

自动控制原理

1. 绪论

中科大

1.1 引言

控制：为达到某种目的，对某一对象实施施加需要的操作。

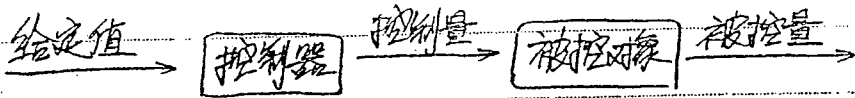
对象：被控物体或过程。

目的：将被控对象的某个或某些变量控制到期望值。

操作：对被控对象实施控制。

两种方式 { 手动控制
 自动控制

自动控制系统 被控对象和控制装置的整体



1.2 反馈控制原理

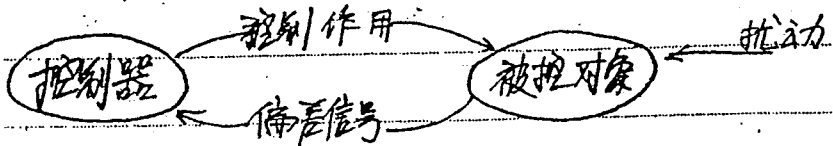
反馈 (feedback)：反向提供信号、信息。

反馈控制：将输出信号反馈到输入端的控制 (闭环控制)。

1. 存在干扰

2. 控制系统本身的惯性。

反馈控制原理：检测到被测量并反馈到系统的输入端，与给定值进行比较，用偏差产生控制量，以减少或消除误差，即偏差控制。



1.3 反馈控制系统的模型组成

执行机构一般需要能源

常用：电机（DC电机，AC电机，步进电机 - 阀）

液压装置（液压缸，液压马达）

气动装置（气缸，气压马达）

1.4 反馈控制的特点

① 抗干扰能力强

② 系统前向通道元件参数变化时，对输出影响小

③ 前向通道元件可降低要求，但反馈元件要好

$$\theta = \frac{K_1 K_2 K_3}{1 + K_1 K_2 K_3 K_f} u_1 \approx \frac{1}{K_f} u_1 \quad (\text{当 } K_1 K_2 K_3 \gg 1 \text{ 时})$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial K_f} = -\frac{1}{K_f^2} u_1 \Rightarrow \frac{\partial \theta}{\theta} = -\frac{\Delta K_f}{K_f}$$

④ 改善了系统的性能，但降低了系统放大倍数

$$\text{开环: } \theta = K_1 K_2 K_3 u_1, \quad \text{闭环: } \theta = \frac{K_1 K_2 K_3}{1 + K_1 K_2 K_3 K_f} u_1$$

⑤ 增加了元器件和系统的复杂性，调试比较困难

⑥ 可能带来不稳定

5. 系统性能要求

① 稳定性

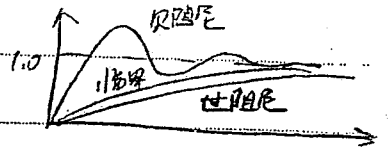
要求系统从一个状态到达另一状态的响应过程

要求具有一定时

要求系统绝对稳定，且有一定的稳定裕量

(2) 瞬态特性

研究一个系统从一个状态到达另一个状态的响应过程，要求具有一定的快速性和响应稳定性。



(3) 稳态性能

系统最终响应的精确度，应限制在工程允许的范围以内。

1.5 自动控制系统的分类

按输入信号的特征分类

- 定值控制系统 $r(t) = \text{const}$
- 随动控制系统
- 程序控制系统

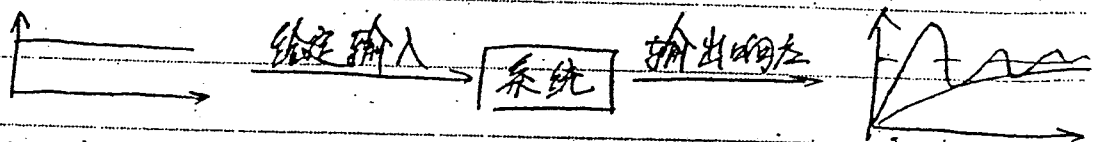
按信号的性质分类

- 连续系统
- 离散系统，如步进电机、计算机控制系统

2. 单变量线性时变系统的数学描述

2.1 引言

1. 数学模型



数学模型 描写系统或元件的动态特性的数学表达式

借助数学模型 → 对控制系统进行分析和设计。

2. 建模方法

- 分析法
- 实验法

2.2 单变量线性定常系统的数学模型描述

一般从系统输入端开始，依次列写，同时考虑负载效应问题。

- 1) 分析系统因果关系
- 2) 对复杂系统，做出合乎实际的假设，使问题简化。
- 3) 根据支配动态特性的基本定律，列写各部分方程
- 4) 消去中间变量，得到输入输出的微分方程。
- 5) 化方程为标准形

1. 电路系统 2. 机械系统 3. 机电系统

电能 \rightarrow 机械能

① 电压控制法：改变电压 \rightarrow 改变电机转速。

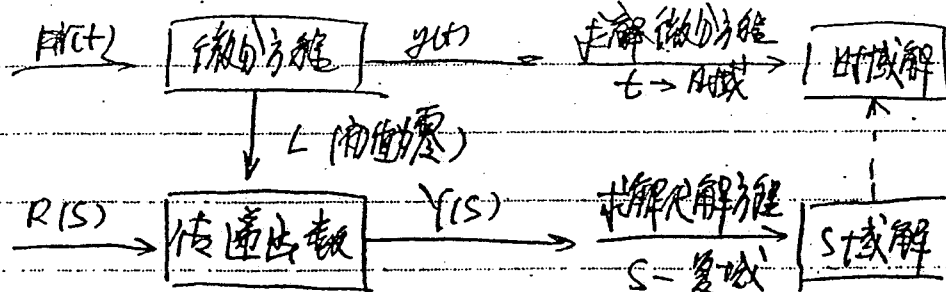
② 磁场控制法：改变励磁电流 \rightarrow 改变电机转速。

抽象数学模型中变量和参数的物理意义，其一般形式为

$$a_n \frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y = b_m \frac{d^m r}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} r}{dt^{m-1}} + \dots + b_1 \frac{dr}{dt} + b_0 r \quad (a_i (1 \leq i \leq n), b_j (1 \leq j \leq m), n \geq m)$$

2. 传递函数

用拉氏变换方法建立系统的数学模型



1. Laplace 变换

$$\text{定义 } f(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ f(t) & t \geq 0 \end{cases}$$

$$L[f(t)] = F(s) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt$$

$$\text{线性性 } L[f_1(t)] = F_1(s)$$

$$\rightarrow L[\alpha_1 f_1(t) + \alpha_2 f_2(t)] = \alpha_1 F_1(s) + \alpha_2 F_2(s)$$

$$L[f_2(t)] = F_2(s)$$

$$\text{微分性质 } L[f^{(n)}(t)] = s^n F(s) - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f'(0) - \dots - s f^{(n-1)}(0)$$

$$\text{终值定理 } \lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s F(s)$$

$sF(s)$ 在 s 的右半平面必须是解析的。

线性常系数微分方程的解：零状态响应 + 零输入响应。

$$G(s) = \frac{L[\text{输出量}]}{L[\text{输入量}]}$$

零初始条件

$$= \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{Q(s)}{P(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0}$$

① 实际控制系统多为零初始条件，即在输入作用加入之前，系统相对静止的，有 $y(0) = y'(0) = \dots = y^{(n-1)}(0) = 0$

② 传递函数只反映由输入引起的那部分输出响应。

③ 输入是在时刻 $t=0$ 以后才作用于系统的，即在 $t \leq 0$ 之前，输入恒为零，有 $r(0) = r'(0) = \dots = r^{(n-1)}(0) = 0$

④ 对于非零初始条件性的影响，可用叠加定理处理，其性能取决于系统的特征方程：

a. 传递函数是系统本身固有的特性，与输入量的大小和性质无关。

b. 传递函数是一阶数学模型，与系统的微分方程相对应，反映

系统的动态特性

c. 传函只描述系统的输入-输出特性，而不能表征系统内部变量的特性

d. 传函是复变量 s 的有理分式，其分母多项式阶次大于或等于分子多项式阶次，系数均为实数，由元件参数组成。

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{k(s+z_1)(s+z_2)\dots(s+z_m)}{(s+p_1)(s+p_2)\dots(s+p_n)}$$

$-z_i$ 系统零点
 $-p_i$ 系统极点

$$= \frac{k(T_1s+1)(T_2s+1)\dots(T_ms+1)}{(T_1s+1)(T_2s+1)\dots(T_ns+1)}$$

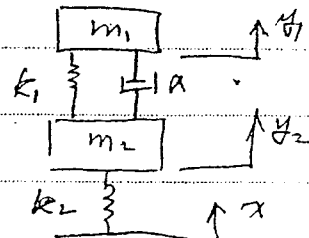
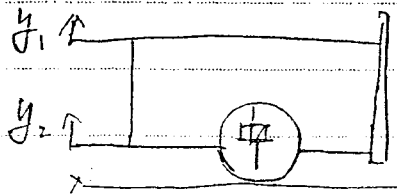
时间常数表示。

k — 系统稳态增益 ($k = G_{TOS} = b_0/a_0$)

k — 系统增益参数，或称根轨迹增益 $k = b_m/a_n$

$k = \frac{k \prod_{i=1}^m z_i}{\prod_{j=1}^n p_j}$ $p(s) = 0$ — 系统特征方程

n — 系统阶次 ($n > m$) 表示系统有 n 个状态变量



输入量 $x(t)$ 输出 $y_1(t)$

对 m_1 $m_1 \ddot{y}_1 + \alpha(y_1 - y_2) + k_1(y_1 - y_2) = 0$

对 m_2 $m_2 \ddot{y}_2 + \alpha(y_2 - y_1) + k_1(y_2 - y_1) + k_2(y_2 - x) = 0$

拉氏变换 $(m_1 s^2 + \alpha s + k_1 + k_2) Y_1(s) - (\alpha s + k_1) Y_2(s) = 0$

整理成因果关系 $(m_2 s^2 + \alpha s + k_1 + k_2) Y_2(s) - (\alpha s + k_1) Y_1(s) = k_2 X(s)$

写成矩阵形式
$$\begin{bmatrix} m_1 s^2 + \alpha s + k_1 & -(\alpha s + k_1) \\ -(\alpha s + k_1) & m_2 s^2 + \alpha s + k_1 + k_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_1(s) \\ Y_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ k_2 X(s) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} Y_1(s) \\ Y_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_1 s^2 + \alpha s + k_1 & -(\alpha s + k_1) \\ -(\alpha s + k_1) & m_2 s^2 + \alpha s + k_1 + k_2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ k_2 X(s) \end{bmatrix}$$

求传递函数

$$G(s) = \frac{Y_1(s)}{X(s)} = \frac{k_2 (\alpha s + k_1)}{(m_1 s^2 + \alpha s + k_1)(m_2 s^2 + \alpha s + k_1 + k_2) - (\alpha s + k_1)^2}$$

$$= \frac{k_2 (\alpha s + k_1)}{m_1 m_2 s^4 + \alpha(m_1 + m_2)s^3 + (m_2 k_1 + m_1 k_1 + m_1 k_2)s^2 + \alpha k_2 s + k_1 k_2}$$

例5 P34

2.3 控制系统方块图

1. 方块图的组织

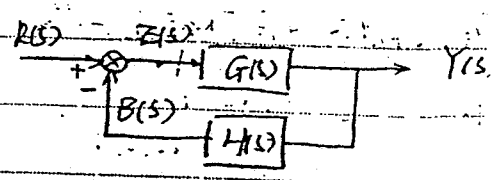
① 方块 表示对输入信号进行的数学运算 $R(s) \rightarrow \boxed{G(s)} \rightarrow Y(s)$

② 相加点 对两个以上信号进行代数运算 $R(s) \xrightarrow{+} \otimes \xrightarrow{+} Z(s)$
 $Y(s) \xrightarrow{-} \otimes$

③ 分支点 表示信号引出和测量的位置 $Y(s) \rightarrow \boxed{} \rightarrow Y(s)$

④ 信号线 为带箭头直线，表明信号传递方向。相

相加点与分支点相邻，不能随便交换。



① 前向传递函数 $= \frac{Y(s)}{R(s)} = G(s)$

② 开环传递函数 $= \frac{B(s)}{R(s)} = G(s)H(s)$

③ 闭环传递函数 $= \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)} = \frac{\text{前向传递函数}}{1 + \text{开环传递函数}}$

④ 误差传递函数 $= \frac{Z(s)}{R(s)} = \frac{1}{1 + G(s)H(s)}$ (用于求稳态误差)

设 $G(s) = \frac{A(s)}{B(s)}$, $H(s) = \frac{M(s)}{N(s)}$

$$则 \frac{B(s)}{E(s)} = \frac{A(s)M(s)}{B'(s)N(s)} = \frac{k(s+z_1)\dots(s+z_m)}{(s+p_1)\dots(s+p_n)} = \frac{k(T_1s+1)\dots(T_ms+1)}{(T_1s+1)\dots(T_ns+1)}$$

→ 开环零点: $-z_i \quad (1 \leq i \leq m)$

开环增益参数: k

→ 开环极点: $-p_j \quad (1 \leq j \leq n)$

$$又 \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{A(s)N(s)}{A(s)M(s)+B'(s)N(s)} = \frac{k(s+\alpha_1)\dots(s+\alpha_k)}{(s+\lambda_1)\dots(s+\lambda_n)}$$

→ 闭环零点: $-\alpha_i \quad (1 \leq i \leq k)$

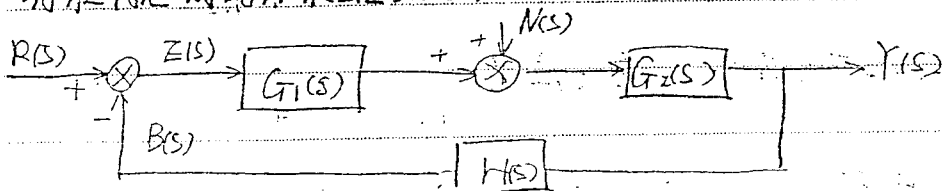
闭环极点: $-\lambda_j \quad (1 \leq j \leq n)$

$$\textcircled{4} \text{ 回路传递函数 } \phi(s) = 1+G(s)H(s) = \frac{A(s)M(s)+B'(s)N(s)}{B'(s)N(s)} = \frac{\phi_c(s)}{\phi_0(s)}$$

→ 闭环特征多项式 $\phi_c(s)$ (奈氏判据中用)

→ 开环特征多项式 $\phi_0(s)$

存在干扰的闭环系统方块图



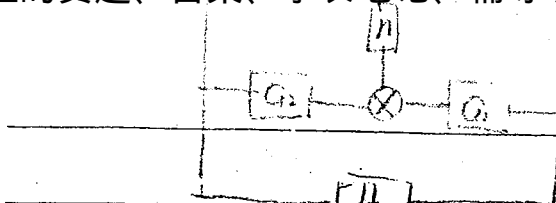
叠加原理: 对每个输入量分别处理 → 系统的总输出

输入作用下的闭环传递函数 ($N(s)=0$)

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{G_1(s)G_2(s)}{1+G_1(s)G_2(s)H(s)} \quad \frac{Z(s)}{R(s)} = \frac{1}{1+G_1(s)G_2(s)H(s)}$$

扰动作用下的闭环传递函数 ($R(s)=0$)

$$\frac{Y(s)}{N(s)} = \frac{G_2(s)}{1+G_1(s)G_2(s)H(s)} \quad \frac{Z(s)}{N(s)} = \frac{-G_2(s)H(s)}{1+G_1(s)G_2(s)H(s)}$$

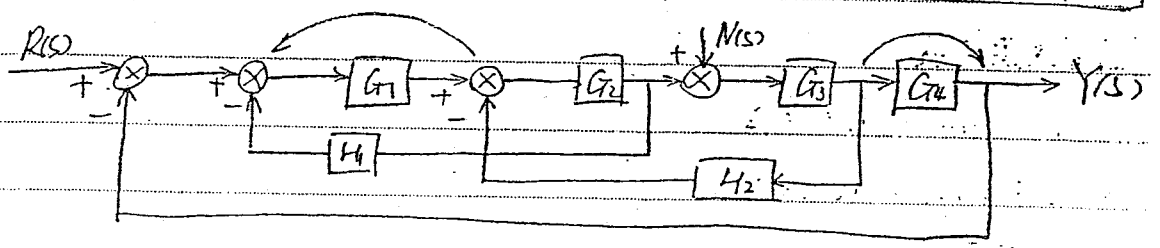


No. _____
Date 5

$$\rightarrow Y(s) = \frac{G_1(s)G_2(s)}{1+G_1(s)G_2(s)H_1(s)} R(s) + \frac{G_2(s)}{1+G_1(s)G_2(s)H_1(s)} N(s)$$

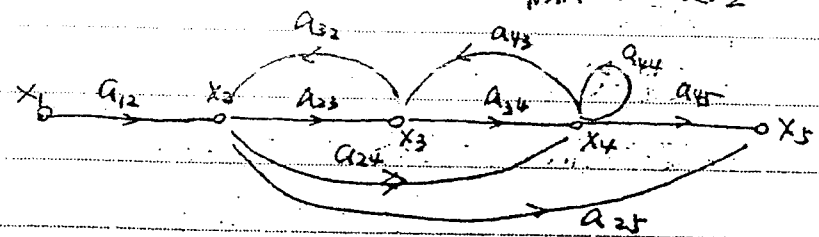
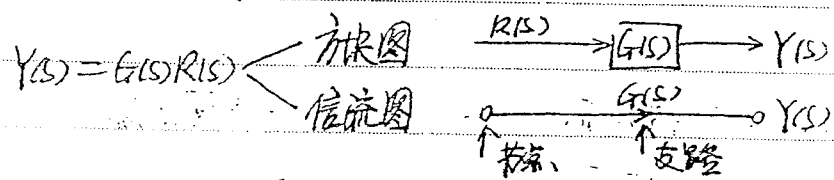
$$Z(s) = \frac{1}{1+G_1(s)G_2(s)H_1(s)} R(s) - \frac{G_2(s)H_1(s)}{1+G_1(s)G_2(s)H_1(s)} N(s)$$

闭环系统的稳定性仅由系统结构参数决定，与输入信号无关
— 线性系统



前向通路的传递函数乘积保持不变
各回路的传递函数乘积保持不变

2.4 信号流图



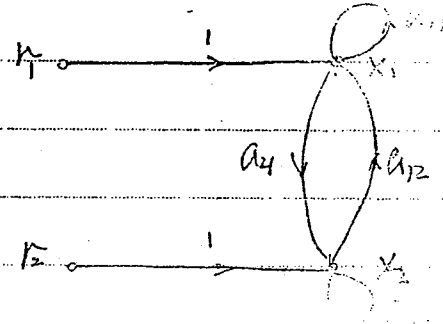
- ① 输入节点又称源点
- ② 输出节点，汇点，解点(坑) 信号传输是单向的。
- ③ 混合节点：既有输入支路又有输出支路的节点。
- ④ 通道：同一节点只经过一次。
- ⑤ 回路通道的终点就是通道的起点，且通道中其他节点只经过一次。

绘制方法

(1) 直接法

微分方程 \rightarrow 代数方程 \rightarrow 整理成因果关系 \rightarrow 信流图

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + r_1 = \dot{x}_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + r_2 = \dot{x}_2 \end{cases}$$



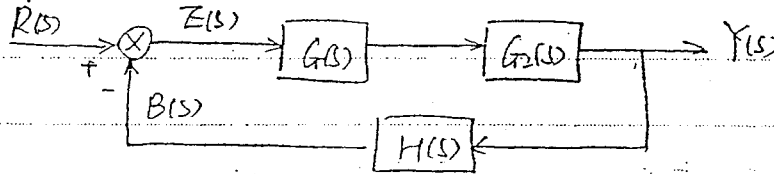
整理成因果关系

$$\begin{cases} x_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + r_1 \\ x_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + r_2 \end{cases}$$

绘制各节点

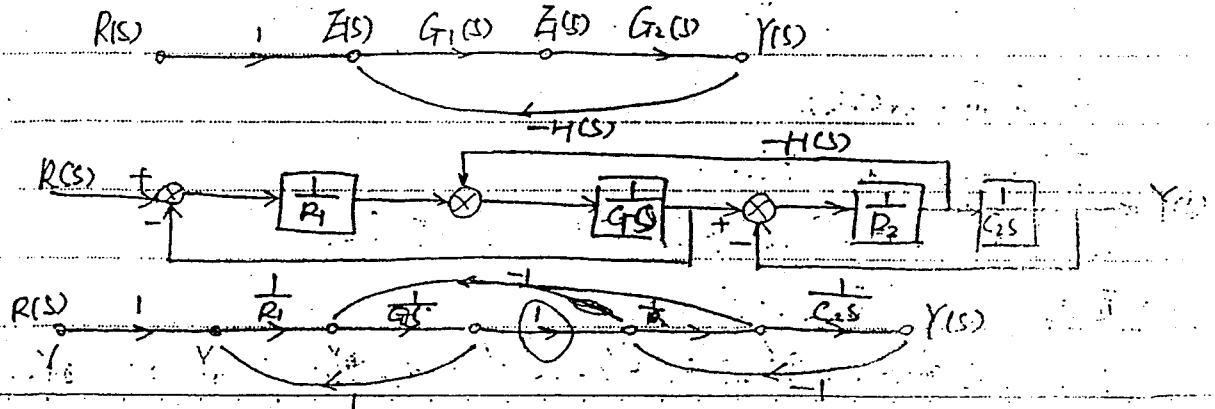
据方程绘制各支路

(2) 看例题法 控制系统方块图 \rightarrow 信流图



方块图：输入端 — 相加点 — 方块 — 输出端
 分支点
 传递线

信流图：源节点 — 混合节点 — 支路 — 汇点



Gram

No. _____
Date 6

→ 拓扑展开 → Mason 公式



方框图中相加点处的负系 → 信流图中的反馈支路增益为负
方框图中相加点和其输入线上的分支点相邻 → 信流图中相邻 P 的两个支路增益为 1

梅逊增益公式

$$P = \frac{1}{\Delta} \sum_{k=1}^N P_k \Delta_k$$

—— 输入输出节点间的总增益

$$\Delta = 1 - \sum L_1 + \sum L_2 - \sum L_3 + \dots$$

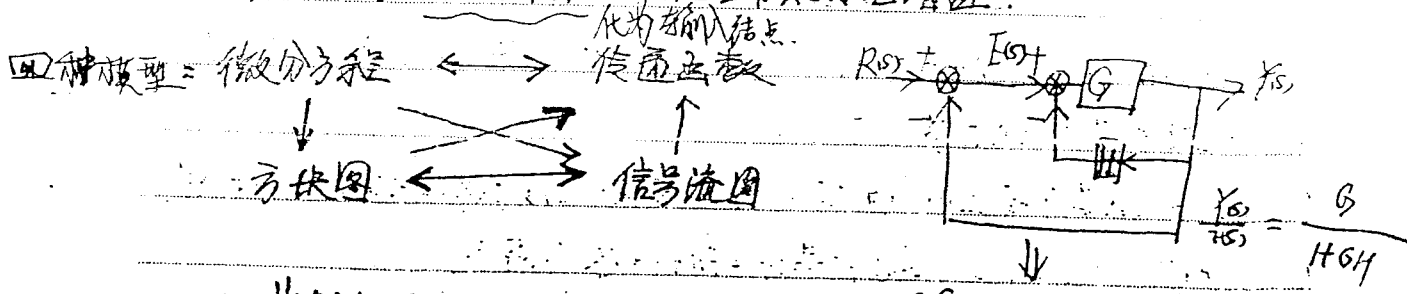
$\Delta = 1$ 各回路 + 两两不相邻 信号流图特征
 P_k 第 k 条前向通道的增益乘积之和
 Δ_k 所有不与前向通道 k 接触的回路增益乘积之和
 Δ 为信号流图的特征式

$$P = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{P_1 + P_2 \Delta_2 + P_3}{\Delta}$$

Δ_k 第 k 条通道的余因式 (从 Δ 中划去第 k 条前向通道接触项)

梅逊公式的几点说明

- ① 可用于写输入节点 → 输出节点的总增益
- ② 可用于写输入节点 → 混合节点的总增益
- ③ 不可直接写混合节点 → 混合节点的总增益



2.5 非线性方程线性化

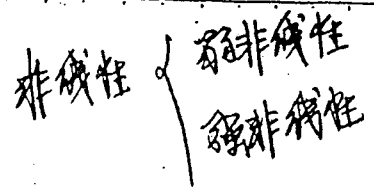
① 线性系统是个相对的概念

假定信号大小在一定范围内、一定精度内，系统是线性的

② 非线性系统处理方法

忽略非线性因素 (弱非线性)

$$\Rightarrow \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{G}{1+G+GH}$$



√非线性系统线性化 (弱非线性)

用线性化数学模型代替原来的非线性模型

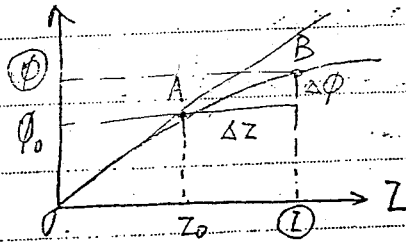
√按非线性方法处理 (强非线性)

对具有典型非线性环节 (如继电器) 的控制系统

采用描述函数、相平面的方法处理

(1) 小偏差线性化概念

电动机励磁回路 $\phi - I$ 之间的关系是饱和曲线



I 工作点：系统正常运行时的状态，如 (I_0, ϕ_0)

小偏差：控制过程中，变量偏离工作点的量值，满足微量要求

分析：在 B 点 $\phi = \phi_0 + \Delta\phi$

$$I = I_0 + \Delta I$$

过 A 点作切线，斜率为 k 。若 $|\Delta I|$ 和 $|\Delta\phi|$ 比较小，则 $|\Delta\phi| = k\Delta I$

线性模型是针对微量而言

ϕ 与 I 的关系是非线性的，但 $\Delta\phi$ 与 ΔI 的关系可近似认为是线性的，将变量

$\phi \rightarrow \Delta\phi$ ， $I \rightarrow \Delta I$ ，就可得到线性的数学模型

——小偏差线性化概念

(2) 线性化方法

① 泰勒级数展开

设 $y = f(x)$ ，一系统稳定的工作点为 (x_0, y_0)

$$y = e^x$$

$$y_0 = e^{x_0}$$

$$1 + 1 \cdot x + \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot x^2 + \frac{1}{6} \cdot 1 \cdot x^3 + \dots$$

No. _____

Date _____

7

$$\text{则 } y = y_0 + \left. \frac{dy}{dx} \right|_{x_0} (x - x_0) + \frac{1}{2!} \left. \frac{d^2y}{dx^2} \right|_{x_0} (x - x_0)^2 + \dots$$

$$\text{令 } \Delta x = x - x_0 \quad \Delta y = y - y_0$$

$$\text{则 } \Delta y = \left. \frac{dy}{dx} \right|_{x_0} \Delta x + \frac{1}{2!} \left. \frac{d^2y}{dx^2} \right|_{x_0} (\Delta x)^2 + \dots$$

系统运动过程中， $|\Delta x|$ 、 $|\Delta y|$ 一直保持很小，则取一阶近似。

$$\Delta y = \left. \frac{dy}{dx} \right|_{x_0} \Delta x = k \Delta x \quad \text{—— 线性化方法}$$

② 设 $y = f(u, x)$ ，工作点 (u_0, x_0, y_0)

$$y = y_0 + \left. \frac{\partial f}{\partial u} \right|_{(u_0, x_0)} (u - u_0) + \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{(u_0, x_0)} (x - x_0) + \dots$$

$\Delta y = k_1 \Delta u + k_2 \Delta x$ —— 线性化方程。对于反馈控制系统，在运行

问题 ① 不确定性 ② 大信号不稳定 情况下，是在小信号工作，有

(3) 系统线性化的条件和步骤。 各种近似处理方法是有

条件：① 系统工作在一个正常的工作状态，有一个稳定的工作点。

② 运行过程中，偏差量满足小偏差条件。

③ 非线性函数在工作点处各阶导数或偏导数存在。

在工作点邻域内，将非线性函数以偏差量的形式表示成线性函数

步骤：

1. 列写系统各部分的微分方程。

2. 确定系统的工作点，并分别求出工作点处各变量工作状态。

3. 对非线性函数，如果符合线性化条件，则进行线性化处理。

4. 将其余线性方程，按偏差量形式处理。

原则 { 对变量直接用偏量形式写出。
 对常量因其偏量为零，故消去此项。

5. 联立所有的偏量化方程，消去中间变量 → 答系统输入和输出间的偏量形式的线性方程。

6. 拉氏变换 → 系统传递函数。

§3. 单变量线性定常系统的性能指标

3.1 对控制系统的基本性能要求

稳定性：是系统工作的前提条件

瞬态特性：系统从初态到终态的过渡过程的快速性和平稳性。

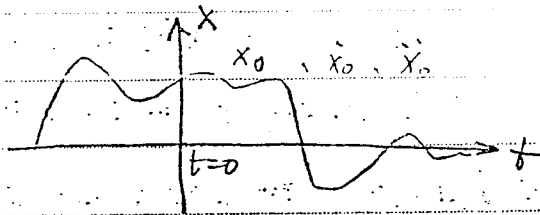
稳态特性：稳态系统最终可能达到的控制精度。

灵敏度、可靠性、经济性等 —— 稳、快、准。

3.2 控制系统的稳定性

3.2.1 稳定性的基本概念

稳定性由说明：扰动



概念 2. 一个原来平衡的系统，在常值输入作用下，经过一定的时间后，当扰动消失时，系统达到一个新的常值的系统是稳定的。

3.2.2 稳定性的数学描述

1. 系统的输出响应

$$Y(s) = \frac{Q(s)}{P(s)} R(s) + \frac{D(s)}{P(s)} = Y_{zs}(s) + Y_{zs}(s) \rightarrow h(t) = L^{-1}[Y(s)]$$

扰动 1. 一个原来处于平衡状态的系统，受到扰动后，当扰动消失时，系统回到原来的平衡状态，则该系统是稳定的。

研究系统的稳定性、瞬态特性、稳态特征

$$\text{设 } R(s) = \frac{V(s)}{U(s)} = \frac{V(s)}{(s+p_1)(s+p_2)\dots(s+p_n)}$$

$$\text{则 } Y(s) = \frac{M(s)}{(s+p_1)\dots(s+p_n)(s+m_1)\dots(s+m_r)}$$

部分分式展开 PFE (P.73-74)

设系统有一对共轭复极点，无实极点，其余为单实极点。

则 Y(s) 的部分分式展开式为

$$Y(s) = \frac{B_1s+B_2}{(s+p_1)(s+p_2)} + \sum_{i=3}^{k-1} \frac{A_i}{s+p_i} + \left[\frac{A_k}{(s+p_k)^2} + \frac{A_{k+1}}{(s+p_k)^3} + \dots + \frac{A_n}{(s+p_n)} \right]$$

如何求留数 $A_i, B_1, B_2, A_{rk} \dots$ 求 p_3

单实极点 $p_j = Y(s) (s+p_j) |_{s=-p_j}$

$$A_j = Y(s) (s+p_j) |_{s=-p_j}$$

共轭复极点，令 $p_1 = \alpha + j\beta$ $p_2 = \alpha - j\beta$

则在上式两边同乘 $(s+p_1)(s+p_2)$ 并取极限得

$$(B_1s+B_2) |_{s=-p_1} = Y(s) (s+p_1)(s+p_2) |_{s=-p_1}$$

→ 另复数方程 → 分离实部、虚部 → B_1, B_2

重极点: $A_{rk} = Y(s) (s+p_k)^k |_{s=-p_k}$

$$y(t) = L^{-1}[Y(s)]$$

$$= B_1 e^{-\alpha t} \cos \beta t + \frac{B_2 - B_1 \alpha}{\beta} e^{-\alpha t} \sin \beta t + \sum_{i=3}^{k-1} A_i e^{-p_i t}$$

$$+ (A_n + A_{n+1} t + \dots + \frac{A_{k-1}}{(k-2)!} t^{k-2} + \frac{A_k}{(k-1)!} t^{k-1}) e^{-p_k t} + \sum_{j=1}^r B_j e^{-p_j t}$$

输出 y(t) 的特点:

① 指数函数 $e^{-\pi t}$ $e^{-\alpha t}$ $e^{-\beta t}$ 分别是系统闭环极点，复极点实部输入极点

② 当系统的极点具有负实部时，则 $t \rightarrow \infty$ 时 $y(t) \rightarrow 0$ 表示了系统的稳定性、快速性

③ 零点与 $y(t)$ 中各响应分量大小有关

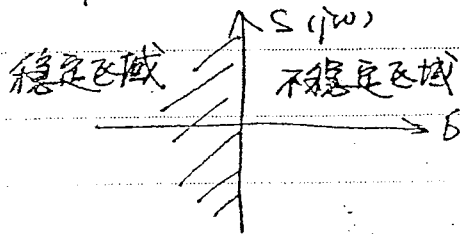
线性定常系统渐近稳定的充分必要条件

系统的全部极点位于 s 左半开平面，即系统特征方程的根都具有负实部

1. 渐近稳定 系统极点分布 $Y(s) = \frac{D(s)}{P(s)}$

有界输入—有界输出稳定
2. B_1, B_0 稳定 \sim 传递函数极点分布 $Y(s) = \frac{D(s)}{P(s)} R(s)$

渐近稳定 $\Rightarrow B_1, B_0$ 稳定 无零点、极点相消时，两者等价



虚轴上有极点，属临界稳定

例 ~~用~~ 确定系统期

3.23 稳定性结论

1. B_1, B_0 稳定： \sim 传递函数极点分布

渐近稳定： \sim 系统极点分布

* 系统渐近稳定则 B_1, B_0 稳定

* 无零极点相消时，两者等价

2. 稳定性 \sim 极点分布

3. 稳定性取决于系统的结构和参数，而与扰动、输入无关，输入只影响系统的稳态分量

3.3 劳斯判据

线性系统稳定的充要条件：极点分布

由系数来判断特征根的分布，由此得到一系列判别判据

① 代数判据

Routh, Hurwitz, Lienard-Chipart

② 几何判据

以 Nyquist 为基础的一系列方法

③ 系统稳定的充要条件

引理：特征方程 $D(s) = a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0 = 0$

则为系统稳定的必要条件是全部系数必须同号且不为零 ($a_0 \neq 0$)

2. Routh 判据 — 系统稳定的充要条件

① 列出系统闭环特征式

$$D(s) = a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0$$

② Routh 阵列

s^n	a_n	a_{n-2}	a_{n-4}	
s^{n-1}	a_{n-1}	a_{n-3}	a_{n-5}	
s^{n-2}	b_1	b_2		$b_1 = \frac{a_{n-1}a_{n-2} - a_n a_{n-3}}{a_{n-1}}$
s^{n-3}	c_1	c_2		$b_2 = \frac{a_{n-1}a_{n-4} - a_n a_{n-5}}{a_{n-1}}$
\vdots				
s^0	a_0			$c_1 = \frac{b_1 a_{n-3} - b_2 a_{n-1}}{b_1}$

③ 判据内容：

- 若第一列 (劳斯系数) 同号且不为 0，则系统稳定。
- 若有异号，则不稳定。右半平面闭环极点个数等于变号次数。

3. 特殊情况：(首列)

① 若某行出现零元素，而其他元素不为0

方法：用该行正数，代替零元素，然后按常规处理

② 若某行全部为0。(若元素只有1，则也归为这种情况)

方法：用副对角行构成辅助多项式 $F(s) \Rightarrow$ 用 $F(s)$ 的系数代替全

零行的元素 \rightarrow 继续。

③ 这种情况下若首列全正，则应当在解辅助多项式 $= 0$ 的方程的解

由此得出的解中必有一对是关于0对称的，若为实根则为临界

稳定。

4. Routh 判据应用

(1) 相对稳定性分析 (检验稳定裕量)

稳定性 { 绝对稳定性：系统稳定，不稳定还是临界稳定
相对稳定 \sim 根极点与虚轴的最小距离

{ 系统稳定裕量
瞬态响应稳定性。

方法：左移虚轴 σ ，即令 $s = z - \sigma$ ， \Rightarrow 代入 $D(s) \rightarrow$ 得特征方程 $F(z)$

\rightarrow 对 $F(z)$ 用 Routh 判据

① 若 $F(z)$ 首列元素同号 \Rightarrow 系统拥有 σ 的稳定裕量

② 若 $F(z)$ 首列元素变号 \Rightarrow 系统不具有 σ 的稳定裕量

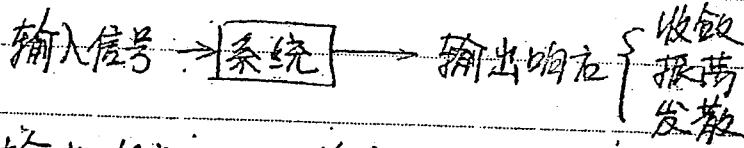
③ 若 $F(z)$ 出现全零行，用辅助多项式处理后，首列元素不变号

\Rightarrow 系统刚好有 σ 的稳定裕量

(2) 求系统做斜下稳定... P34 例

3.4 控制系统的瞬态特性

1. 瞬态响应



输出响应 $y(t)$ $\left\{ \begin{array}{l} \text{瞬态响应: 初态} \rightarrow \text{终态的动态过程} \\ \text{稳态响应: } t \rightarrow \infty \text{ 时系统输出状态} \end{array} \right.$

瞬: 提供系统的稳定性、响应速度、阻尼大小等信息。

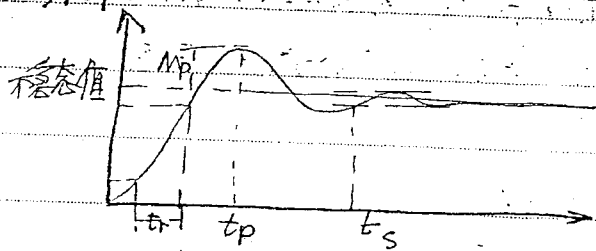
稳: 提供控制的精度。

2. 瞬态响应指标

约定: ① 单位阶跃输入下研究系统响应。

② 零初始条件。

得到曲线:



超调量 M_p 表明了平稳性, 其他时间表明了快速性。

3.5 控制系统稳态特性

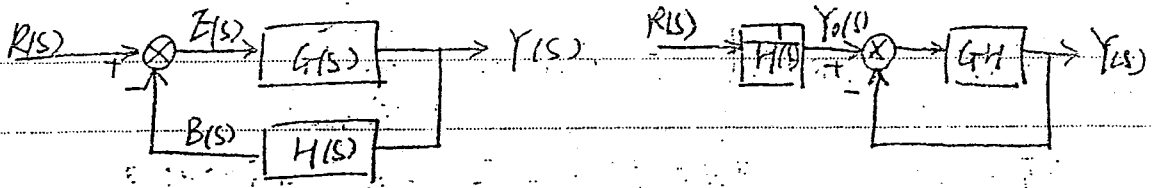
表征 $\left\{ \begin{array}{l} \text{对输入信号的跟踪能力} \\ \text{对扰动信号的抑制能力} \end{array} \right. \Leftrightarrow \text{采用稳态误差来衡量}$

影响稳态误差的因素:

- 输入信号
- 干扰信号
- 元件固有非线性
- 元件的老化和磨损 (原理性误差)

1. 稳态误差的基本概念

(1) 误差的定义



① 输出端定义：误差 = 期望输出 - 实际输出
($Y_0(s)$)

$$Z_0(s) = Y_0(s) - Y(s) = \frac{1}{H(s)} R(s) - Y(s)$$

② 输出端定义：偏差 = 给定输入 - 反馈信号

$$E(s) = R(s) - B(s) = R(s) - H(s)Y(s)$$

误差 $Z_0(s)$ 与偏差 $E(s)$ 的关系： $Z_0(s) = \frac{1}{H(s)} E(s)$

误差与偏差存在简单的比例关系，但偏差可以测量，误差不能测量。

对单变量系统，定义 $Z(s)$ 为系统的误差。

(2) 稳态误差的定义

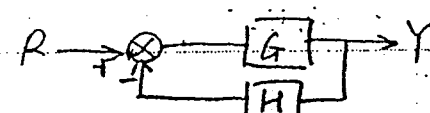
$$\text{误差 } e(t) = \mathcal{L}^{-1}[Z(s)] = r(t) - b(t)$$

$e(t)$ { 瞬态分量：与系统极点对应，体现系统进入稳态之前的误差信号变化
稳态分量：与输入极点对应，体现稳态误差

$$\text{系统稳态误差 } e_{ss} = \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s Z(s)$$

条件： $sZ(s)$ 在右半平面解析，即所有极点位于复左半平面。

2. 稳态误差的计算方法

(1)  $e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} s \left[\frac{1}{1+GH} \right] R(s)$

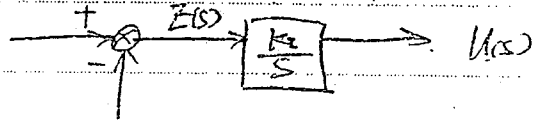
No. _____

Date _____

(2) 积分控制

$$u(t) = k_i \int_0^t e(t) dt$$

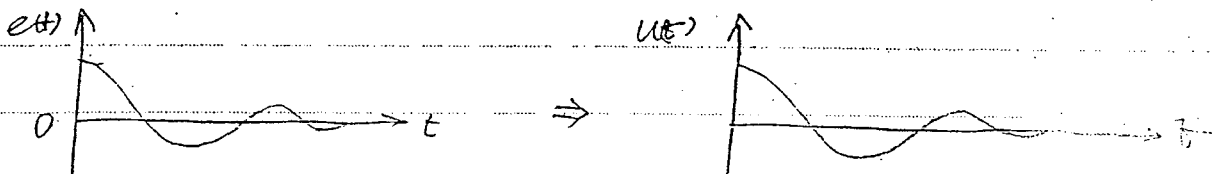
$$\rightarrow \frac{U(s)}{E(s)} = \frac{k_i}{s}$$



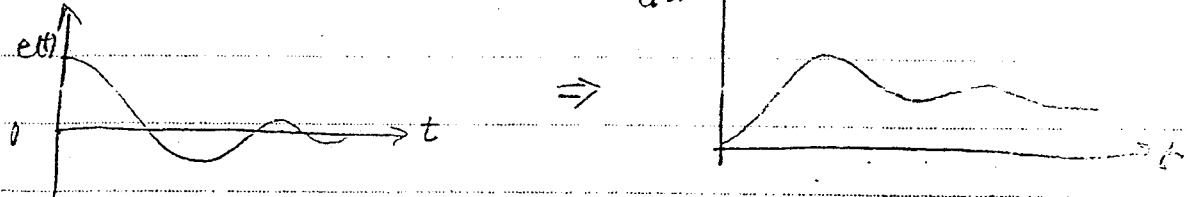
作用：提高系统的类型，改善系统的稳态性能，但使稳定性变差（引入 $0-90^\circ$ 相角）

如果系统中不存在积分环节，则对其只进行比例控制时，系统的输入响应存在稳态误差。

比例控制



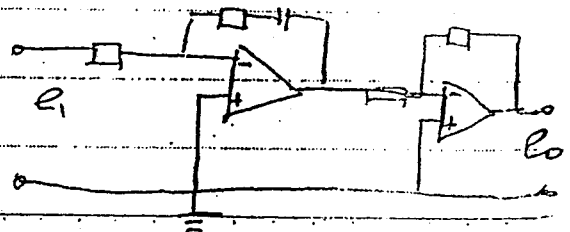
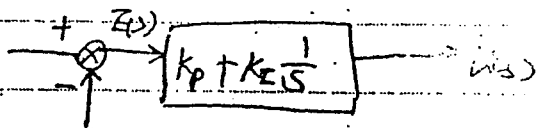
积分控制



(3) 比例-积分控制

$$u(t) = k_p e(t) + k_i \int_0^t e(t) dt$$

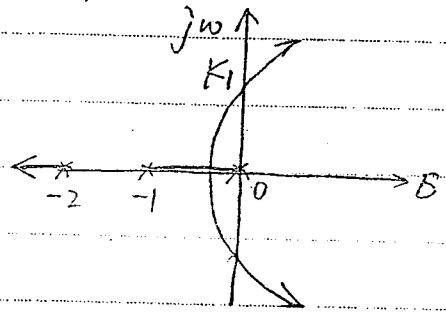
$$\rightarrow K(s) = k_p + k_i \frac{1}{s} = k_p \frac{s + k_i/k_p}{s}$$



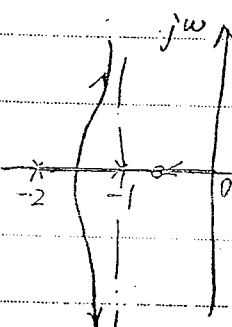
作用：有 K_p 和 K_d 两个可调参数，适当选择就有可能使系统既稳定又有较好的稳态和动态性能

例 9-1 系统开环传函 $G(s) = \frac{k}{(s+1)(s+2)}$

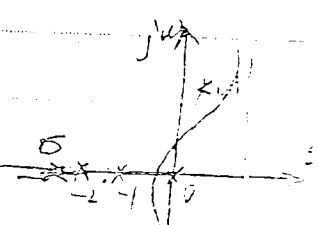
解：① 取 $K(s) = \frac{1}{s}$ ② 取 $K(s) = \frac{s+2}{s}$



$K > 1$ 不稳定



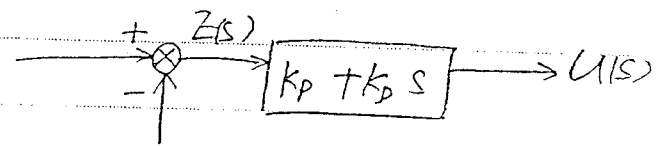
$K > 0$ 均稳定



$K < 1$ 不稳定
(K_1 / K_p 接近)

(4) 比例-微分控制

$$u(t) = k_p e(t) + k_d \cdot \frac{de(t)}{dt}$$



$$\rightarrow k(s) = k_p + k_d \cdot s = k_d (s + z)$$

作用：改善系统的稳定性和瞬态性能。

注意：微分作用不能单独使用。??

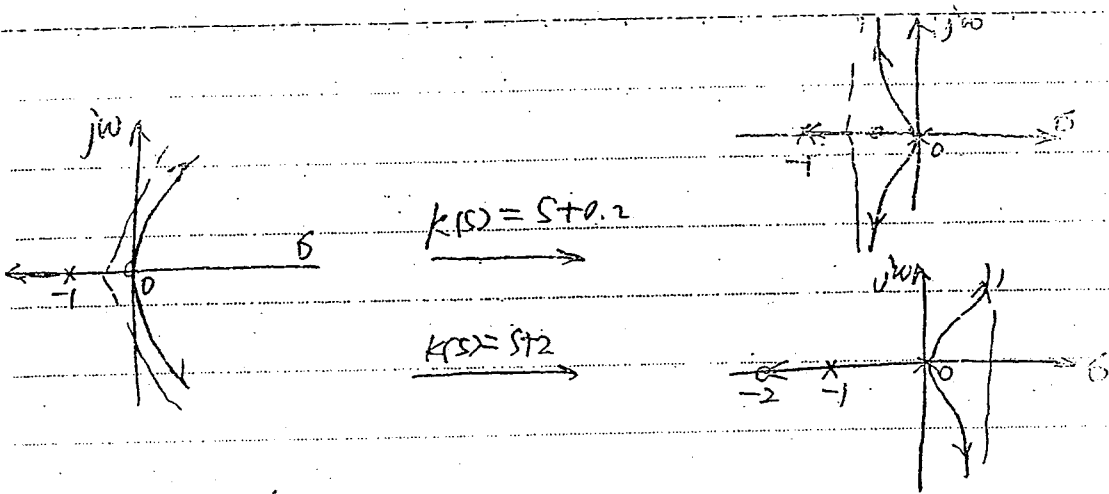
$$K(s) = k_d s \rightarrow u(t) = k_d \frac{de}{dt}$$

- 微分控制是基于误差的变化速度，而不是基于误差本身
- 放大噪声。

例 9-2 $G(s) = \frac{k}{s^2(s+1)}$

No. _____

Date _____



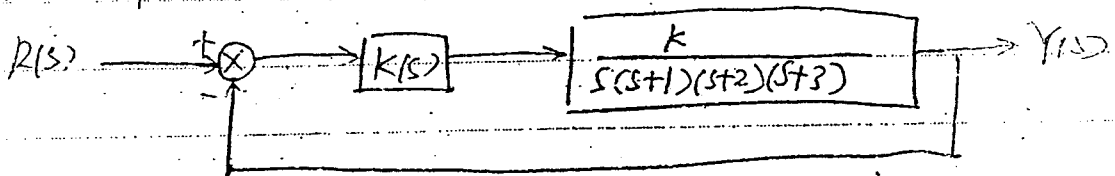
(5) 比例-积分-微分控制

$$K(s) = K_p + K_i \frac{1}{s} + K_d s = K_D \frac{(s+z_1)(s+z_2)}{s}$$

作用：PID控制器是由比例、积分、微分等基本控制规律组成的，它具有各种单独控制的优点。

模

例 9-3 (P300) 控制系统框图

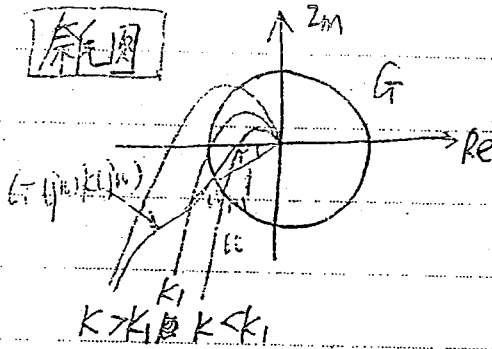


采用 PD、PI 和 PID 三种方法校正系统，并比较结果。

解：

9.4 频域法串联校正

奈氏图



$k < k_1$ 系统稳定

瞬态满足要求，但稳态误差较大

$k = k_1$ 系统临界稳定

$k > k_1$ 系统不稳定

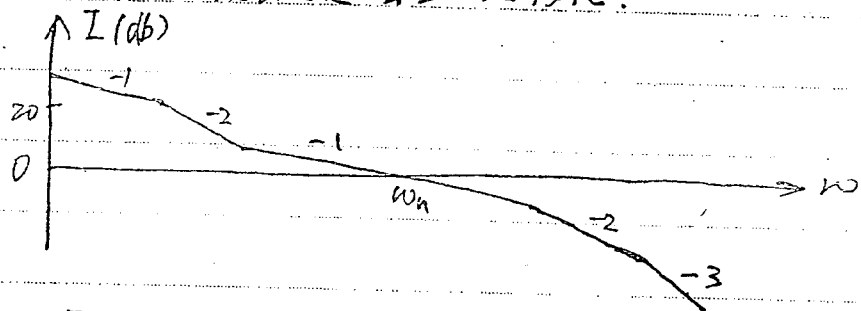
调节 $k \rightarrow$ 设计 $K(s)$ ，改变开环频率特性曲线的形状

超前校正 — 在中高频段提供正相角。

滞后校正 — 在高频段进行幅值衰减

\rightarrow 校正后系统，低频段增益足够大。

伯德图



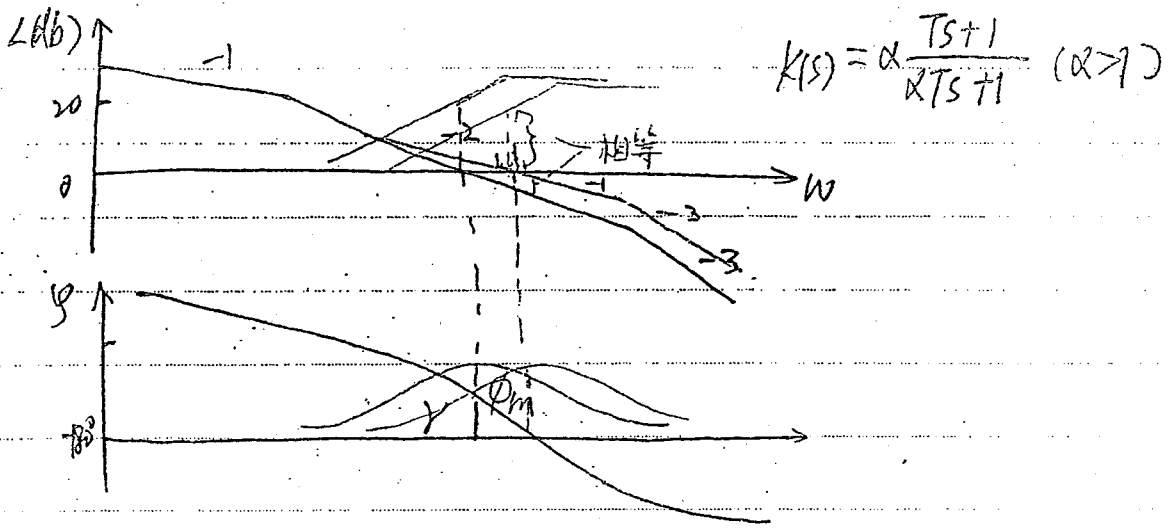
- 低频段：高增益，即 $|K(j\omega)G(j\omega)| \gg 1$ ，以满足稳态性能要求。
- 中频段：在 ω_n 点，以 -20db/dec 的斜率穿过 0db 线，并占据比较宽的范围，以保证具有适当的相位裕量 γ ，满足瞬态性能要求和稳定。
- 高频段：增益尽快衰减，以削弱噪声影响，抗干扰性好。

9.4.1 超前校正

1. 设计问题 利用超前校正装置的相位超前特性，将系统原相频特性提高 ϕ_m 度，使校正后系统的相位裕量满足 γ 要求

No. _____

Date _____



2. 超前校正装置频率特性

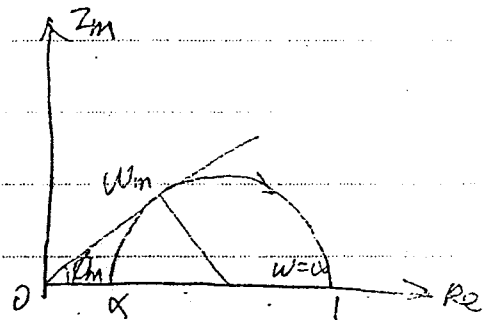
超前校正装置传递函数： $K(s) = \alpha \frac{Ts+1}{\alpha Ts+1} \quad (\alpha < 1)$

• 幅相特性

$$A = |K(s)| = \alpha \frac{\sqrt{T^2\omega^2+1}}{\sqrt{\alpha^2 T^2\omega^2+1}}$$

$$\phi = \angle K(s) = \arctan T\omega - \arctan \alpha T\omega > 0$$

最大相位超前角 ϕ_m :



过原点作半圆切线，切点频率 ω_m ，对应相角 ϕ_m 。

正弦定理， $\frac{\sin \phi_m}{\frac{1-\alpha}{2}} = \frac{\sin 90^\circ}{\frac{1+\alpha}{2}} \rightarrow \boxed{\sin \phi_m = \frac{1-\alpha}{1+\alpha}} \quad \textcircled{1}$

• 对频率特性

串入增益 $1/\alpha$ 的放大器 $\rightarrow K(s) = \frac{Ts+1}{\alpha Ts+1}$

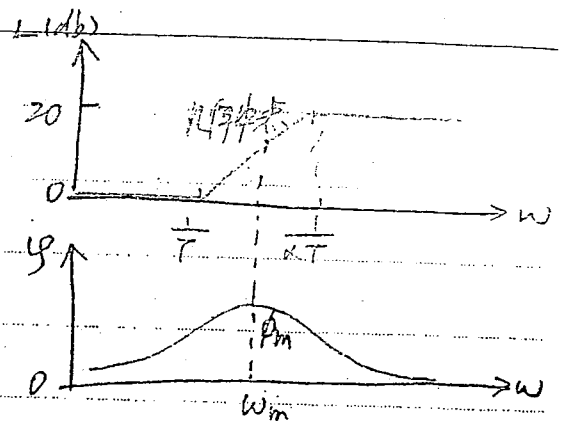
$$\log \omega_m = \frac{1}{2} (\log \frac{1}{T} + \log \frac{1}{\alpha T})$$

$$\omega_m = \frac{1}{\sqrt{\alpha} T} \quad \text{②}$$

— 校正后系统增益交界频率

$$A = |K(j\omega)|_{\omega=\omega_m} = \frac{\sqrt{1+\alpha}}{\sqrt{\alpha+1}} = \frac{1}{\sqrt{\alpha}}$$

$$L = 10 \log \frac{1}{\alpha} \quad \text{③}$$



K_D 引入后，使系统的增益交界频率右移 ($\omega_{m1} \rightarrow \omega_{m2}$) 故校正 γ_m 要留有裕量。

3. 校正步骤

- (1) 根据稳态误差要求，确定开环增益 K 。
- (2) 在此 K 值下作未校正开环系统的 Bode 图，确定 ω_{m1}, γ_1 。
- (3) 确定 $K(s)$ 提供的超前角 ϕ_m $\phi_m = \gamma - \gamma_1 + \beta$
 γ : 给定的相位裕量
 γ_1 : 未校正系统的相位裕量 ($\gamma_1 = 180^\circ + \angle G(j\omega_{m1})$)
 β : 安全裕量 $5^\circ \sim 12^\circ$
- (4) 确定 α $\sin \phi_m = \frac{1-\alpha}{1+\alpha} \rightarrow \alpha$ 。
- (5) 确定校正后系统的增益交界频率 ω_{m2}
 $10 \log \frac{1}{\alpha} = A \rightarrow \omega_{m2}$
 — $20 \log |G(j\omega)| = -A$ 对应的频率
- (6) 确定 T

No.

Date

$$\omega_{PIZ} = \frac{1}{\sqrt{\beta}T} \rightarrow T \rightarrow K(s) = \frac{Ts+1}{\sqrt{\beta}Ts+1}$$

(7) 作出校正后的开环 Bode 图。

如 γ 不满足要求，则返回第 3 步，修改 β 后继续计算。

(8) 求闭环频率指标 ω_0, M_r (利用尼氏列线图)

(9) 闭环仿真

例 9.8 P325 已知系统的开环传递函数为

$$G(s) = \frac{K}{s^2(0.2s+1)}$$

试设计超前校正装置，满足： $K_a = 10s^{-2}$ ； $\gamma = 35^\circ$

解：① 确定 K 值 $10K_a = 10 \rightarrow K(s) = \frac{10}{s^2(0.2s+1)}$

② 画 $G(s)$ 的 Bode 图

$20 \log K =$
解法见课本。

小结：超前校正利用正相角，使系统稳定

9.4.2 滞后校正

1. 设计问题

滞后校正的主要作用在中高频段造成幅值衰减，从而使系统获得足够的相角裕量。

相位裕量：

$$\text{滞后校正传递函数 } K(s) = \frac{Ts+1}{\beta Ts+1} \quad (\beta > 1)$$

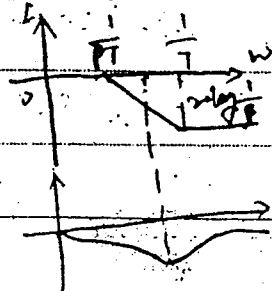
① 低频： $L = 0 \text{ dB}$

② 高频： $L = 20 \log \beta < 0 \text{ dB}$

在未校正系统的对数幅频特性上，寻找满足指标。

要求的相位裕量 $\gamma \rightarrow$ 截止频率 ω_{PIZ} ：校正后 ω_{PIZ} 需落在交界频率。

ϕ_m



No.

Date

71

2. 滞后-超前校正的步骤

(1) 确定满足稳态性能指标的AK值

(2) ω_m, γ Bode图 (未校正)

(3) ω_m 确定校正后 ω_m 增益交界频率 ω_{m2}

在 ω_{m2} 处 $\angle G(j\omega_{m2}) + \angle K(j\omega_{m2}) = -180^\circ + \gamma$

$$\angle K(j\omega) = k_1(j\omega)^2 + k_2(j\omega)^{-1}$$

(4) 确定滞后校正部分 $k_1(s)$

$$\frac{1}{\beta} = \left(\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\beta} \right) \omega_{m2} \Rightarrow \frac{1}{\beta T_1}$$

$\beta = 10$

(5) 确定超前部分 $k_2(s)$

$$\alpha = \frac{1}{\beta} \rightarrow \alpha_m = \frac{1}{\alpha} \frac{\omega_{m2}}{\omega_{m1}} \quad (\text{其中 } \alpha < \gamma \text{ 重新计算 } 3, 4 \text{ 步})$$

$$\text{确定 } \frac{1}{T_2}, \frac{1}{\alpha T_2}$$

在 Bode 图上, 找 $L(\omega_{m2})$

过点 $(\omega_{m2}, L(\omega_{m2}))$ 作斜率为 20 dB/dec 直线

$$\text{交界频率: } L = 20 \text{ dB} \rightarrow 1/T_2$$

$$L = 0 \text{ dB} \rightarrow 1/\alpha T_2$$

(6) 画出 $G(s) = |G(s)G_1(s)|$ 的 Bode图, 校验 ω_{m2}, γ

2.4.4 总结:

1.

2. 超前改善瞬态性能

ω_m 变大 $\rightarrow \omega_c$ 变大 $\rightarrow t_r$ 减小

零极点靠近 \rightarrow 系统带宽增加 \rightarrow 系统体积和重量 \downarrow \rightarrow 成本 \downarrow

3. 滞后校正改善稳态性能

降低高频增益 \rightarrow 系统噪声 \downarrow \rightarrow 改善稳态精度

系统带宽减小 \rightarrow 滞后校正补偿

4. 两者一起

在 ω_m 处 { 校正超前
中高频衰减特性

① 在此条件下作未校正开环Bode图，确定校正后增益交界频率 ω_{m2} 。
 满足： $\angle G(j\omega_{m2}) = -180^\circ + \gamma + 0$
 $\gamma =$ 指标要求中的相位裕量值：

② 确定 β 增益裕量 (补偿 K_{s1} 在 ω_{m2} 处产生的相角，一般 $5 \sim 15^\circ$)

③ 确定 β $20 \log |G(j\omega_{m2})| = 20 \log \beta \rightarrow \beta$

④ 确定 T ： $1/T = 10.1 \sim 0.2 \omega_{m2}$

- (5) 画 $R(s) = K(s)G(s)$ 的Bode图，校验 γ 值；
- (6) 如需要可作 $R(s)$ 的相位图 $\rightarrow M_r, \omega_r$
- (7) 闭环频 \rightarrow 时域指标

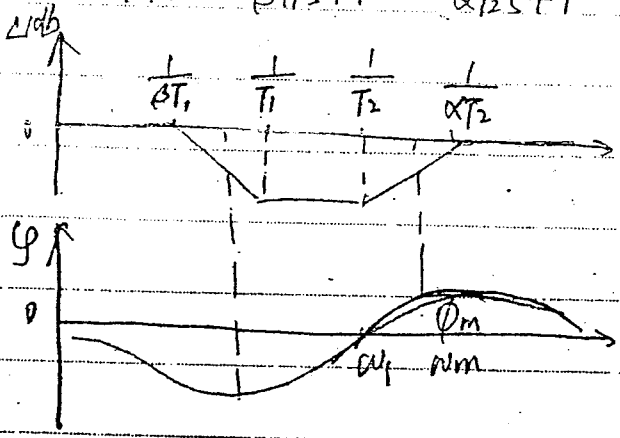
例 9.9 (P328)

9.4.3 滞后-超前校正

1. 滞后-超前校正装置的频率特性

滞后-超前校正装置的传递函数表：

$$K(s) = \frac{T_1 s + 1}{\beta T_1 s + 1} \cdot \frac{T_2 s + 1}{\alpha T_2 s + 1} \quad (\beta = \frac{1}{\alpha} > 1, T_1 > T_2)$$

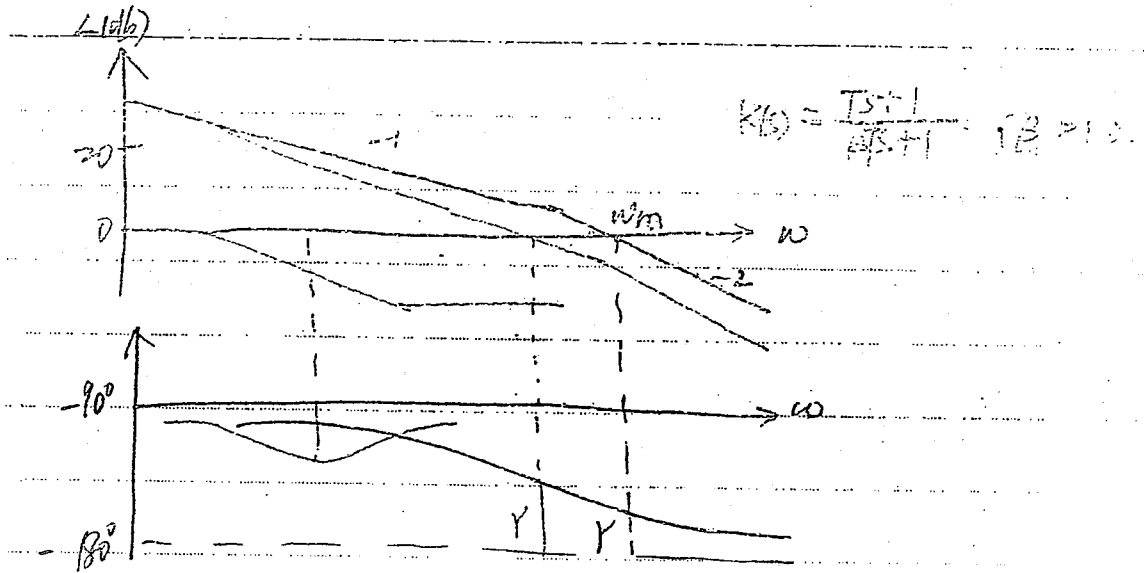


特性：

- ① $0 < \omega < \omega_1$ — 滞后校正装置
- $\omega_1 < \omega < \omega_2$ — 超前
- ② $K(s)$ 最大正相角为 ϕ_m 对应频率为 ω_m

在 ω_m 处 $\begin{cases} \angle K(s) > 0 & \text{(超前网络作用)} \\ 20 \log |K(j\omega_m)| < 0 \text{ dB} & \text{(滞后...)} \end{cases}$

校正后增益交界频率 ω_{m2} (在 $\frac{1}{T_2} \sim \frac{1}{\alpha T_2}$ 之间)
 (要有超前滞后抵消)



2. 滞后校正装置的频率特性

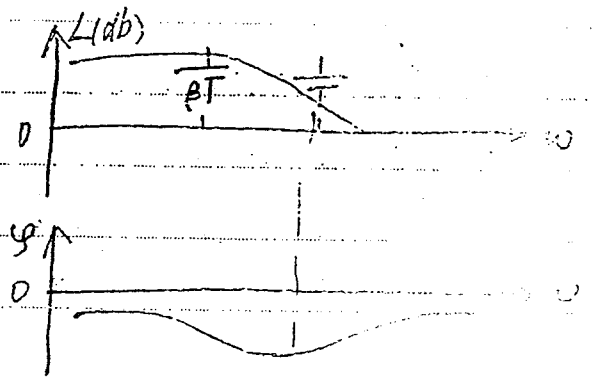
滞后校正装置传递函数：

$$K(s) = \frac{Ts+1}{\beta Ts+1} \quad (\beta > 1)$$

① 低频： $L = 0 \text{ db}$

中高频： $L = 20 \log \frac{1}{\beta} < 0 \text{ db}$

② $0 < \omega < \infty$ ： $\angle K(j\omega) < 0^\circ$



在未校正系统的对数幅频特性上，寻找满足指定要求的相位裕量

→ 频率 ω_{m2} (校正后期望增益交界频率)

ϕ_m 尽量远离 ω_{m2} → 取 $\omega_c = \frac{1}{2} \omega_{m2} \sim 10 \omega_{m2}$

3. 校正装置步骤

(1) 根据稳态误差要求，确定开环增益 K 。

(2) 在此 K 值下作未校正装置开环系统的 Bode 图，确定校正后 ω_{m2} 。

满足： $\angle G(j\omega_{m2}) = -180^\circ + \nu + 0 \rightarrow \omega_{m2}$

ν ：