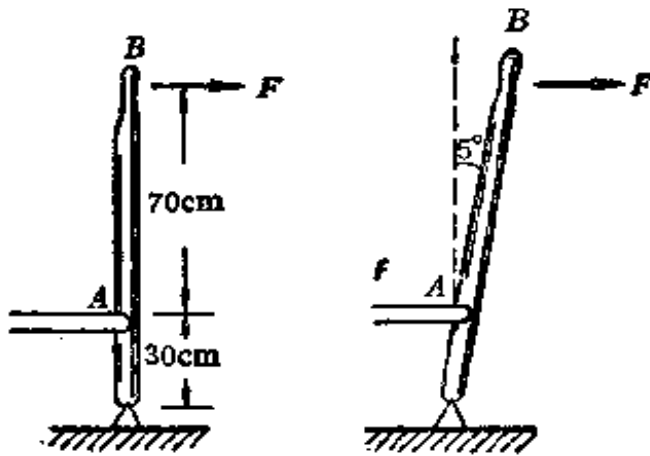


图 7-5

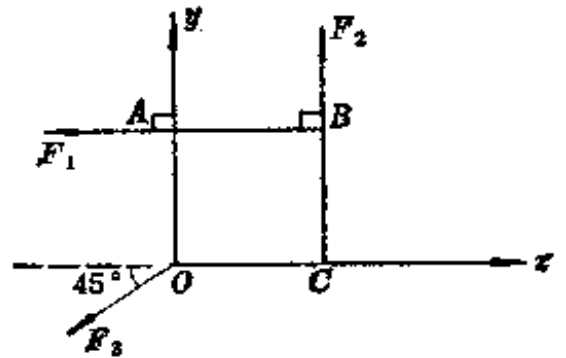


图 7-6

7-6 一块边长为 a 的均匀正方形木板漂在水面上, 它的三个角 O 、 A 、 B 上都受水平力作用, 力的大小都是 1.0 公斤, 方向分别如图 7-6 中 F_1 、 F_2 、 F_3 所示。木板与水面之间的摩擦力可略去不计。若要使这木板稳定不动, 问应在木板的沿 x 轴的边 OC 上何处作用一多大的力? 其方向如何?

7-7 一根均匀的细杆长为 l 、质量为 2.0 公斤, 一端可绕壁上的固定水平轴 O 旋转, 另一端吊一个 $m=10$ 公斤的物体, 并有一根水平的绳子拉着。绳的质量忽略不计。平衡时杆与竖直的墙壁成 60° 角, 如图 7-7(1) 所示。试求:

- (1) 绳子张力 T_1 的大小;
- (2) 如果水平绳子不是系在端点, 而是系在杆的中点,

如图 7-7(2)所示，绳中张力 T_2 的大小。

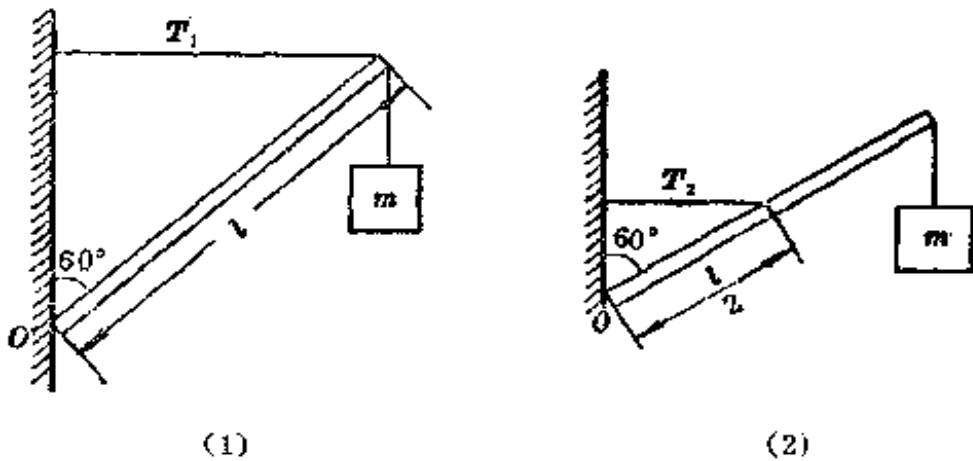


图 7-7

7-8 一个重 100 公斤的人坐在一架重量为 10 公斤、两边对称并均匀分布的木制人字形梯子顶部。梯子顶角为 30° 、每边长 3.0 米，在正中间用一根水平的绳子相联接，如图 7-8(1)所示。梯子与地面之间的摩擦力可略去不计。试问：

(1) 绳子中的张力 T_1 为多大？

(2) 如绳子的位置靠下一些，如图 7-8(2)所示，则绳子中的张力 T_2 为多大？

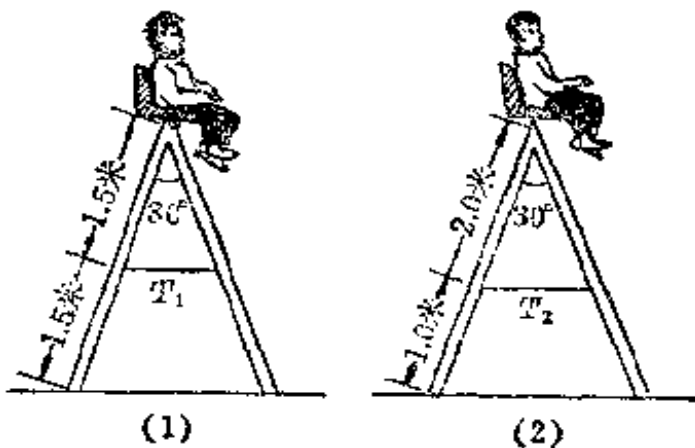


图 7-8

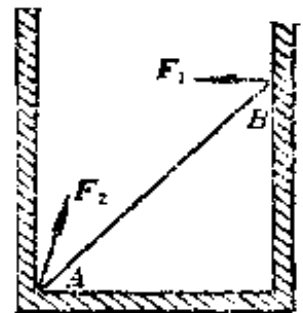


图 7-9

7-9 如图 7-9 所示，一根均匀的细木棒 AB 放在光滑的圆柱形玻璃杯中，杯的直径为 10 厘米，棒长 15 厘米、重 50 克。求杯壁对木棒的作用力 F_1 和 F_2 。

7-10 如图 7-10 所示，一重量均匀分布的 10 公斤梯子，等分为二十级，以 60° 的倾斜度架在一面光滑的竖直墙上。当一个体重为 60 公斤的人沿梯子向上很慢地爬到第十五级时，梯子开始滑动，求此时地面给予梯子的摩擦力 f 为多大？

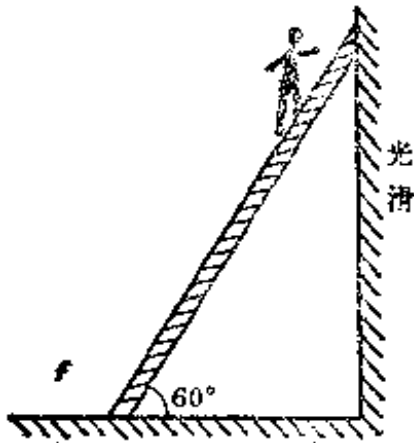


图 7-10

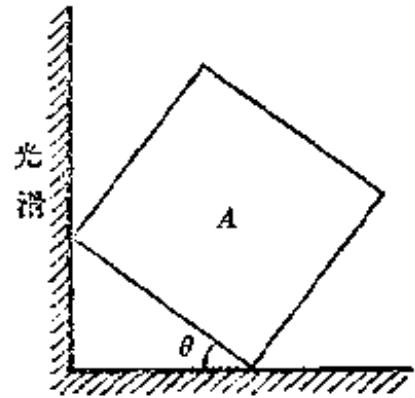


图 7-11

7-11 一质量为 M 的均匀正立方体 A 斜靠在光滑的竖直墙上。 A 与地面之间的摩擦力刚好足以阻止它滑动。求 μ 与 θ 的关系， μ 是 A 与地面之间的静摩擦系数， θ 是 A 的一边与水平的夹角，如图 7-11 所示。设 $0 < \theta < 45^\circ$ 。

7-12 一灵敏天平两臂不等长，但两盘的质量完全相等，因此用它测量物体的质量时，要用复称法才能测得准确。设砝码在左盘、物体在右盘时，测得该物的质量为 m_1 ；砝码在右盘、该物在左盘时测得质量为 m_2 。证明：这物体的真实质量是 $m = \sqrt{m_1 m_2} \cong \frac{1}{2}(m_1 + m_2)$ 。设砝码是标准的。

7-13 一架灵敏天平，它的两臂长度都是 L ，支点刃口 a 比两端刃口 b, b' 高，秤梁的重量为 W ，其重心 C 位于 b 和 b' 的下方，距支点 a 的距离为 h ， $\angle abb' = \alpha = \angle ab'b$ ，如图 7-13 所示。求天平灵敏度 S_p 。天平的灵敏度 S_p 定义为在负载为 P 、天平达到平衡的条件下，将单位质量置于一个盘中，横梁中间指针针尖偏转的距

离, 即 $S_p = \frac{R \operatorname{tg} \varphi}{q}$, 式中 R 为指针长度, q 为加放的质量。

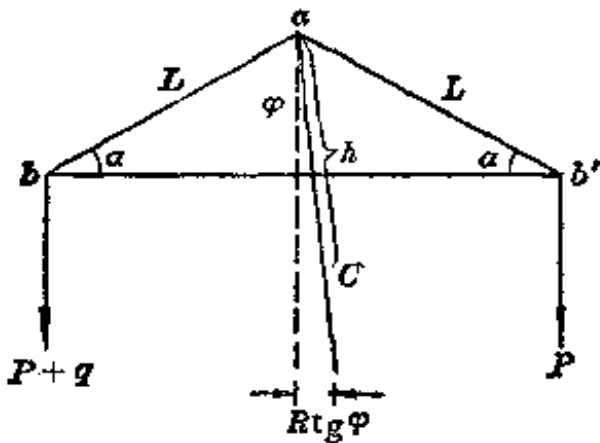


图 7-13

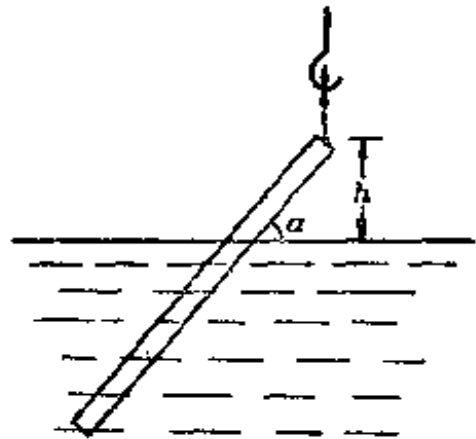


图 7-14

7-14 在海边, 用起重机吊起一根浮在海水中的木材, 如图 7-14 所示。设木材为重量均匀分布的圆柱体, 长为 $l = 10$ 米, 密度为 $\rho = 0.85$ 吨/米³, 已知海水密度 $\rho_0 = 1.03$ 克/厘米³。当吊索把木材吊起, 静止于离水面 $h = 3.0$ 米时, 木材与水面所成的角 α 为多少? 又当 h 高于多少时, 木材与水面垂直?

7-15 用手扳子慢慢上紧一个螺母, 如图 7-15 所示, 其中 $d = 20$ 毫米, $D = 30$ 厘米, F 的方向与扳子把手垂直, 大小为 20 公斤力, 求扳子作用于螺母上的一对力 f_1 和 f_2 的大小。设扳子对螺母的作用力集中作用于 A 、 B 两点, 且 f_1 与 f_2 大小相等, 方向相反。

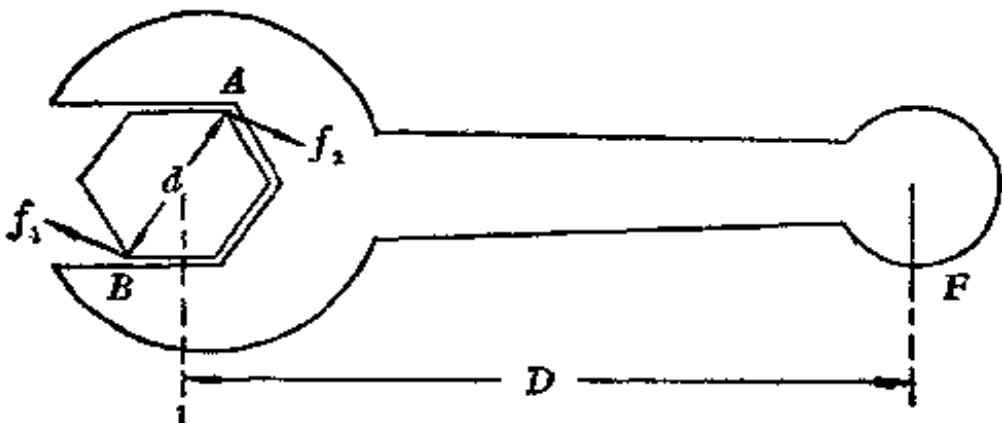


图 7-15

7-16 如图 7-16 所示, 两个均匀的球, 半径分别为 r_1 和 r_2 , 重

量分别为 P_1 和 P_2 ，用细绳系着吊在小滑轮 O 下面。两球光滑，彼此相切，平衡时系绳长为 l_1 和 l_2 。设绳子与滑轮的质量及滑轮轴上的摩擦力均可不计，绳子长度不变。求平衡条件。



图 7-16

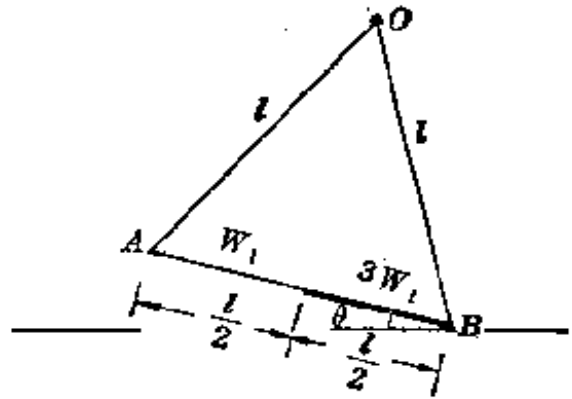


图 7-17

7-17 一根细直棒 AB 长为 l ，由两段连接在一起制成，每段长 $\frac{l}{2}$ ，各段都是均匀的，其重量之比为 $1:3$ 。把它的两端分别系在长为 l 的两根细绳上，挂在同一点 O 处，如图 7-17 所示。设绳的质量可略去不计，绳子长度不变。求平衡时棒与水平面所成之角度 θ 。

7-18 两个表面光滑的均匀球，半径分别为 r_1 和 r_2 ，质量分别为 m_1 和 m_2 ，用两根细绳 AB 和 AC 挂在同一点 A 上，如图 7-18 所示。其中 AB 长 l_1 ， AC 长 l_2 ，又

$$l_1 + r_1 = l_2 + r_2, \angle BAC = \alpha。$$

试求：

- (1) 绳子 AC 与水平面之间的夹角 θ ；
- (2) 绳中的张力 T_1 ；
- (3) 两球之间的压力 N 。

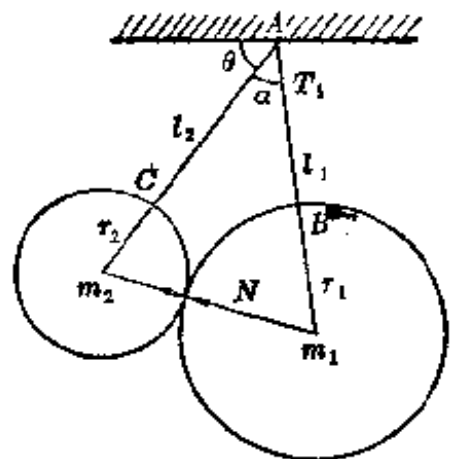


图 7-18

7-19 说明不倒翁不倒的道理。

7-20 图 7-20 所示的三种情况，那一种是稳定平衡状态？那

一种是不稳定平衡状态？设绳子的质量和所有的摩擦力均可不计，并两边的情况完全对称。

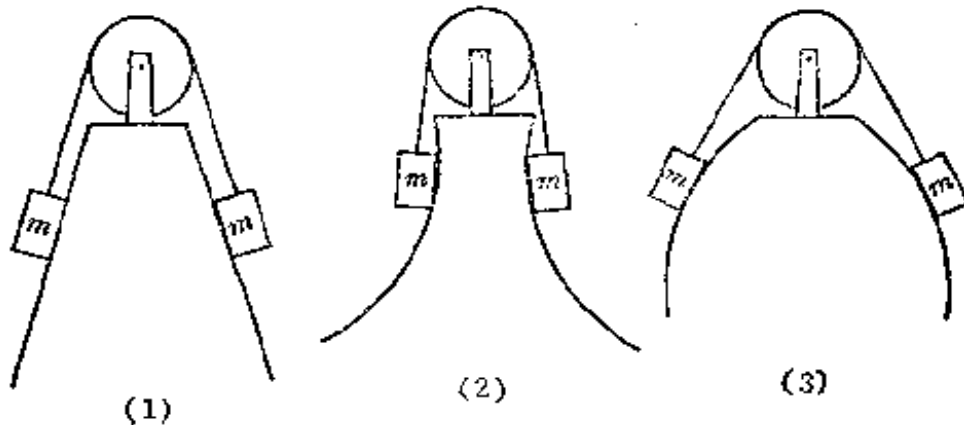


图 7-20

7-21 如图 7-21 所示，在水平面上垒砖，每块砖都是均匀的，长都是 L 。每垒一块砖都往同一边移过 $\frac{L}{a}$ 距离， a 是整数。问最多能垒几块而砖堆不倒？

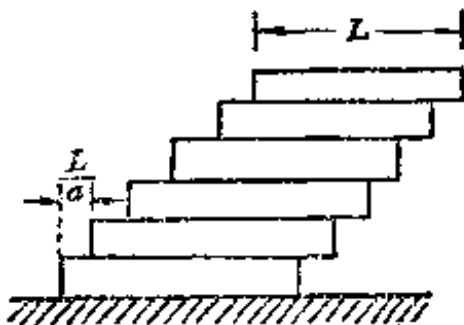


图 7-21

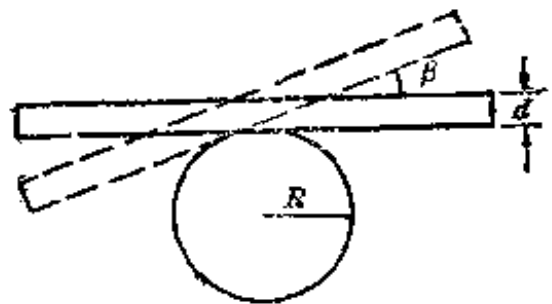


图 7-22

7-22 如图 7-22 所示，一块厚度为 d 的平板放在一个半径为 R 的固定圆柱上。板的重心刚好在圆柱竖直轴的上方。证明：当板的倾角小于 β 时，板处在稳定平衡状态， β 满足两个条件：

$$(1) \tan \frac{\beta}{2} < \sqrt{1 + \left(\frac{d}{2R\beta}\right)^2} - \frac{d}{2R\beta};$$

$$(2) \tan \beta < \mu,$$

式中 μ 是柱面与板之间的滑动摩擦系数。

§ 2. 刚体运动学

7-23 如图 7-23 所示，一个机车车轮的直径为 1.5 米，当机车以 $v=15$ 米每秒的水平速度向前行驶时，设车轮没有滑动，求轮面上下列各点相对于地面速度的大小和方向：

- (1) 轮轴中心 A ;
- (2) 轮与轨道的接触点 B ;
- (3) 轮的顶点 C ;
- (4) 水平直径上最前方一点 D ;
- (5) 轮面上离轴正下方 0.5 米处 E 。

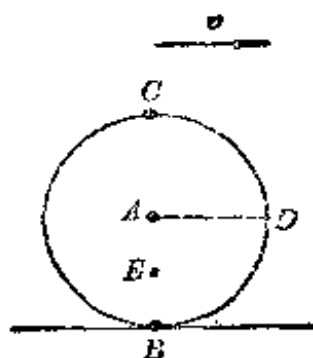


图 7-23

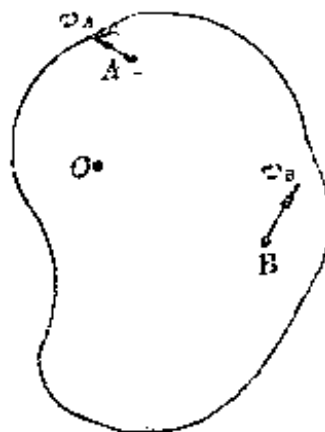


图 7-24

7-24 证明：刚体绕定轴 O 转动时，

在垂直于轴的平面上任意两点 A 和 B ，它们的速度 v_A 和 v_B 在 AB 连接线上的分量相等。

并说明这结果的物理意义。

7-25 证明：刚体绕定轴转动时，在垂直于轴的平面上，任意两点 A 、 B 的速度 v_A 、 v_B 与加速度 a_A 、 a_B 之间有下列关系：

v_A 与 a_A 之间的夹角等于 v_B 与 a_B 之间的夹角。

7-26 有人说：“一个半径为 r 的刚体球沿斜面以角速度 ω 滚下，则球面上任一点的速率 $v=r\omega$ ”，这种说法对吗？

7-27 某物体从静止开始以匀角加速度绕固定轴转动，其角加速度为 0.10 弧度/秒²。问从开始转动后多少时间，这物体上任一点的加速度与这点的速度方向成 45° 角？

7-28 半径为 R 的圆盘绕它的几何中心轴转动，要使其边线上一点的速度方向与加速度方向之间的夹角 φ 保持不变，求它的转动角速度 ω 随时间 t 变化的规律。已知开始时角速度为 ω_0 。

7-29 如图7-29所示，一个皮带传动装置共有四个轮子，它们的直径分别为： $d_1=300$ 毫米， $d_2=500$ 毫米， $d_3=100$ 毫米， $d_4=200$ 毫米。轮2和轮3共轴并固定连结为一体。如果轮1以500转/分的角速度旋转，问轮4的转速是多少？

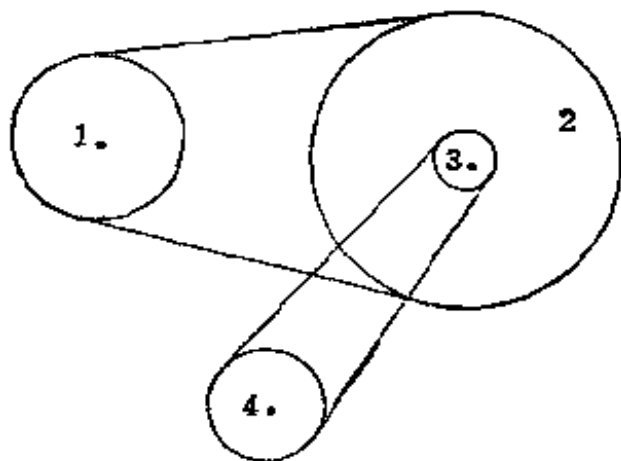


图 7-29

7-30 一飞轮转速为 300 转/分，半径为 100 厘米，受制动后均匀减速， 50 秒后停止。试求：

- (1) 角加速度；
- (2) 制动后到飞轮停止时，飞轮转过的圈数；
- (3) 制动后 25 秒时，飞轮的角速度；
- (4) 制动后 25 秒时，飞轮转过的圈数；
- (5) 制动后 25 秒时，轮边一点的速度 v_t 、切向加速度 a_t 和法向加速度 a_n ；
- (6) 制动后 25 秒时，轮边一点的加速度与速度所夹的

角度。

7-31 一个转动的轮子由于轴承摩擦力的作用渐渐变慢。第一分钟末的角速度是起始角速度 ω_0 的 0.90 倍，求下述两种情况下，第二分钟末的角速度：

- (1) 摩擦力矩不变；
- (2) 摩擦力矩在数值上与转动角速度成正比。

7-32 半径为 R 的一个圆盘以匀速 v_0 沿水平槽 CD 无滑动地滚动。长为 l ($l > 2R$) 的连杆 AB 的一端 B 连接在盘的边缘上，另一端 A 则沿 CD 作直线运动。求 A 点的速度 v_A 。(提示：用 φ 表示 v_A ， φ 是盘心 O 到 B 点的连线与竖直方向之间的夹角，如图 7-32 所示。)

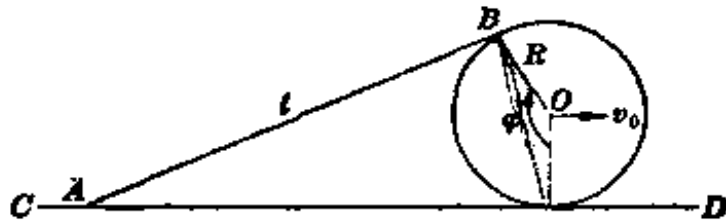


图 7-32

7-33 一个球的半径为 r ，安装在水平轴 AB 上，球心以速度 v 在水平桌面上绕一固定轴 AC 运动，设球没有滑动，其轨迹是一半径为 R 的圆，如图所示。求球的总角速度 ω 的大小和方向。

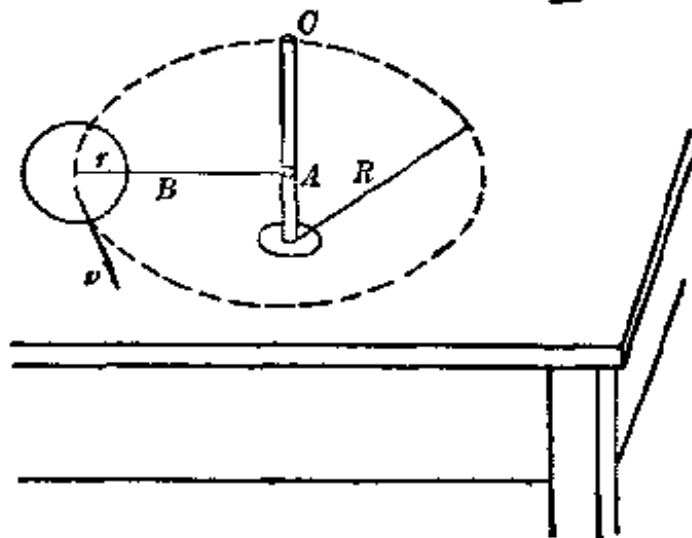


图 7-33

§ 3. 转动惯量

7-34 图 7-34 所示为六个形状不同的均匀物体，它们具有相同的质量、相同的线度。试问：对于几何轴(如图所示)的转动惯量哪个最大？哪个最小？

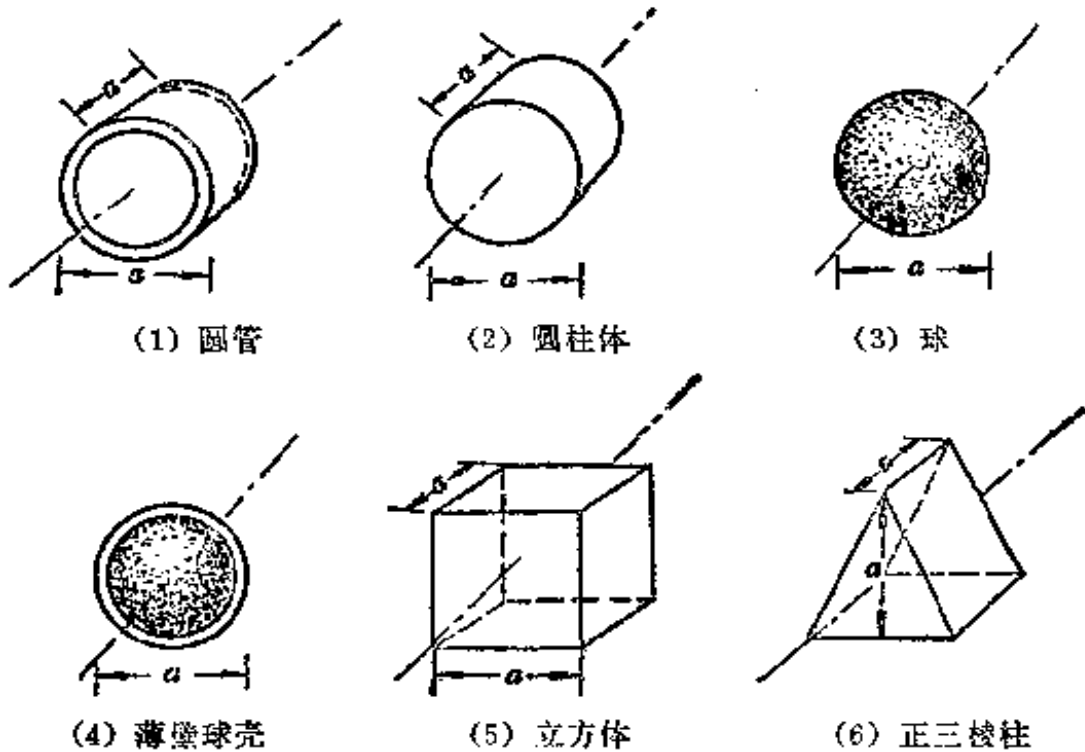


图 7-34

7-35 已知电子质量 $m_e = 9.11 \times 10^{-28}$ 克，电子绕核转动圆轨道的半径为 5.29×10^{-9} 厘米，求这电子绕核转动的转动惯量。

7-36 求图 7-36 所示的各均匀刚体的转动惯量，它们的质量都是 m ，半径都是 R 。

- (1) 细圆环，对垂直于环面的中心轴；
- (2) 薄圆盘，对垂直于盘面的中心轴；
- (3) 圆柱体，对垂直于圆截面的中心轴；
- (4) 实心圆球，对过球心的轴；
- (5) 空心薄球壳，对过球心的轴；
- (6) 薄圆盘，对通过直径的轴；

(7) 高为 h 的圆柱体，对过质心且与几何轴垂直的轴。

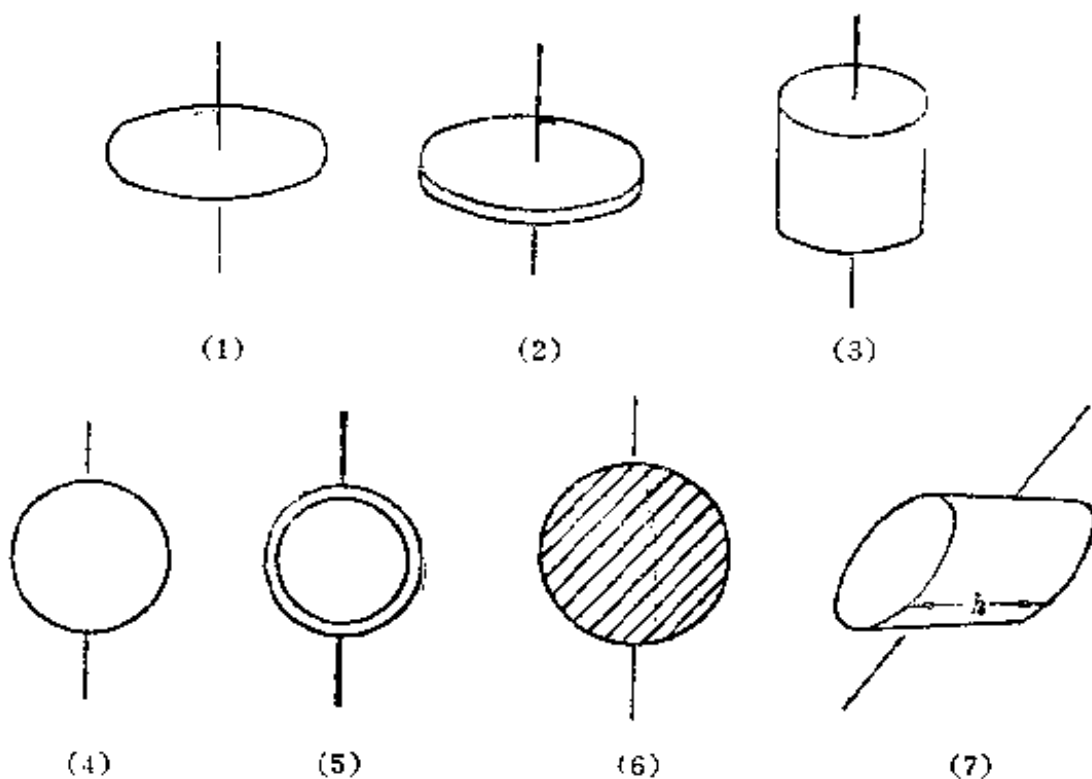


图 7-36

7-37 下列均匀刚体的质量都是 m ，分别求它们对给定轴的转动惯量：

- (1) 横截面为矩形的圆环，外径为 R_1 、内径为 R_2 ，对几何轴；
- (2) 球壳，内外半径分别为 R_1 和 R_2 ，对过中心的轴；
- (3) 矩形薄板，长为 a 、宽为 b ，对垂直于板面且过中心的轴；
- (4) 矩形薄板，长为 a 、宽为 b ，对过中心且平行于一边 a 的轴；
- (5) 长方体，长为 a 、宽为 b 、高为 c ，对过中心且平行于 c 边的轴；
- (6) 细棒，对过中心且垂直于棒的轴，棒长 l ；
- (7) 细棒，对过一端且垂直于棒的轴，棒长 l ；

(8) 细棒, 对过一端且与棒成 α 角的轴, 棒长 l 。

7-38 用三根长度都是 a 的细钢杆焊成一个等边三角形, 并在每个顶点上都焊一个质量为 m 的小球, 设钢杆的质量相对球可略去不计, 取坐标如图 7-38 所示。若 x, y 轴与三角形在同一平面内, 试求:

- (1) 对 z 轴 (通过中心 C 且垂直于纸面) 的转动惯量 I_z ;
- (2) 对 y 轴的转动惯量 I_y ;
- (3) 对 x 轴的转动惯量 I_x 。

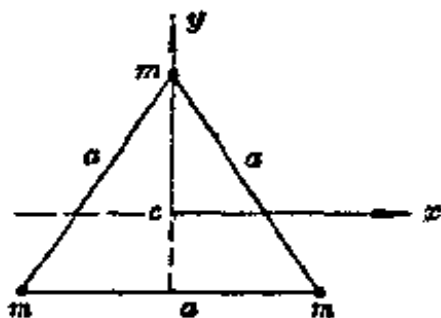


图 7-38

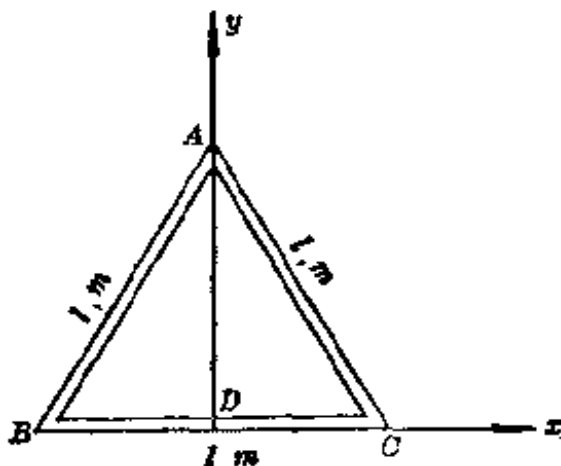


图 7-39

7-39 三根均匀的细杆长都是 l , 质量都是 m , 组成一个等边三角框, 如图 7-39 所示。分别求它对下列几个轴的转动惯量:

- (1) 过顶点 A 且与框面垂直的轴;
- (2) 过一边中点 D 且与框面垂直的轴;
- (3) 以一边为轴;
- (4) 以三角形的中垂线 AD 为轴。

7-40 图 7-40 所示的一个刚体由三根均匀的细杆 l_1, l_2, l_3 以及一个均匀的球体组成。已知 $l_1 = 16$ 厘米, $l_2 = 12$ 厘米, $l_3 = 20$ 厘米, 它们的质量分别为 $m_1 = 400$ 克, $m_2 = 300$ 克, $m_3 = 500$ 克。球的半径 $r = 5.0$ 厘米, 质量 $m = 4.0$ 公斤。若以 l_2 为轴, 求这

刚体转动惯量。

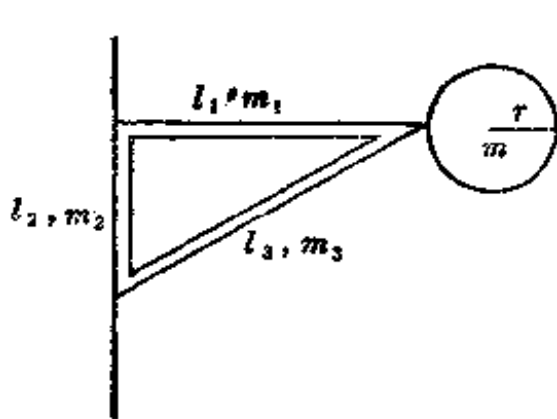


图 7-40

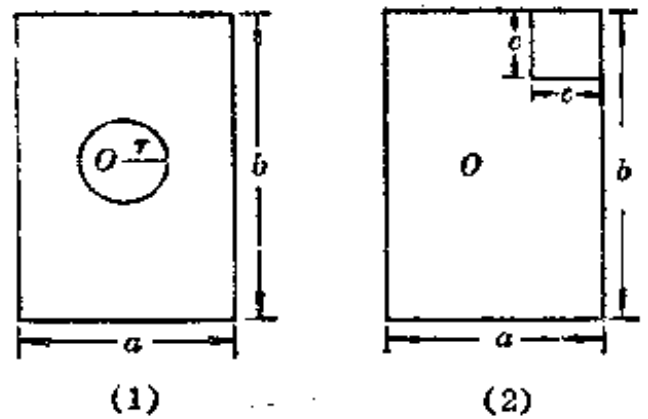


图 7-41

7-41 一块边长为 a 和 b 的均匀矩形薄板，质量为 m ，

(1) 中间挖去半径为 r 的圆形；

(2) 一角上挖去边长为 c 的正方形；

相应的形状分别如图 7-41(1)、(2)所示。分别求它们对于过中心 O 且垂直于板的轴的转动惯量。

7-42 两个小球看作质点，质量分别为 $m_1 = 40$ 克和 $m_2 = 120$ 克，固定在质量可以忽略的一根细直棒两端，已知棒长为 $l = 20$ 厘米。试问：

对通过棒上一点并且垂直于棒的轴来说，轴在什么地方时这系统的转动惯量最小？

7-43 证明正方形均匀薄板对下述两轴的转动惯量相等：

(1) 对角线；

(2) 通过中心且与一边平行。

7-44 如图 7-44 所示，一个重为 1.2 公斤的均匀球，对于离球心 20 厘米处的轴 OO 的转动惯量为 0.100 公斤·米²。已知 OO 与 $O'O'$ 平行，两轴之间的距离为 20 厘米，求对于 $O'O'$ 轴的转动惯量。

7-45 图 7-45 所示为 65 型地震仪的摆，它主要由一均匀的

长方形黄铜块构成。已知黄铜块高 $AB=3.8$ 厘米，宽 $BC=5.0$ 厘米，长 $AE=7.0$ 厘米，转轴 OO' 到长边的距离为 $OB=3.0$ 厘米。已知： OO' 平行于 AE 且与 $BCGF$ 在同一平面内，黄铜的密度为 8.4 克/厘米³，求这黄铜块对于 OO' 轴的转动惯量。

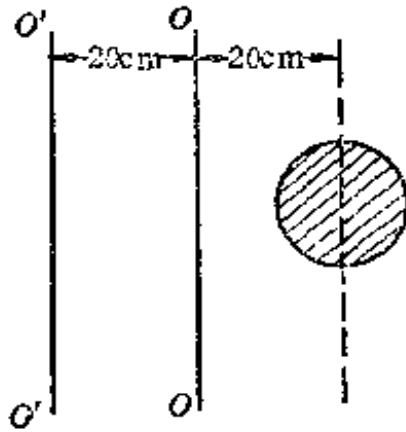


图 7-44

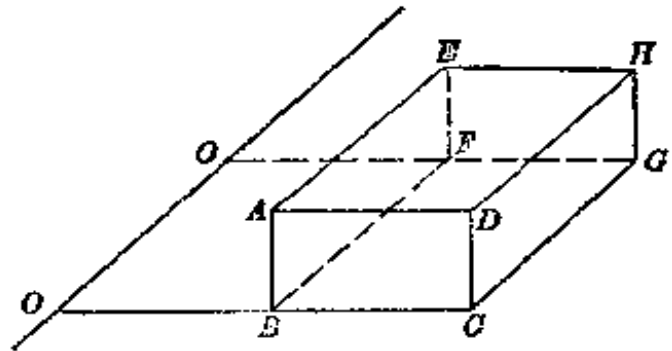


图 7-45

§ 4. 转动定理

7-46 两个质量相同的飞轮，在外力矩作用下以同样的角速度绕其中心轴旋转，如图 7-46 所示。它们所受的阻力矩是一样的。轮 A 是一个圆盘形飞轮，轮 B 是一个中空的辐射状飞轮，它们具有同样的外直径。问当外力矩去掉以后，只在阻力矩作用下，下述哪一情况是正确的：

- (1) A 先停止；
- (2) B 先停止；
- (3) A, B 同时停止。

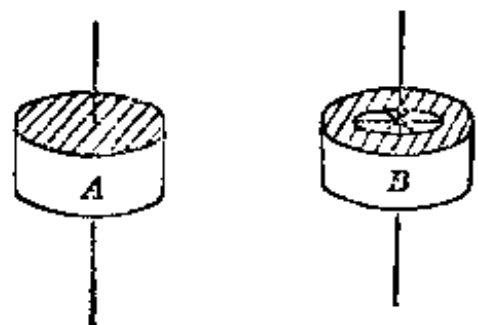


图 7-46

7-47 四个均匀的球：

- (1) 实心钢球，半径 5.0 厘米，
- (2) 实心轻塑料球，半径 10 厘米，
- (3) 钢球壳，半径 5.0 厘米，
- (4) 轻塑料球壳，半径 10 厘米，

从同一斜面上的同一高度由静止开始滚下，设空气的影响不计，设球没有滑动，试比较它们的快慢。

7-48 一个直径为 10 厘米的木质均匀实心柱体，可装在外径为 12 厘米的均匀空心铜柱中，恰好贴紧无隙，两者等长。已知铜柱的质量等于木柱的 3.5 倍，问从同一斜面的同一高度由静止开始滚下(设没有滑动)时，

- (1) 木柱；
 - (2) 空心铜柱；
 - (3) 两者紧套在一起；
- 哪一个滚到底所需时间最短？

7-49 一质量分布均匀的盘状飞轮重 50 公斤，半径为 1.0 米，转速为每分钟 300 转，在一恒定的阻力矩 L 作用下，50 秒后停止。问 L 等于多少？

7-50 一门宽 80 厘米、重 5.0 公斤，在距门轴 70 厘米处以 1.0 公斤的力推门，力的方向与门垂直，求门的角加速度。(不计阻力。)

7-51 如图 7-51 所示，一条细绳的两端分别拴有质量为 m_1 和 m_2 的两物体， $m_1 \neq m_2$ ，绳子套在质量为 m_0 、半径为 r_0 的均匀圆盘形滑轮上，设绳子不在滑轮上滑动，绳子长度不变，绳子的质量以及滑轮与轴间的摩擦力均可不计。求 m_1 、 m_2 的加速度 a 以及绳子的张力 T_1 和 T_2 。

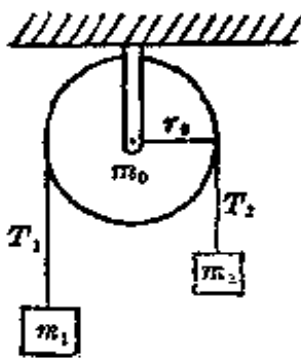


图 7-51

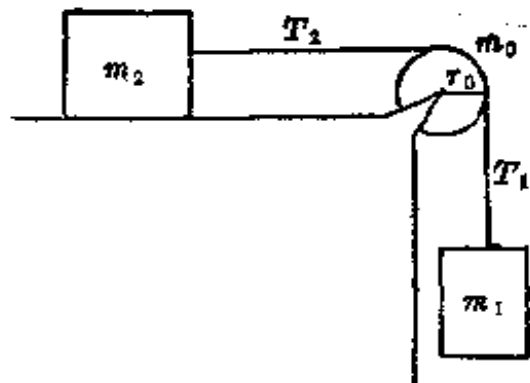


图 7-52

7-52 如图 7-52 所示, 两个物体 m_1 和 m_2 用细绳相连, 绳子套在质量为 m_0 、半径为 r_0 的圆滑轮上, 滑轮质量集中在边上, m_2 放在水平的光滑桌面上, m_1 吊着。已知 $m_1=100$ 克, $m_2=200$ 克, $m_0=50$ 克, $r_0=5.0$ 厘米。设绳子长度不变, 绳子的质量及滑轮轴上的摩擦力均可不计, 绳子与滑轮之间无滑动。求 m_1 的加速度 a 以及绳子的张力 T_1 和 T_2 。

7-53 用细绳拴住两个物体 m_1 和 m_2 , 绳绕过滑轮 m_0 后, 两物体分别置于光滑的双斜面的两个斜面上, 双斜面固定不动, 如图 7-53 所示。已知 $m_1=1.0$ 公斤, $m_2=1.5$ 公斤, $m_0=200$ 克, 均匀盘状滑轮的半径为 $r_0=3.0$ 厘米, 绳的质量和滑轮轴上的摩擦均可不计, 绳子与滑轮间不打滑, 绳子长度不变。求物体的加速度 a 的大小、方向以及绳的张力 T_1 和 T_2 。

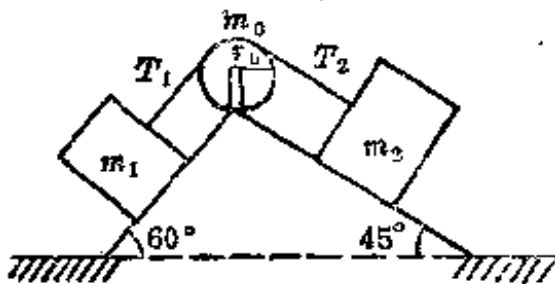


图 7-53

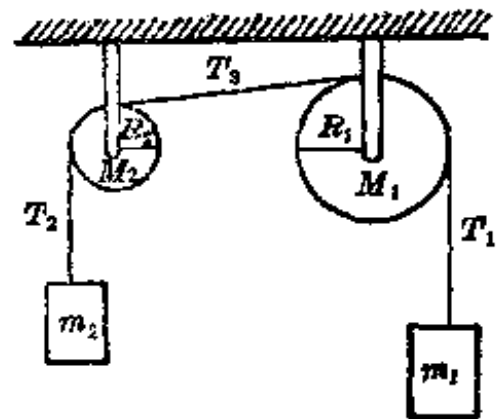


图 7-54

7-54 一个如图 7-54 所示的装置, 其中 m_1 、 m_2 、 M_1 、 M_2 、 R_1 和 R_2 都已知, 且 $m_1 > m_2$, 滑轮都是圆盘形的。设绳子长度不变, 绳子的质量以及滑轮轴上的摩擦力均可不计, 绳子与滑轮间不打滑, 滑轮质量均匀分布。求 m_2 的加速度 a 以及绳子的张力 T_2 、 T_3 。

7-55 固定在一起的两个同轴均匀圆柱体可绕一水平光滑轴 OO 转动, 设大小圆柱体的半径分别为 R 和 r , 质量分别为 M 和 m 。绕在两柱体上的绳子分别与物体 m_1 和物体 m_2 相连, m_1 和 m_2 吊

在圆柱体的两侧，如图 7-55 所示。试问：

(1) 如 $r=10$ 厘米， $R=20$ 厘米， $m=2.0$ 公斤， $M=20$ 公斤， $m_1=m_2=2.0$ 公斤，则角加速度 α_1 为多大？

(2) 如把 m_1 和 m_2 都去掉，在两根绳的下端都用 2.0 公斤力垂直向下拉，则角加速度 α_2 为多大？

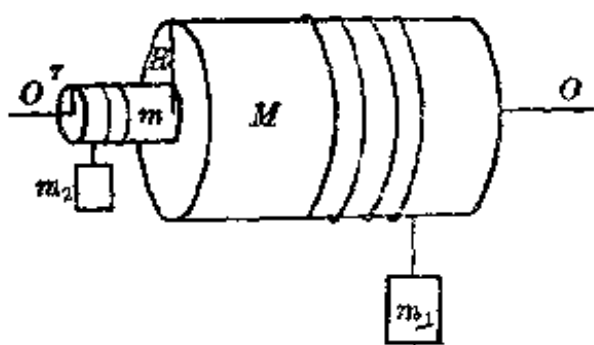


图 7-55

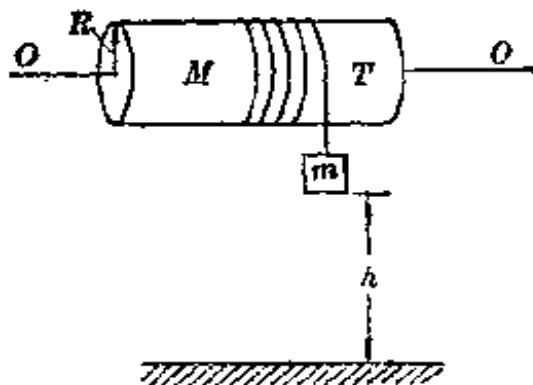


图 7-56

7-56 如图 7-56 所示，在质量为 M 、半径为 R 、可绕一水平光滑轴 OO 转动的均匀圆柱形鼓轮上绕有细绳，绳的一端挂有质量为 m 的物体， m 从高 h 处由静止下降。设绳子不在鼓轮上滑动，绳子长度不变，绳的质量可略去不计。试求：

- (1) m 下降的加速度 a ；
- (2) 绳的张力 T ；
- (3) m 达到地面时的速度 v ；
- (4) m 达到地面所需的时间 t 。

7-57 一密度均匀的水泥涵管的外径为 100 厘米、厚为 10 厘米，从倾角为 5° 的斜坡上面由静止开始滚下，设管子没有滑动。已知斜坡长 5.0 米，问滚到底部需多少时间？

7-58 在倾角为 θ 的固定斜面上，有四个均匀物体：

- (1) 圆柱体(轴线水平)；
- (2) 薄壁圆筒(轴线水平)；
- (3) 实心球体；

(4) 空心球壳。

它们分别在斜面上的不同位置，都从静止开始下滚，设下滚时没有滑动，出发时间相同，且同时滚到底边。求它们出发时离斜面底边的距离之比。

7-59 一圆盘半径为 R ，装在桌子边上，可绕一水平的中心轴转动。圆盘上绕着细线，细线的一端系一个质量为 m 的重物， m 距地面为 h ，从静止开始下落到地面，需时间为 t ，如图 7-59 所示。用这样一个实验装置测定圆盘的转动惯量 I ，测得当 $m = m_1$ 时， $t = t_1$ ； $m = m_2$ 时， $t = t_2$ 。证明：

$$I = \frac{\left[(m_1 - m_2)g - 2h \left(\frac{m_1}{t_1^2} - \frac{m_2}{t_2^2} \right) \right] R^2}{2h \left(\frac{1}{t_1^2} - \frac{1}{t_2^2} \right)}$$

在实验过程中，假定摩擦力维持不变，绳子质量可忽略，绳子长度不变。

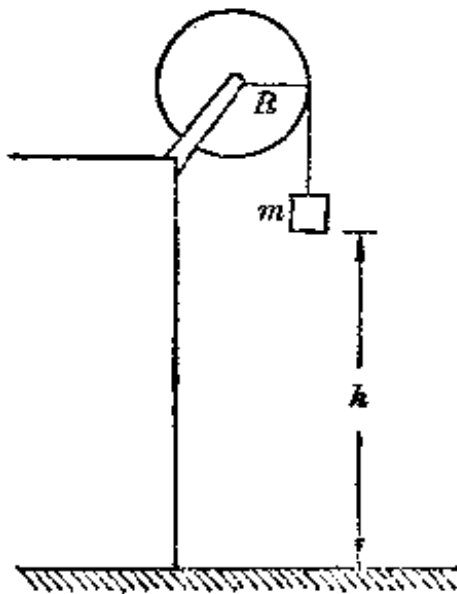


图 7-59

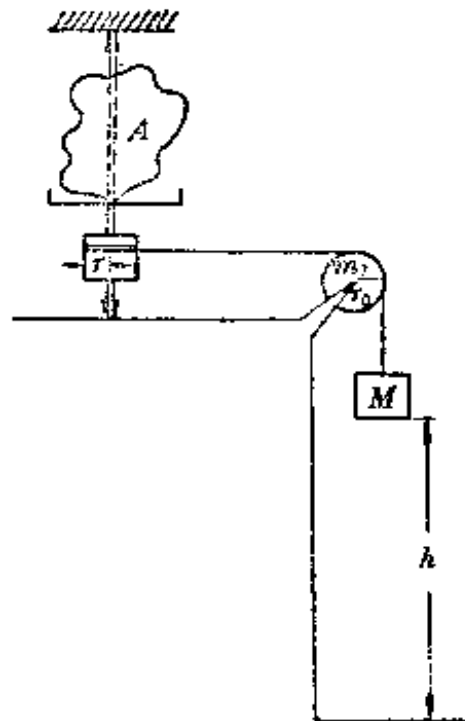


图 7-60

7-60 图 7-60 所示为一用落体法测量刚体转动惯量的实验

装置示意图。待测物体 A 装在转动架上，架的下部有一半径为 r 的鼓轮，绳子的一头绕在这鼓轮上，跨过质量为 m_0 、半径为 r_0 的圆盘形定滑轮，另一头悬挂一质量为 M 的重物。今测得重物由静止开始下落一段距离 h 所用的时间为 t_2 。将待测物体 A 去掉后，让空架在 M 的作用下转动，测得 M 下落同一距离 h 所用的时间为 t_1 。设绳子长度不变，绳的质量以及各转轴上的摩擦力均可不计，绳与滑轮之间无滑动，滑轮的重量均匀分布。求 A 绕转动轴的转动惯量 I 。

转动惯量是绕轴转动

7-61 用连杆连接起来的两个滚子，从倾角为 30° 的固定的斜面上滚下，如图 7-61 所示。两个滚子的质量都是 5.0 公斤，半径都是 $R=5.0$ 厘米，但转动惯量不相等，分别为 $I_1=80$ 公斤·厘米² 和 $I_2=40$ 公斤·厘米²。滚子的框架和连杆的质量都很小，可略去不计。试问：

- (1) 滚子无滑动地从斜面上滚下来时，它们的角加速度等于多少？这时连杆受力的大小和方向如何？
- (2) 如果滚子 2 在前面而滚子 1 在后，结果又如何？

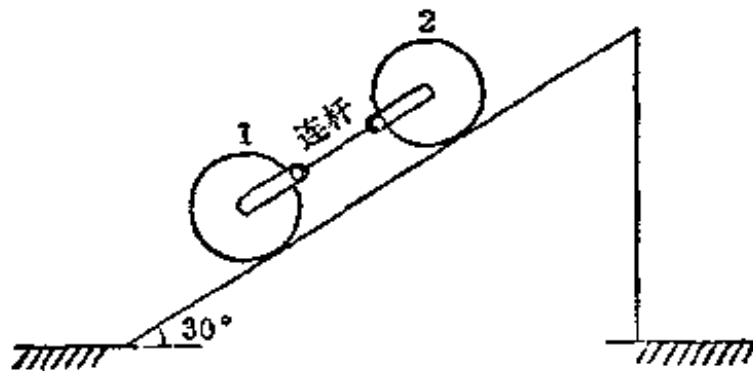


图 7-61

7-62 如图 7-62 所示，两直尺平行并列，其间相距 $d=2.0$ 厘米，与水平成 $\alpha=5^\circ$ 角。半径为 $r=1.5$ 厘米的一个均匀小球，沿尺无滑动地滚下，问球心的加速度是多少？

7-63 两根长度相等、质量可以略去不计的细绳，上端都系在

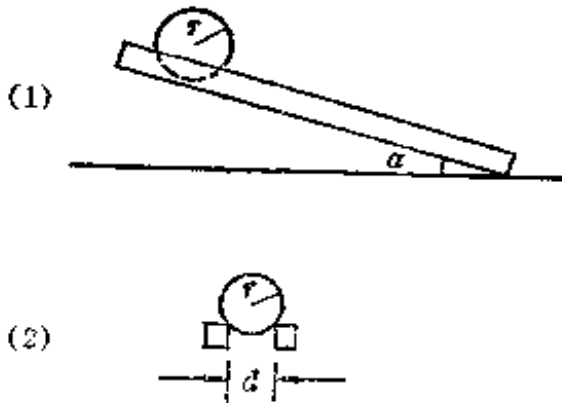


图 7-62

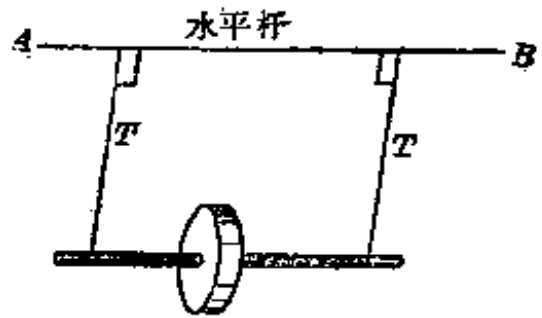


图 7-63

一根水平杆 AB 上，下端都系在一个轮轴上，把轮轴挂成水平，如图 7-63 所示。先使轮轴向上滚，把绳子缠在轮轴上；然后放手让轮轴向下滚，试问：

(1) 若轮与轴的质量共为 1000 克，对此轴中心的转动惯量为 2.5×10^3 克·厘米²，轴的半径为 5 毫米， AB 不动，求每根绳子的张力 T_1 ；

(2) 当轮轴下降到最低点时，因为继续旋转而把绳子卷到轴上，从而轮轴又上升，求这时每根绳上的张力 T_2 ；

(3) 设在下落过程中，把 AB 水平地提升而正好使轮轴停在空中某一高度，求此时每根绳上的张力 T_3 。

7-64 一个如图 7-64 所示的装置。四根绳子都缠绕在滚子的轴上，但上面两根与下面两根的缠绕方向相反，因此，当放手之后滚子下滚时，重物 m 比滚子下降得更快，设重物质量为 m ，滚子的质量为 M ，缠绳处的半径为 r ，滚子对几何轴的转动惯量为 I ，滚子下降时，它们的轴保持水平方向，而四根绳子则都保持竖直方向，且绳子质量可略去不计。求滚子下滚时对瞬时轴的角加速度 α 。

7-65 一如图 7-65 所示的装置。质量为 m 的物体吊在滚子的中心轴上，而滚子又用绳子吊在天花板上，因绳子是绕在滚子的粗轴(半径为 r)上，故放手后滚子将滚下。设滚下时轴保持水平方向，而上面两根绳子则保持竖直方向，绳子质量均可不计，滚子的

质量为 M 、对几何轴的转动惯量为 I ，求 m 下落的加速度。

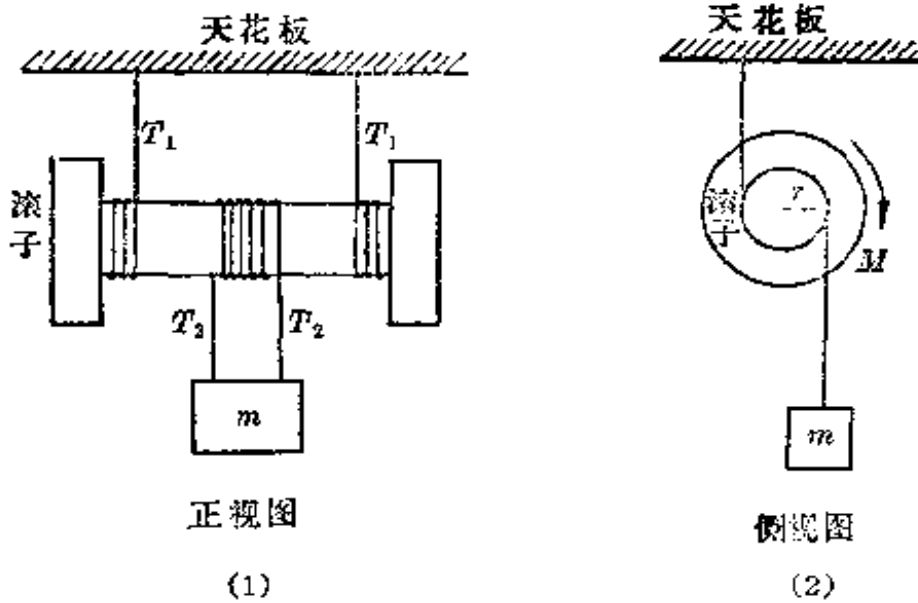


图 7-64

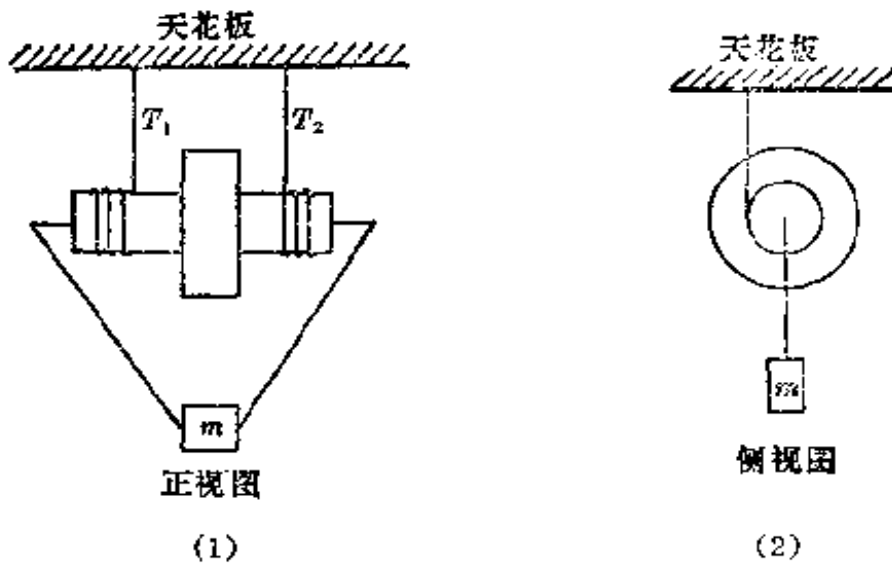


图 7-65

7-66 两个轮子，质量都是 m ，半径都是 R ，轴的半径都是 r ，对几何轴的转动惯量都是 I ，用细绳绕在它们的轴上悬挂，如图 7-66 所示，其绕线半径亦为 r ，线长 l_1, l_2 均 $\gg r$ 。求当放手之后两轮滚下时，它们的轴线的加速度 a_1 和 a_2 。设绳子的质量均可不计。

7-67 一个装置如图 7-67 所示。其中滑轮 A 可随 m 下降而向上升。已知两盘状滑轮的质量都是 M 且均匀分布、半径都是 R ，

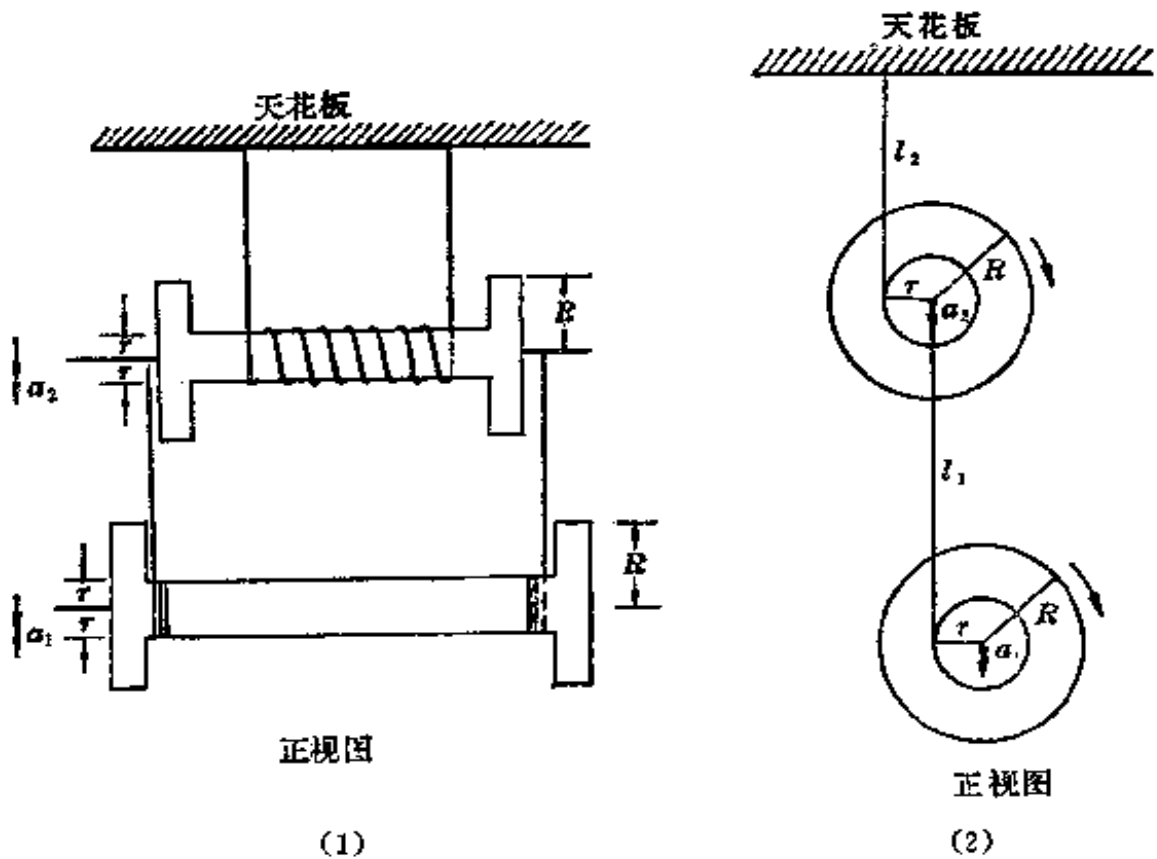


图 7-66

绳子的质量和轴上的摩擦都可略去不计，绳子不在滑轮上滑动。
求：

- (1) m 下降的加速度 a_1 ；
- (2) 绳中的张力 T_3 。

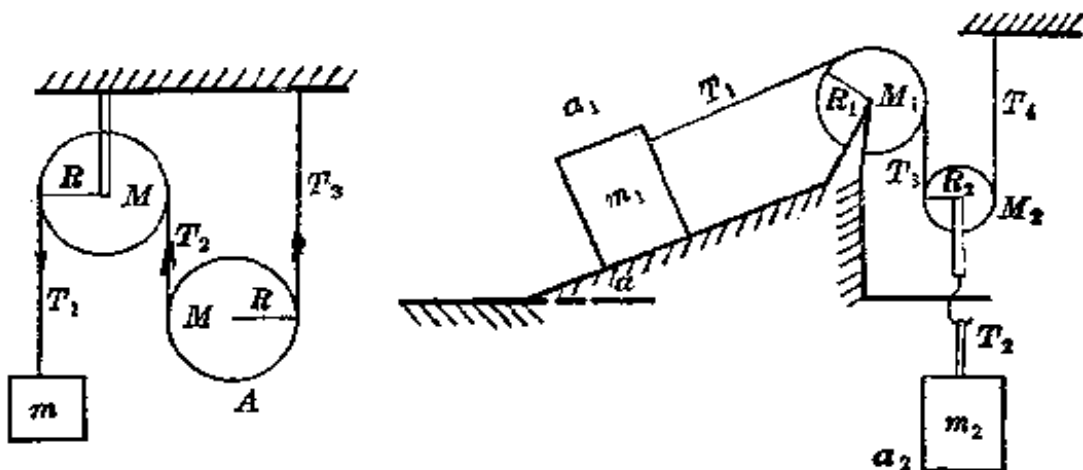


图 7-67

图 7-68

7-68 一个如图 7-68 所示的装置。已知 m_1 、 m_2 、($m_2 > 2m_1$)、

$M_1, R_1, M_2, R_2, \alpha$, m_1 与斜面之间摩擦系数 $\mu = 0$, 滑轮都是均匀圆盘, 绳的质量以及轴上的摩擦均可不计, 绳子在滑轮上不打滑。求 m_2 的加速度 a_2 以及绳中的张力 T_2 。

7-69 一个如图 7-69 所示的装置。已知 m_1, m_2, m_3 以及均匀圆盘状滑轮的 M_1, R_1 和 M_2, R_2 。略去绳的质量及轴上的摩擦力, 绳子在滑轮上不打滑。求 m_1, m_2, m_3 的加速度 a_1, a_2 和 a_3 。

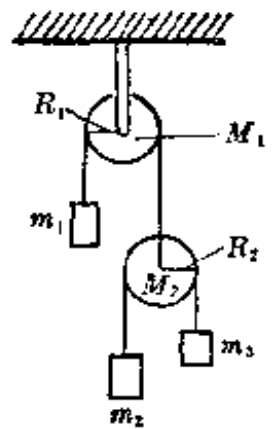


图 7-59

7-70 质量为 3.0 公斤的均匀实心圆球, 沿着倾角为 30° 的固定斜面无滑动地滚下, 求球与斜面间的摩擦力。

7-71 证明: 要使一物体在斜面上滚动时不打滑, 滑动摩擦系数 μ 必须满足:

$$\mu \geq \frac{\tan \alpha}{\frac{MR^2}{I_C} + 1},$$

其中 α 是斜面倾角, I_C 是该物体绕质心的转动惯量, R 是滚动半径, M 是物体的质量。

7-72 有一个均匀细棒, 质量为 m , 长为 l , 平放在滑动摩擦系数为 μ 的水平桌面上, 一端固定, 在外力推动下, 绕此固定端在桌面上以角速度 ω_0 转动。今撤去外力, 问从撤去外力开始到停止转动时需经过多长时间? (不考虑轴上的摩擦。)

7-73 如图 7-73 所示, 一个均匀的实心圆柱体, 质量为 m , 半径为 R , 放在两根平行的水平导轨上。圆柱体上缠绕着一根绳子, 在绳子下端用力 $F = \frac{1}{2}mg$ 向下拉, 使圆柱体在导轨上滚而不滑动, 求它的轴线的加速度 a 。要使圆柱体不滑动, 它与导轨间的摩擦系数 μ 至少不得小于多少?

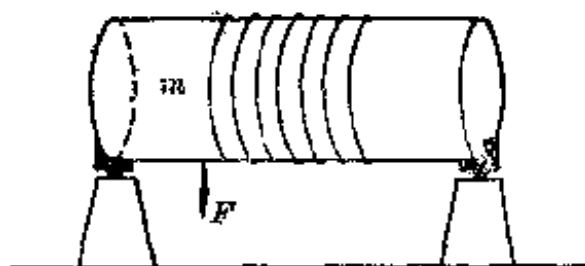


图 7-73

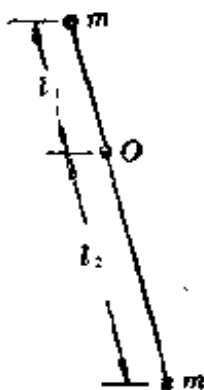


图 7-74

7-74 一根细棒两端各有一个质量为 m 的小球，棒上 O 处有一小孔，一根固定的水平轴穿过这小孔使带球的棒构成一个复摆。已知两个小球到轴 O 的距离分别为 l_1 和 l_2 ，如图 7-74 所示。设棒的质量和轴上的摩擦均可不计，棒长不变，求这复摆作小角摆动时的摆动周期 T 和等值摆长 l_0 。

7-75 一个复摆的自由摆动周期为 1.00 秒，求它的等值摆长。

7-76 1.00 米长的均匀细棒，一端挂起，令其绕水平轴作微小的自由摆动，构成一个复摆，求摆动的周期。

7-77 证明：每个复摆都有两个支点，当摆动轴通过其中一个支点的摆动周期与通过另一点的摆动周期相等时，这两个支点到质心的距离 l_1 和 l_2 满足：

$$l_1 l_2 = \frac{I_c}{M},$$

式中 M 是复摆的总质量， I_c 是复摆对过质心的水平轴的转动惯量。

7-78 证明：用可逆摆测重力加速度 g 时，则有

$$g = \frac{4\pi^2}{T^2} (l_1 + l_2),$$

式中 l_1 和 l_2 是在质心两侧的两个支点到质心的距离，两支点是这样的两点，当摆轴通过它们且相互平行时，摆的周期 T 相等。可逆摆的示意图如图 7-78 所示。



图 7-78

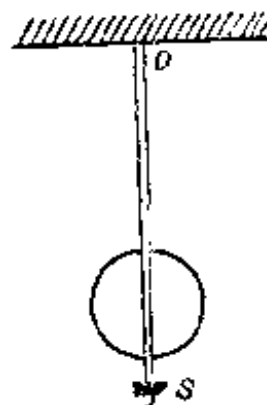


图 7-79

7-79 如图 7-79 所示，摆钟的摆由一金属杆和摆锤组成，在其下端有一可上下微调的小螺丝 s 。当钟走得偏快时，要想把它调准，问应把 s 向上调还是向下调？

7-80 如图 7-80 所示，精密的天文摆钟的摆杆上部有一个小盘 D ，可以向盘中加进或减少少量砝码，以调节钟的快慢。问当盘内加进砝码后，钟走得比以前快些还是慢些？

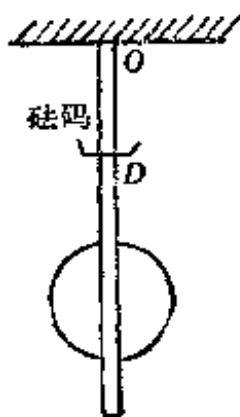


图 7-80



图 7-81

7-81 水平钢丝穿过一根长为 l 的均匀细棒上的 O 点，使这个细棒构成一个复摆，摆轴即钢丝。当摆角很小时，略去摩擦，问

O 点在棒上何处时摆动的周期最小？参看图 7-81。

7-82 一艘船的螺旋桨的转动惯量为 I ，在不变的转动力矩 L 的作用下由静止开始转动，阻力矩 L_m 与角速度 ω 成正比，比例系数 κ 是常数。试问：

(1) 经过多少时间后角速度达到一规定值 ω_1 ？

(2) 这段时间里转过了多少圈？

7-83 一飞轮的转动惯量为 I ，开始制动时的角速度为 ω_0 。

(1) 设阻力矩与角速度的平方成正比，比例系数为 κ ，求开始制动到角速度为 ω_1 的时间内的平均角速度 $\bar{\omega}$ ；

(2) 经过多少时间角速度减少为起始的三分之一？

7-84 一个直径为 10 厘米的均匀圆柱体在平地上滚动了 5.0 秒后停止，在停止前走过了 15 米，求滚动摩擦系数如 κ 。 κ 定义为对接触点的滚动摩擦力矩 L_R 与正压力 N 之比

$$\kappa = \frac{L_R}{N}。$$

7-85 一个半径为 r 的均匀小球放在一块水平的板上，平板以加速度 a 移动。球与板之间的滑动摩擦系数为 μ ，滚动摩擦系数为 κ 。试问：

(1) 什么情况下球将随板以加速度 a 运动？

(2) 什么情况下球只滚动而不滑动？

7-86 一个刚性小球放在倾角为 θ 的板上。设摩擦系数 $\mu = 0.25$,

(1) 问平板倾斜到什么角度时球仍将保持滚动而无滑动；

(2) 如平板倾斜并以加速度 a 向前移动，定性说明球可能如何运动。如图 7-86 所示。



图 7-86

§ 5. 功 和 能

7-87 1959年7月18日，有人认为由于太阳色球层的爆发，使地球自转在那一昼夜慢了 8.8×10^{-4} 秒。已知地球的平均半径为 6378 公里，平均密度为 5.5 吨/米³。问在这一昼夜间地球自转的转动能小了多少？假定地球是均匀球体。

7-88 一圆盘形的均匀飞轮重 1000 公斤，半径为 $R = 0.50$ 米，绕几何轴转动，在半分钟内，由起始角速度 $\omega_0 = 3000$ 转/分均匀减速至 1000 转/分。问阻力矩做了多少功？

7-89 一车床电动机的功率为 9.4 千瓦。当切削半径为 2.5 厘米的工件时，车床转速为 1000 转/分，问车刀克服的阻力有多大？

7-90 为什么在纯滚动的情况下，使物体滚动的地面摩擦力不做功。

7-91 一块矩形均匀薄板边长为 $AB = 90$ 厘米， $AC = 160$ 厘米，重 100 公斤，以 AB 边着地竖立在地面上，如图 7-91 所示。今在 D 上加一个与 AD 垂直的力 F ，使板绕 A 点极缓慢地转动，从图 7-91(1) 的状态变到(2)的状态(此时 AD 与地面垂直，仍保持静止)。转动时维持 F 与 AD 垂直，并使板在竖直平面内运动。试问：

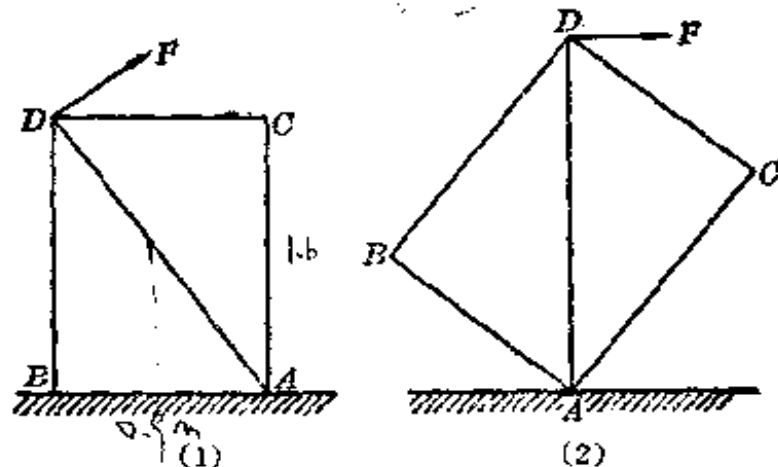


图 7-91

(1) 力 F 做了多少功？

(2) 力 F 至少为多大？

7-92 一个正方形箱子沿着水平面移动了一距离 L ，边长相等。一次是沿地面拖过去的，一次是绕箱子的边翻动过去的。箱子与地面间的摩擦系数为 μ ，在绕箱边翻动时摩擦损耗可略去不计。问 μ 多大时，拖过去与翻过去做的功相等。设箱子的质量是均匀分布的，而且在翻过去以后重新往下落时已经撒手了。

7-93 一根长为 l 、质量为 m 的均匀细直棒平放在地上，试问：

(1) 把它竖立起来，需做多少功？

(2) 如果让这竖立着的棒，以下端接地处为轴自由倒下，问上端达到地面时，速率是多少？

(3) 若当棒的上端刚到地面时，棒上某一点的速度与一质点从同样高度处自由落下时所获得的速度相等，求这一点在棒上的位置。

7-94 一个圆柱形的均匀石滚子的质量为 m ，在倾角为 θ 的斜面上高为 h 的地方，从静止开始滚下来，设下滚时没有滑动，并且它的轴线保持水平。试问：

(1) 滚到底所需时间 t_1 为多大？

(2) 如果它在一个光滑的斜面上，从同样高度，由静止开始自由滑下，维持滑动而没有滚动，则滑到底所需时间 t_2 为多大？

7-95 如图 7-95 所示，半径为 r 的均匀球在斜面上从静止开始滚下，设球没有滑动，轨道下部是一个半径为 R 的圆环。如不计阻力损耗，试问：

(1) 要使小球能滚到圆环最高点，问开始时它的质心至少要比圆环的顶高多少？

(2) 球沿圆轨道到达最高处的最小速度是多少？

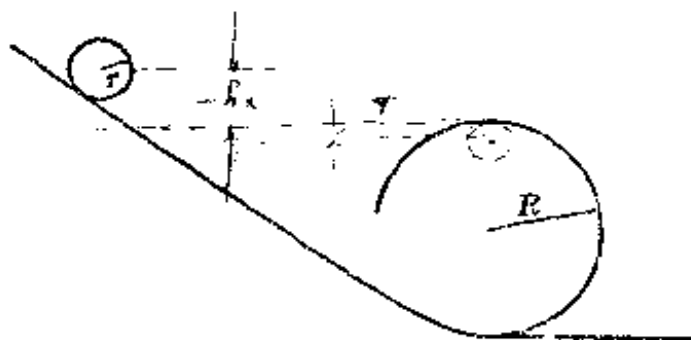


图 7-95

7-96 一铁路货车的轴承直径为 27 厘米，轮直径为 180 厘米，轮与轴承间滑动摩擦系数为 0.01，轮子与轨道间滚动摩擦系数为 0.05 厘米。求使 50 吨重的货车匀速行驶 1 公里所需对它做的功。

§ 6. 质心和质心定律

7-97 把地球和月球都当做均匀球体。已知地球质心与月球质心之间的距离为地球半径 R 的 60.3 倍，地球质量为月球质量的 81.5 倍。求地球和月球两者的公共质心的位置。

7-98 一条均匀板长 100 厘米、重 1000 克，今在其上离一端 10 厘米处挖一重 50 克的圆孔，并将此挖下的圆块固定于板的另一端，如图 7-98 所示。求这时质心的位置。

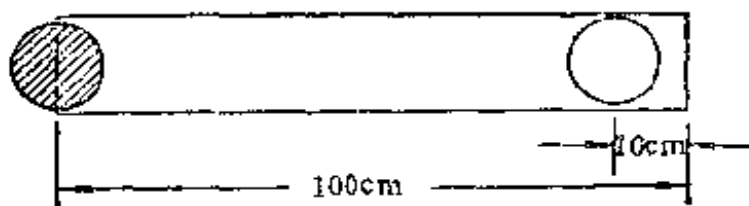


图 7-98

7-99 证明：等腰三角形形状的均匀薄板的质心在它的中垂线上离顶点为 $2/3$ 的地方。

7-100 一块半圆形的均匀薄板半径为 R ，求它质心的位置。

7-101 一刚体由三个质点用细棒联在一起，构成如图 7-101 所示的三角形，其中 $AC=30$ 厘米、 $AB=50$ 厘米、 $\angle CAB=60^\circ$ 。三个质点的质量分别为 $m_A=5.0$ 公斤， $m_B=3.0$ 公斤和 $m_C=2.0$ 公斤。细棒的质量可略去不计。求这系统质心的位置。

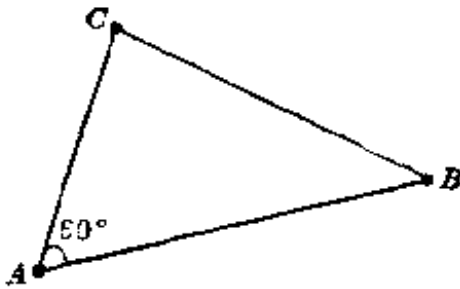


图 7-101

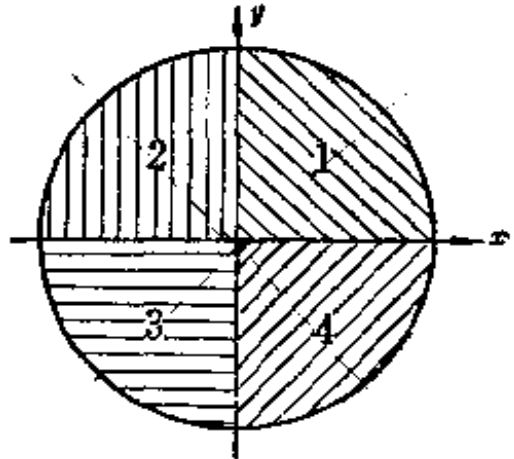


图 7-102

7-102 一个圆盘半径为 R ，各处厚度一样，在每个象限里，各处的密度也是均匀的，但不同象限里的密度则不同，它们的密度比为

$$\rho_1:\rho_2:\rho_3:\rho_4=1:2:3:4$$

求这圆盘质心的位置。

7-103 在一块正方形形状的均匀薄板上，锯掉一个等腰三角形，其底边就是正方形的一边，顶点为 P ，如图 7-103 所示。如果要使它以 P 点悬挂起来时，这块燕尾形板在任何位置都可以保持平衡，求切下的等腰三角形的顶角 α 。

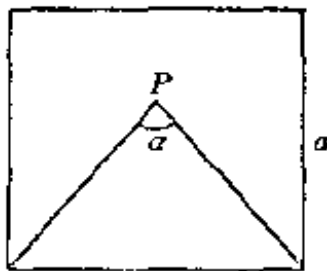


图 7-103

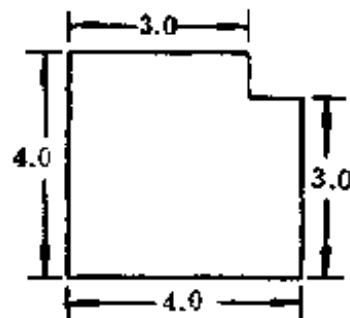


图 7-104

7-104 一块用均匀材料制成的正方形板每边长为 4.0 米，在它的的一个角上切去边长为 1.0 米的正方形，如图 7-104 所示，求板的质心位置。

7-105 一个均匀圆盘半径为 R ，

(1) 与圆周相切，挖去一个半径为 $r = R/4$ 的小圆；

(2) 如图所示，再挖去一个同样的小圆。

分别求上述两种情况下质心的位置。

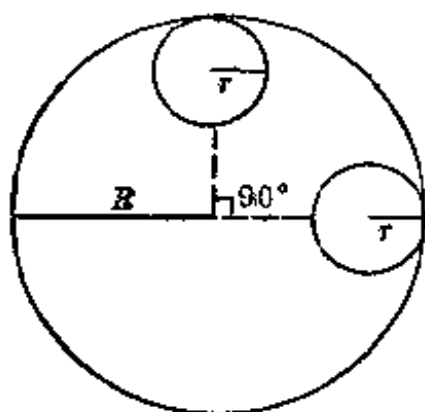


图 7-105

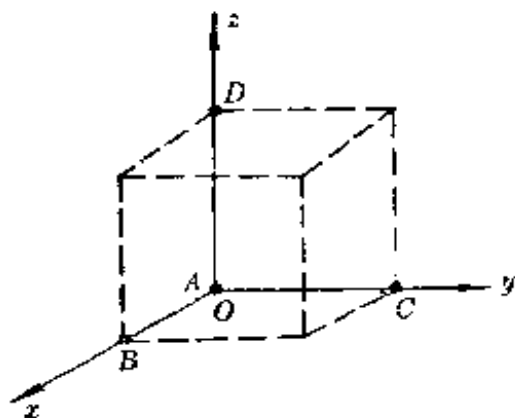


图 7-106

7-106 四个质点分别处在一立方形的四个相邻的顶点上，如图 7-106 所示。立方形边长为 a 。分别求下列两种情况下的质心位置：

(1) 四个质点的质量都相同；

(2) $m_A : m_B : m_C : m_D = 1 : 2 : 3 : 4$ ，

7-107 一个物体的重心定义为它所受的重力的合力的作用点。证明当物体所在处各点的重力加速度都相同时，物体的重心与质心重合。

7-108 一个均匀物体受另一质点作用于它的万有引力一定通过它的质心吗？为什么？一个非均匀物体受另一质点作用于它的万有引力一定不通过它的质心吗？试说明之。

7-109 证明：惯性力通过物体的质心。

7-110 光滑水平面上放一根细棒，受到一水平力 F 的作用， F 与棒垂直。已知 $F=1.0$ 公斤力，棒的质量 $m=1.0$ 公斤，棒长 $l=50$ 厘米。求在下列三种情况下质心的加速度，

- (1) F 作用在棒中点；
- (2) F 作用在棒一端；
- (3) F 作用在距棒一端 $\frac{l}{4}$ 处。

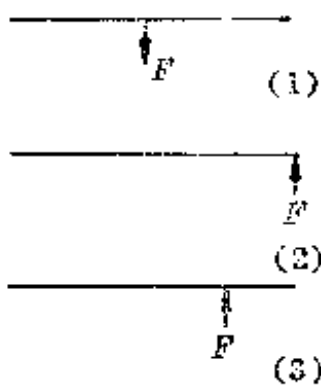


图 7-110

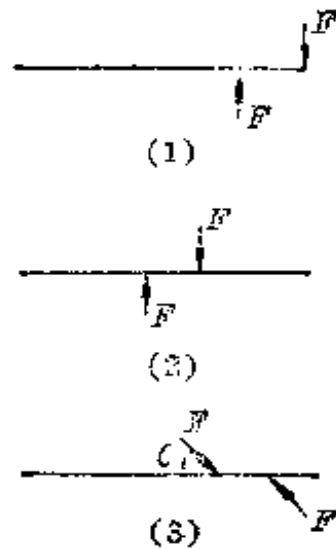


图 7-111

7-111 光滑水平面上放一根细棒，有一力偶作用于它，如图 7-111 所示，求下列三种情况下质心的加速度，

- (1) 力偶作用于棒端，力垂直于棒；
- (2) 力偶作用于棒正中部，力垂直于棒；
- (3) 力偶作用的方向与棒成 θ 角。

7-112 如图 7-112 所示，一个 L 形物体，由两块形状相同的均匀矩形薄板胶合而成，卧放在光滑的水平桌面上，要使它受冲击后无转动地移动，冲击点 P 应距 O 点多远。设每块薄板的边长比为 1:2，冲力与边垂直。

7-113 一个质量为 m ，半径为 R 的均匀圆柱体，受到通过中心的水平力 F 的作用，沿着水平桌面滚动，如图 7-113 所示。当

柱体没有滑动时，

(1) 求质心的加速度；

(2) 设 $m=500$ 克, $R=10$ 厘米, $F=4.0$ 公斤力, $t=0$ 时由静止开始运动, 求 $t=3.0$ 秒时柱体前沿 P 点的速度值。

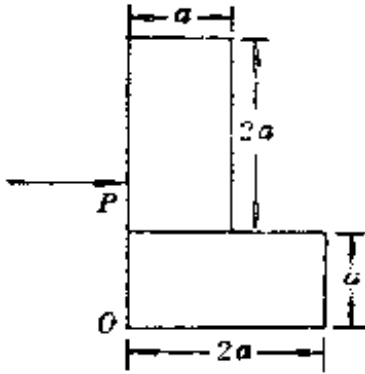


图 7-112

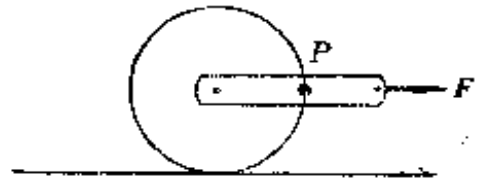


图 7-113

7-114 把一质量分布均匀的小球擦着地面水平地抛出, 球的初速为 7.0 米/秒, 抛出时球不转动。若球与地面间的摩擦系数为 $\mu=0.20$, 问这个球开始作纯滚动时其质心的速率为多少?

7-115 一个绕线圆盘, 半径为 R , 质量为 m , 质量分布均匀, 绕线以后把线的上端悬挂在天花板上, 在重力的作用下向下滚落, 如图 7-115 所示。设绳子长度不变, 绳子质量可略去不计。求盘心下落的加速度 a 和绳中的张力 T 。

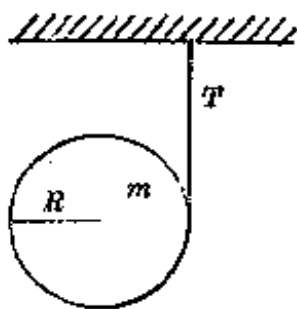


图 7-115

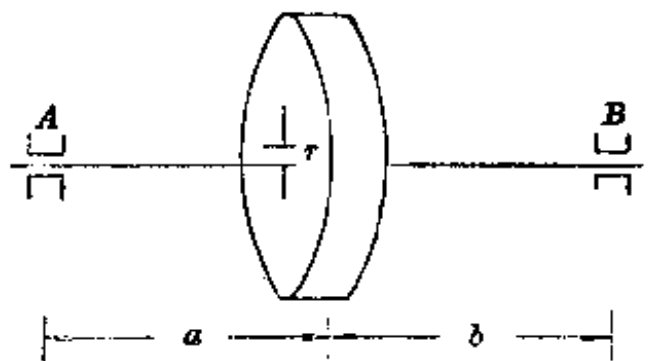


图 7-116

7-116 一个重 98 公斤的偏心轮绕水平轴 AB (几何轴) 转动, 其重心不在转轴上而在离转轴为 $r=0.5$ 毫米处, 轮以每分钟 6000

转的转速转动。设 A 、 B 两轴承到飞轮质心的水平距离分别为 a 、 b ，求下列两种情况下，两轴承所受的力各为多少：

- (1) $a=b=50$ 厘米；
- (2) $a=60$ 厘米， $b=40$ 厘米。

7-117 光滑的水平桌面上放一根长为 l 的均匀细棒，在棒上的某处 P 给棒以与棒垂直的水平冲力 F ，则棒绕 O 点做瞬时转动。

证明： O 点与 F 在质心 C 的两侧且距质心为 $a = \frac{l^2}{12b}$ ， b 为 P 点到质心的距离。

如冲力 F 作用在 O 点，则棒绕何点作瞬时转动？

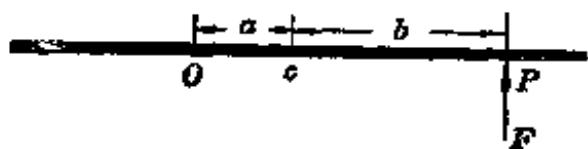


图 7-117

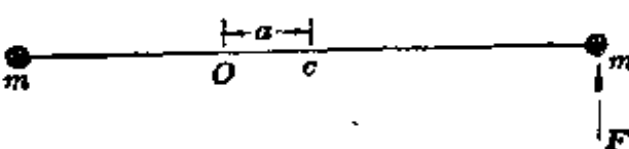


图 7-118

7-118 上题中，如物体是一个细棒两端各有一质量为 m 的质点，问在一端施以垂直于棒的力 F 时，瞬时转动中心 O 与质心 C 之间的距离 a 等于多少？设细棒的质量可忽略不计，棒长为 l 。

§ 7. 杂 题

7-119 一根均匀的板条，重量为 W ，水平并对称地放在三块相同的砖 1、2、3 上，静止不动，如图 7-119 所示。求每块砖所承受的压力。

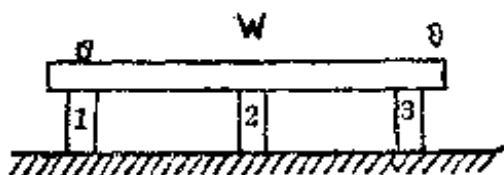


图 7-119

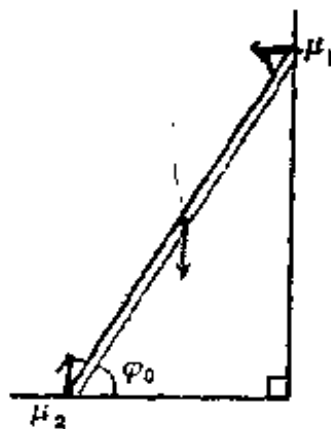


图 7-120

7-120 如图 7-120 所示，一架重量为 100 公斤、分布均匀的梯子靠在一面竖直的墙上，墙与梯子之间的静摩擦系数为 $\mu_1 = 0.25$ ，地面与梯子之间的静摩擦系数为 $\mu_2 = 0.30$ 。若要梯子不滑倒，梯子的最小倾斜角 φ_0 为多少？

7-121 一根长为 $2l$ 的均匀细棒，重为 W ，以匀角速度 ω 在水平面内旋转，转轴是通过中心的竖直轴。求棒内离中心为 x 处的张力。

7-122 水泥电线杆是截顶圆锥体(也叫做圆台)，两端的半径分别为 $r_A = 20$ 厘米、 $r_B = 10$ 厘米，重 2000 公斤，密度均匀。粗端着地，在细端用向上的力 F_B 把它提起，问 F_B 至少应为多少？

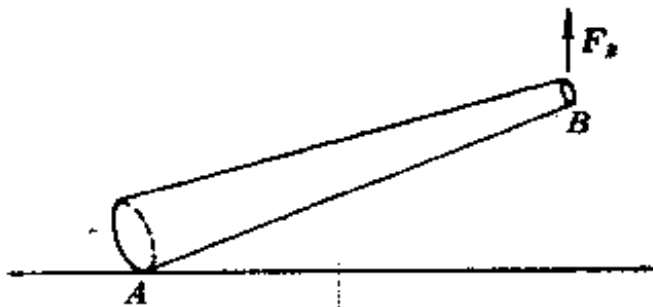


图 7-122

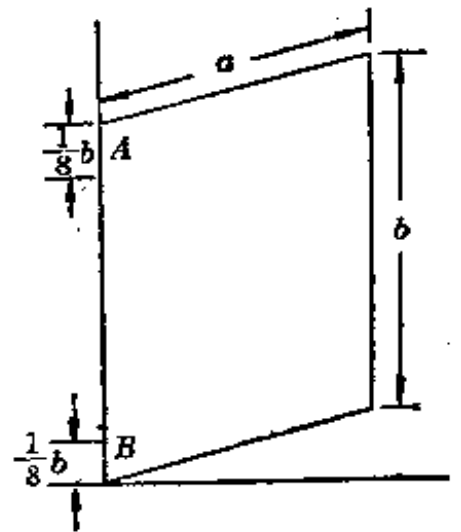


图 7-123

7-123 一宽为 a 、高为 b 、重为 W 的均匀门板由两个铰链 A 和 B 支在门轴上，上下铰链离门的上下两边的距离都是 $\frac{1}{8}b$ ，如图 7-123 所示。当门不动时，

(1) 求作用在 A 、 B 两铰链上的力。设铰链与门之间的摩擦力可略去不计；

(2) 若门轴不垂直，则在什么情况下，当门自己静止时是关着的？什么情况下，门自己静止时是打开的？

7-124 两个质量都是 m 的质点，固定在长为 $2r$ ，质量可略去不计的棒的两端。另有一质量为 M 的质点，到棒的中点 O 的距离

为 $R, R \gg r$, 棒与 R 的夹角为 θ , 如图 7-124 所示。在 M 的万有引力作用下, 试求:

(1) 两质量为 m 的质点所受的力对于棒中心 O 的转矩的近似值 L ;

(2) 设有两个均匀的半椭球体, 每半的质量集中于各自的质心, 求此转矩的大小。已知 $M = 1.98 \times 10^{30}$ 公斤, $m = 2.99 \times 10^{24}$ 公斤, $R = 1.49 \times 10^8$ 公里, $\theta = 23.5^\circ$, 地球半径 $r = 2400$ 公里。

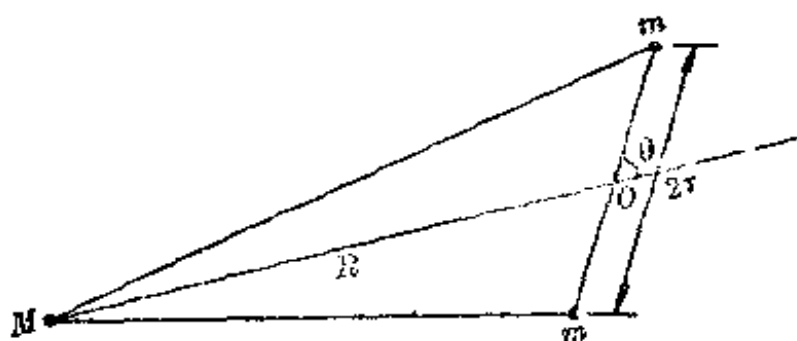


图 7-124

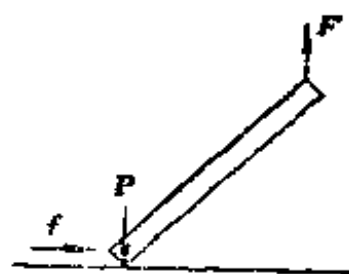


图 7-125

7-125 一根质量为 2.0 公斤的均匀棒的一端受一个竖直向上的力 F , 另一端放在地上, 保持静止不动, 如图 7-125 所示。试求:

- (1) F 的大小;
- (2) 棒对地面的正压力 P 的大小;
- (3) 地面对棒的摩擦力 f 的大小。

7-126 一根均匀细棒的下端 A 放在光滑水平面上, 上端受一竖直向上的力 F , 棒静止不动, 如图 7-126 所示。当力 F 去掉后, 棒就会向下落到地面上。问它下落的方式是下述情况的哪一种?

- (1) A 点不动;
- (2) 中点 C 竖直下落;
- (3) B 点竖直下落;