第八章　狭义相对论（14课时）

节次	节　　名	小节标题
8.1	电磁理论与狭义相对论	电磁理论存在的两个问题，狭义相对论的基本假设，牛顿的绝对时空观和狭义相对论的时空观，时空性质与物质运动
8.2	洛伦兹变换	导出洛伦兹变换的基本假定，推导过程，洛伦兹变换
8.3	狭义相对论的时空理论	空时间隔和事件的时空关系，同时性的相对性及事件时序，动钟变慢，动尺缩短，速度变换公式，加速度变换公式
8.4	相对性原理的四维表述	闵柯夫斯基空间及洛伦兹变换，四维张量构建举例，4-矢量和4-张量分量的变换关系
8.5	电磁规律的不变性	电荷守恒方程，洛伦斯条件，达朗贝尔方程，电磁场张量，麦克斯韦方程，辅助矢量$\boldsymbol{D}$和$\boldsymbol{H}$，电磁力密度矢量和电磁场的动量能量张量，变换式的应用举例
8.6	相对论力学	4-动量矢量，相对论动力学方程，质能关系，力的变换关系，洛伦兹力，相对论分析力学

- 两条基本原理（基本假设）：相对性原理和光速不变原理
- 由两条原理和关于时空性质假定导出洛伦兹变换
- 狭义相对论的时空观：洛伦兹变换的应用
- 相对性原理的四维表述，四维张量的构建方法
- 电磁规律的不变性：相对论电动力学，电磁学量变换式的应用
- 力学规律的不变性：相对论力学

一 电磁规律与相对性原理

- 一个基本问题：在不同惯性参考系中，电磁规律是否相同？即麦克斯韦方程在不同惯性系中是否具有相同的形式？(与时空观密切相关)
- 19世纪初以前的时空观：由地心说、日心地动说到日动说

➢ 远古：天圆地方说（空间各向异性，且不均匀）

➢ 亚里士多德(公元前4世纪)—托勒密(2世纪)地心说：地球是一个球体，地球是宇宙中心；为基督教会改造成为基督教义的支柱（空间各向同性，但不均匀）

➢ 哥白尼(1473—1543)地动说：否认地球是宇宙中心，提出太阳是宇宙中心
哥白尼：波兰天文学家，日心说的创立人，所著《天体运行论》一书，迟迟不敢出版。受哥白尼委托，一位教士在添加了一段前言之后，终于使该书于1543年出版。该前言写道："书中的理论不一定代表行星在空间的真正运动，不过是为编算星表、预推行星的位置而想出来的一种人为的设计。"

➢ 布鲁诺(1548—1600)日动说（宇宙无限，不存在中心；空间均匀各向同性）
布鲁诺：意大利杰出的思想家，因宣传哥白尼日心说被宗教裁判所囚禁8年，并于1600年被活活烧死。罗马教廷于1616年将《天体运行论》列为禁书。

8.1 电磁理论与狭义相对论

布鲁诺：“为直理而斗争是人生的最大乐趣。”
“在真理面前，我半步也不退让！”

罗马鲜花广场的布鲁诺铜像

布鲁诺（1548－1600）

● 伽利略相对性原理

1632年，意大利物理学家伽利略（1564－1642）出版了他的名著：《关于托勒密和哥白尼两大世界体系的对话》

1. 提出相对性原理：所有惯性参考系等效，物理规律相同

2. 提出动机：为“地动说”辩护，批驳“地心说”对“地动说”的非难：

“如果地球在高速运动，为何地球上的人一点也感觉不到？”

伽利略的回答：

“把你和一些朋友关在一条大船甲板下的主舱里，让你们带着几只苍蝇、蝴蝶和其他小飞虫，舱内放一只大水碗，其中有几条鱼。然后，挂上一个水瓶，让水一滴一滴地滴到下面的一个宽口罐里。船停着不动时，你留神观察，小虫都以等速向舱内各方向飞行，鱼向各个方向随便游动，水滴滴进下面的罐中，你把任何东西扔给你的朋友时，只要距离相等，向这一方向不必比另一方向用更多的力。你双脚齐跳，无论向哪个方向跳过的距离都相等。当你仔细观察这些事情之后，再使船以任何速度前进，只要运动是匀速，也不忽左忽右地摆动，你将发现，所有上述现象丝毫没有变化。你也无法从其中任何一个现象来确定，船是在运动还是停着不动。”

8.1 电磁理论与狭义相对论

● 牛顿的绝对时空观

1687年，英国物理学家牛顿（**1642－1727**）出版了他的专著：《自然哲学的数学原理》，建立力学的三条定律；为使这些规律满足伽利略相对性原理，提出如下时空坐标变换公式：

$$\boldsymbol{r}' = \boldsymbol{r} - \boldsymbol{v}t, \qquad t' = t \tag{8.1.1}$$

$\boldsymbol{r}, t$：惯性系 S 中的时空坐标；$\boldsymbol{r}', t'$：惯性系 S′ 中的时空坐标；

$\boldsymbol{v}$ ： S′ 相对 S 的运动速度

1. 体现牛顿绝对时空观：

➢ 空间均匀各向同性，时间均匀性，任何时空点都是平等的

➢ 时间间隔的绝对性： $t_1' = t_1,\ t_2' = t_2 \quad \Rightarrow \quad t_2' - t_1' = t_2 - t_1$

特别在 S 中的同时发生的事件（$t_1 = t_2$），在 S′ 中也同时发生

➢ 空间间隔的绝对性：两个参考系同时记下两个空间点的位置

$$\boldsymbol{r}_1' = \boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{v}t_1,\ \boldsymbol{r}_2' = \boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{v}t_2 \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{r}_2' - \boldsymbol{r}_1' = \boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{v}(t_2 - t_1) = \boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1$$

2. 后人称**(8.1.1)**式为伽利略变换

8.1 电磁理论与狭义相对论

- 在伽利略变换下，电磁规律不满足相对性原理

1. 为证明这一结论，只需举个反例
2. 在真空中，电场满足达朗贝尔方程：

$$\left(\nabla^2-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\boldsymbol{E}=0 \tag{8.1.2}$$

➢ 该方程预言真空中的电磁波以光速 c 传播

➢ 若要维持电磁规律不变，必须成立

$$\left(\nabla'^2-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t'^2}\right)\boldsymbol{E}'=0,$$ 即要求：$$\nabla^2-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}=\nabla'^2-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t'^2}$$

可是由伽利略变换得 $$\frac{\partial}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial t'}-\boldsymbol{v}\cdot\nabla',\quad \nabla=\nabla',$$

$$\nabla^2-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}=\nabla'^2-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t'^2}+\frac{2}{c^2}\boldsymbol{v}\cdot\nabla'\frac{\partial}{\partial t'}-\frac{1}{c^2}(\boldsymbol{v}\cdot\nabla')(\boldsymbol{v}\cdot\nabla')\neq\nabla'^2-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t'^2}$$

达朗贝尔算符发生变化 — 电磁规律不满足相对性原理

8.1 电磁理论与狭义相对论

- 对伽利略变换下电磁规律不满足相对性原理作何解释？

1. 类比运动介质中声波的传播：在介质中以声速传播，在相对介质运动的参考系中表现出不同的传播性质，属于正常现象

2. 猜测：电磁波的传播也需要介质，称为“以太”（**ether**）；电磁场为以太的一种属性，电磁波是以太的波动

➢ 如果以太果真存在，则电磁规律只在相对以太静止的参考系中成立

➢ 以太说面临的困难：

① 无法统一解释各类光学实验（需引入彼此矛盾的附加假设）

② 以太的物理性质极端特殊，实验从未发现它的存在

3. 以太假设说明什么？

➢ 牛顿的绝对时空观自提出以来在人们心目中根深蒂固

➢ 相对性原理在电磁学领域面临挑战，需要重新加以确认

4. 问题的关键：是坚信伽利略提出的相对性原理还是坚信反映牛顿绝对时空观的伽利略变换？

5. 爱因斯坦的回答：相对性原理正确，伽利略变换需要修正

8.1 电磁理论与狭义相对论

- 狭义相对论提出一种新的时空观

1. 要确保电磁规律满足相对性原理，必须要求真空中的光速在所有惯性参考系中一致，即真空中光速不变
2. 真空光速的不变性的后果：

➢ 伽利略变换需要修正

➢ 空间间隔和时间间隔的绝对性不再维持，从而牛顿的绝对时空观不再成立，而应代之以新的时空观

➢ 空间间隔和时间间隔的相对性不是随意的，要确保真空中光速不变

3. 学好狭义相对论的关键：理解和接受狭义相对论的时空观

- 狭义相对论给整个物理学带来一场深刻变革

1. 要求物理规律无一例外地满足相对性原理
2. 这一要求将充分揭示物理规律本身蕴涵的深层次规律，它们表现为通常物理量（三维张量）的变换规律，以及由这些物理量构成的新的不变性质（不变量）；离开狭义相对论，单从物理规律自身无法揭示这些规律，这构成狭义相对论对整个物理学的重大贡献
3. 修正牛顿力学规律，使之满足相对性原理并揭示其深层次规律

二　狭义相对论的基本假设

- 相对性原理：所有惯性参考系等价，不同惯性系中的物理规律具有同样的形式
- 光速不变原理：在任何惯性参考系中，真空中的光速为 c，与光波传播方向和光源的运动速度无关

【说明】

1. 第一条原理与伽利略相对性原理的关系

- ➢ 将伽利略提出的相对性原理称为力学相对性原理不符合历史事实：伽利略在他的专著中明确指出："你也无法从其中任何一个现象来确定，船是在运动还是停着不动。" 伽利略的本义是指一切现象，并非限于力学现象。
- ➢ 伽利略提出的相对性原理需要结合具体的物理规律一一验证（具体化）
- ➢ 牛顿验证力学规律满足相对性原理，但存在局限性（限于低速运动）
- ➢ 爱因斯坦的贡献：

① 排除长期以来对电磁规律满足相对性原理的各种怀疑，明确指出一切物理规律均需满足相对性原理
② 从光速不变原理和相对性原理出发，建立狭义相对论时空观
③ 在新的时空观下，证明电磁规律满足相对性原理，揭示新规律
④ 在新的时空观下，修改力学规律使之满足相对性原理，揭示新规律

2. 如何正确理解第一条原理（相对性原理）

- 描述物理规律的数学方程形式相同
- 所出现的物理量的物理意义和测量方法相同

3. 如何正确理解第二条原理（光速不变原理）

- 可将其视为电磁规律满足相对性原理的前提，但光速不变原理已经超出了电磁理论的范畴，而是作为反映时空性质、独立于电磁规律的一条假设，所展现的时空性质将适用于一切物理规律，不仅仅限于电磁规律。它的物理本质是：任何相互作用在空间存在一个极限传播速度，该速度就是光速，它在任何惯性参考系中相同。
- 作为一条基本假设，而非任何光学实验的结论；基于它建立的狭义相对论最终以一种简单的方式统一解释了所有实验事实，光速不变原理才被普遍接受为反映客观事实的一条真理
- 维持不变的只是“真空”光速，而非介质光速；介质光速在相对介质静止的参考系中定义，与介质电磁性质有关

三　时空性质与物质运动

- 时空与物质运动相互作用，相对性原理起着桥梁作用
- 狭义相对论只考虑时空对物质运动的作用，不考虑反向作用
- 在狭义相对论诞生之前，人们已经认识到时空对物质运动的作用：

1. 时间的均匀性：在时间坐标的平移变换下物理规律保持不变，导致动力学系统的能量守恒
2. 空间的均匀性：在位置空间坐标的平移变换下物理规律保持不变，导致动力学系统的动量守恒
3. 空间的各向同性：在位置空间坐标的旋转变换下物理规律保持不变，导致动力学系统的角动量守恒

以上守恒性来自时空对系统的对称性约束，与系统具体物理性质无关

- 在狭义相对论的框架下，时空坐标同时变换，要求物理规律不变，将时空对物质运动的作用推向更深层次，将导致新的普遍规律
- 物质运动对时空的反作用：引力场使时空弯曲（广义相对论）

电磁场以及与强、弱相互作用对应的场也应使时空弯曲 ⇒ 统一场论

8.2 洛伦兹变换

- 洛伦兹变换将取代伽利略变换，提供对时空性质的准确描述
- 产生过程：洛伦兹最先提出，庞加莱修正之后命名，由爱因斯坦根据光速不变和相对性原理重新导出，作为对时空性质的定量描述

一 导出洛伦兹变换的基本假定

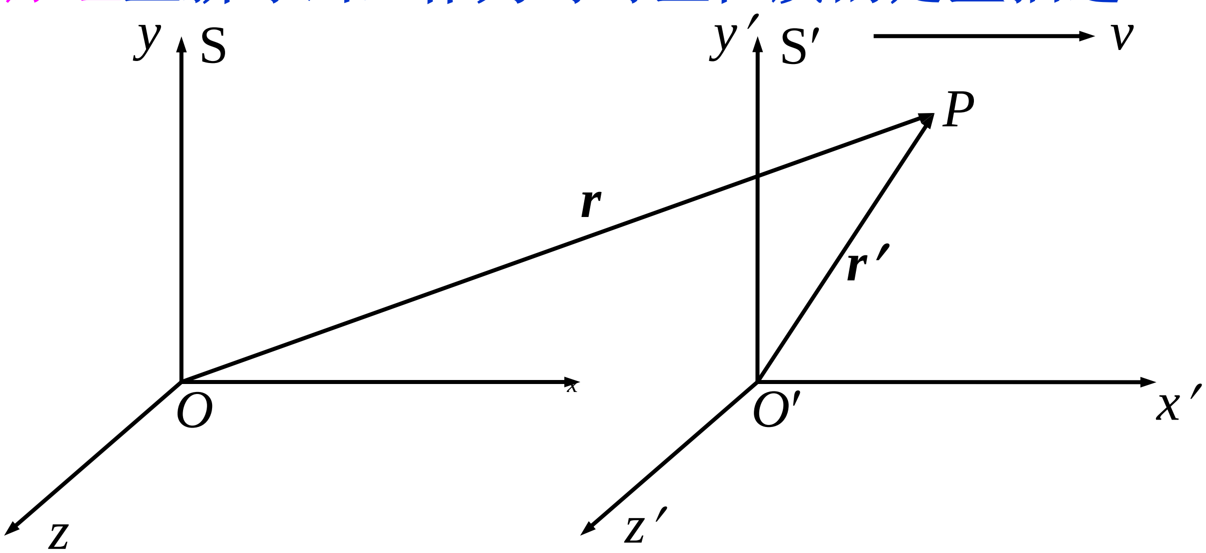

图8－1

1. 时空的物理性质

➢ 时间均匀,空间均匀各向同性 ⇒ “平直”空间，即所谓欧几里得空间

➢ 可引入笛卡儿坐标（直角坐标），便于反映时空物理性质和计算空间间隔和时间间隔

➢ 不妨取直角坐标；为使变换后的坐标为直角坐标，变换必须为线性变换！

➢ 不失一般的简化：不妨取参考系S和S′的时空坐标原点重合 **(线性齐次变换)**；不妨假定两参考系的相对运动速度沿 x 轴方向（图**8－1**）

8.2 洛伦兹变换

1. 时空物理性质（时间均匀，空间均匀各向同性）
2. 光速不变原理： S′和 S 中的真空光速均为 c (可理解为某种极限速度)
3. 运动的相对性：S′相对 S 的运动速度为 v， S 相对S′的速度为$-v$
4. 变换性质：可倒易性； $v = 0$ 时回到恒等变换

相对性原理(所有惯性系等价)体现在运动的相对性和变换的可倒易性

二 简单洛伦兹变换

1. 由时空物理性质(限于线性齐次变换)写下坐标变换式如下（共涉及16个待定系数）：

$$\begin{aligned} x' &= a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z + a_{14}t, \\ y' &= a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z + a_{24}t, \\ z' &= a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z + a_{34}t, \\ t' &= a_{41}x + a_{42}y + a_{43}z + a_{44}t \end{aligned} \qquad (1)$$

2. 由参考系的相对运动状态提供的约束（提供6个独立关系）

O点在S′系的运动方程($x=y=z=0$): $x' = a_{14}t,\ y' = a_{24}t,\ z' = a_{34}t,\ t' = a_{44}t$

O点相对 S′ 系的运动速度($\boldsymbol{v}' = -v\,\boldsymbol{e}_x$):

$$v'_x = dx'/dt' = -v, \quad v'_y = dy'/dt' = 0, \quad v'_z = dz'/dt' = 0$$

$$\Rightarrow \quad a_{44} \equiv \gamma, \quad a_{14} = -\gamma v, \quad a_{24} = a_{34} = 0 \qquad (2)$$

2. 由参考系的相对运动状态提供的约束关系（续）

O点在S′系的运动方程($x=y=z=0$): $a_{44}\equiv\gamma, a_{14}=-\gamma v, a_{24}=a_{34}=0$ (2)

O'点在S系的运动方程($x'=y'=z'=0$):

$$a_{11}x+a_{12}y+a_{13}z+a_{14}t=0,$$
$$a_{21}x+a_{22}y+a_{23}z+a_{24}t=0,$$
$$a_{31}x+a_{32}y+a_{33}z+a_{34}t=0$$

O'点相对 S 系的运动速度($\boldsymbol{v}=v\,\boldsymbol{e}_x$):

$$v_x=dx/dt=v,\quad v_y=dy/dt=0,\quad v_z=dz/dt=0$$

$$\Rightarrow\quad a_{11}v+a_{14}=0,\quad a_{21}v+a_{24}=0,\quad a_{31}v+a_{34}=0$$

将(2)式代入上式得 $a_{11}\equiv\gamma,\quad a_{21}=a_{31}=0$ (3)

$$\begin{aligned}x'&=a_{11}x+a_{12}y+a_{13}z+a_{14}t,\\ y'&=a_{21}x+a_{22}y+a_{23}z+a_{24}t,\\ z'&=a_{31}x+a_{32}y+a_{33}z+a_{34}t,\\ t'&=a_{41}x+a_{42}y+a_{43}z+a_{44}t\end{aligned}\quad\Rightarrow\quad\begin{aligned}x'&=\gamma x+a_{12}y+a_{13}z-\gamma vt,\\ y'&=a_{22}y+a_{23}z,\\ z'&=a_{32}y+a_{33}z,\\ t'&=a_{41}x+a_{42}y+a_{43}z+\gamma t\end{aligned}\quad(4)$$

3. 由光速不变原理提供的约束关系（提供8个独立关系）

当$t=t'=0$ 时，坐标原点O 和O'重合，自该点发出光信号。

在 S 系中，t 时刻的波前是以O为球心、半径为 ct 球的球面：

$$x^2+y^2+z^2-c^2t^2=0$$

在 S′ 系中，对应时刻t'的波前是以O 为球心、半径为ct'的球面：

$$x'^2+y'^2+z'^2-c^2t'^2=0$$

上述两式同时成立，互为充分必要条件, 即

$$x^2+y^2+z^2-c^2t^2=0 \iff x'^2+y'^2+z'^2-c^2t'^2=0 \qquad (5)$$

- (5)式作为光速不变的数学表述
- 由(5)式不能直接推断下式成立：

$$x^2+y^2+z^2-c^2t^2=x'^2+y'^2+z'^2-c^2t'^2 \qquad (A)$$

例如：(A)式左右两边可相差一个乘子。

3. 由光速不变原理提供的约束关系（续）

$$\begin{aligned} x' &= \gamma x + a_{12}y + a_{13}z - \gamma vt, \\ y' &= a_{22}y + a_{23}z, \quad z' = a_{32}y + a_{33}z, \\ t' &= a_{41}x + a_{42}y + a_{43}z + \gamma t \end{aligned} \tag{4}$$

$$x^2 + y^2 + z^2 - c^2t^2 = 0 \iff x'^2 + y'^2 + z'^2 - c^2t'^2 = 0 \tag{5}$$

由式(4)得： $x'^2 + y'^2 + z'^2 - c^2t'^2 = (\gamma x + a_{12}y + a_{13}z - \gamma vt)^2 + (a_{22}y + a_{23}z)^2 + (a_{32}y + a_{33}z)^2 - c^2(a_{41}x + a_{42}y + a_{43}z + \gamma t)^2$

$$\begin{aligned} &= \alpha(x^2 + y^2 + z^2 - c^2t^2) + (a_{12}^2 + a_{22}^2 + a_{32}^2 - c^2a_{42}^2 - \alpha)y^2 \text{①} \\ &+ (a_{13}^2 + a_{23}^2 + a_{33}^2 - c^2a_{43}^2 - \alpha)z^2 \text{②} + (\gamma^2v^2 - \gamma^2c^2 + \alpha c^2)t^2 \text{③} \\ &+ 2(\gamma a_{12} + a_{21}a_{22} + a_{31}a_{32} - c^2a_{41}a_{42})xy \text{④} + 2(\gamma a_{13} + a_{21}a_{23} + a_{31}a_{33} - c^2a_{41}a_{43})xz \text{⑤} \\ &+ 2(a_{12}a_{13} + a_{22}a_{23} + a_{32}a_{33} - c^2a_{42}a_{43})yz \text{⑥} - 2(\gamma^2v + \gamma c^2a_{41})xt \text{⑦} - 2(\gamma va_{12} + \gamma c^2a_{42})yt \text{⑧} \\ &- 2(\gamma va_{13} + \gamma c^2a_{43})zt \text{⑨} \end{aligned} \tag{6}$$

式中 $$\alpha \equiv \gamma^2 - c^2a_{41}^2 \tag{7}$$

- α 为x^2的系数；式(6)右边除第一项外，其余各项不含x^2，彼此独立！
- 将式(5)代入式(6)后，式(6)右边余下9项应当分别恒等于零！

3. 由光速不变原理提供的约束关系（续） ② $\alpha \equiv \gamma^2 - c^2 a_{41}^2$ (7)

$$a_{12}^2 + a_{22}^2 + a_{32}^2 - c^2 a_{42}^2 - \alpha = 0, \quad a_{13}^2 + a_{23}^2 + a_{33}^2 - c^2 a_{43}^2 - \alpha = 0$$

③ $-\gamma^2(c^2 - v^2) + \alpha c^2 = 0, \quad \gamma a_{12} - c^2 a_{41} a_{42} = 0, \quad \gamma a_{13} - c^2 a_{41} a_{43} = 0$

$$a_{12}a_{13} + a_{22}a_{23} + a_{32}a_{33} - c^2 a_{42}a_{43} = 0,$$ ① $\gamma^2 v + \gamma c^2 a_{41} = 0$

$$\gamma v a_{12} + \gamma c^2 a_{42} = 0, \quad \gamma v a_{13} + \gamma c^2 a_{43} = 0$$

一共获得**8**个独立关系式**(由①②可导出③，故③不独立)**;相应式**(6)**化为

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 - c^2 t'^2 = \alpha(v)(x^2 + y^2 + z^2 - c^2 t^2) \qquad (8)$$

4. 由空间各向同性 $\alpha(v) = \alpha(-v)$

和变换的可倒易性（提供1个独立关系，累计15个独立关系）：

$$x^2 + y^2 + z^2 - c^2 t^2 = \alpha(-v)(x'^2 + y'^2 + z'^2 - c^2 t'^2)$$

$\Rightarrow$ $\alpha(-v) = 1/\alpha(v)$ $\Rightarrow$ $\alpha = 1$ (9)

式**(8)** $\Rightarrow$ $x'^2 + y'^2 + z'^2 - c^2 t'^2 = x^2 + y^2 + z^2 - c^2 t^2$ (10)

与右式等效: $x^2 + y^2 + z^2 - c^2 t^2 = 0 \Leftrightarrow x'^2 + y'^2 + z'^2 - c^2 t'^2 = 0$ (5)

暂停一下，让我们来回顾爱因斯坦对洛伦兹变换导出过程的评述

$$x'^2+y'^2+z'^2-c^2t'^2=\alpha(v)(x^2+y^2+z^2-c^2t^2)$$

$$x'^2+y'^2+z'^2-c^2t'^2=x^2+y^2+z^2-c^2t^2 \qquad (10)$$

- 相对性原理：所有惯性参考系等价，不同惯性系中的物理规律具有同样的形式。相对性原理（所有惯性参考系等价）体现在运动的相对性和变换的可倒易性，在此基础上导出式(10)。
- 爱因斯坦：
  式(10)“同时包含了光速不变原理和相对性原理，由此推得洛伦兹变换”；
  “相对论原理要求这一因子（指因子$\alpha(v)$）为1，这是一般教科书上未曾提到的，而是一般地（含糊地）假定”式(10)成立。

（参见爱因斯坦，相对论的意义, 1955, 北京, 科学出版社, 李灏 译）

5. 确定9个系数及γ（15 – 6 ＝ 9）：$\alpha \equiv \gamma^2 - c^2 a_{41}^2 = 1$ (7)

$$a_{12}^2 + a_{22}^2 + a_{32}^2 - c^2 a_{42}^2 = 1, \qquad a_{13}^2 + a_{23}^2 + a_{33}^2 - c^2 a_{43}^2 = 1$$

$$-\gamma^2(c^2 - v^2) + c^2 = 0, \qquad \gamma a_{12} - c^2 a_{41} a_{42} = 0, \quad \gamma a_{13} - c^2 a_{41} a_{43} = 0$$

$$a_{12}a_{13} + a_{22}a_{23} + a_{32}a_{33} - c^2 a_{42}a_{43} = 0, \qquad \gamma^2 v + \gamma c^2 a_{41} = 0$$

$$\gamma v a_{12} + \gamma c^2 a_{42} = 0, \qquad \gamma v a_{13} + \gamma c^2 a_{43} = 0$$

$$\gamma = \pm \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad \beta = \frac{v}{c} \qquad a_{41} = -\frac{\gamma v}{c^2}$$

(7)式自动满足

$$a_{42} = -\frac{v}{c^2} a_{12}, \quad a_{43} = -\frac{v}{c^2} a_{13} \qquad a_{12} = a_{13} = a_{42} = a_{43} = 0$$

$$a_{22}^2 + a_{32}^2 = 1, \quad a_{22}a_{23} + a_{32}a_{33} = 0, \quad a_{23}^2 + a_{33}^2 = 1 \Rightarrow$$ y-z平面内旋转

目前变换不含这种旋转（补充最后1个独立关系）：$a_{22} = a_{33} = 1, \quad a_{23} = a_{32} = 0$

6. 当 $v=0$ 时回到恒等变换（去掉 γ 的负根）：

$$\gamma=\pm\frac{\alpha}{\sqrt{1-\beta^2}}=\pm\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \Rightarrow \gamma=\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}=\frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}} \quad (8.2.16)$$

简单洛伦兹变换：

$$\begin{cases} x'=\gamma(x-vt) \\ y'=y, \quad z'=z \\ t'=\gamma(t-vx/c^2) \end{cases} (8.2.17)$$

$$(x',y',z',t')\leftrightarrow(x,y,z,t) \quad \xrightarrow[v\to -v]{}$$

反变换(可倒易性)：

$$\begin{cases} x=\gamma(x'+vt') \\ y=y', \quad z=z' \\ t=\gamma(t'+vx'/c^2) \end{cases} \quad (8.2.18)$$

低速极限：

$$\begin{cases} x'=\gamma(x-vt) \\ y'=y, \quad z'=z \\ t'=\gamma t\left(1-\dfrac{vx}{c^2 t}\right) \end{cases} \xrightarrow[\frac{vx}{t}\sim vu\ll c^2]{\gamma\approx 1} \begin{cases} x'=x-vt \\ y'=y, z'=z \\ t'=t \end{cases}$$

回到伽利略变换

7. 时空间隔的定义及其不变性：

$$\begin{cases} x' = \gamma(x - vt) \\ y' = y, \quad z' = z \\ t' = \gamma(t - vx/c^2) \end{cases} \Rightarrow x'^2 + y'^2 + z'^2 - c^2t'^2 = x^2 + y^2 + z^2 - c^2t^2$$

事件 (x, y, z, t) 离时空坐标原点的时空间隔 s： $s^2 = x^2 + y^2 + z^2 - c^2t^2$

事件1： (x_1, y_1, z_1, t_1)；**事件2：** (x_2, y_2, z_2, t_2)

$$\begin{cases} x_2' - x_1' = \gamma[(x_2 - x_1) - v(t_2 - t_1)] \\ y_2' - y_1' = y_2 - y_1, \quad z_2' - z_1' = z_2 - z_1 \\ t_2' - t_1' = \gamma[(t_2 - t_1) - v(x_2 - x_1)/c^2] \end{cases} \Rightarrow \begin{aligned} &(x_2' - x_1')^2 + (y_2' - y_1')^2 + (z_2' - z_1')^2 - c^2(t_2' - t_1')^2 \\ &= (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 - c^2(t_2 - t_1)^2 \end{aligned}$$

事件 1和事件2之间时空间隔 s_{12} ：

$$s_{12}^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 - c^2(t_2 - t_1)^2$$

结论：两个事件之间的时间间隔和空间距离均是相对的，其时空间隔 s_{12}才是绝对的（对比牛顿绝对时空观）。

三　一般洛伦兹变换

对任意相对运动速度 $\boldsymbol{v}$ 的情形，可将空间位置矢量按运动方向分解：

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_{\parallel}+\boldsymbol{r}_{\perp},\qquad \boldsymbol{r}_{\parallel}=\frac{\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{r}}{v^2}\boldsymbol{v} \tag{8.2.19}$$

$$\begin{cases} x'=\gamma(x-vt) \\ y'=y,\quad z'=z \\ t'=\gamma(t-vx/c^2) \end{cases} \xrightarrow[v\to\boldsymbol{v}]{x'\to\boldsymbol{r}_{//};\ y',z'\to\boldsymbol{r}_{\perp}} \begin{cases} \boldsymbol{r}'_{\parallel}=\gamma(\boldsymbol{r}_{\parallel}-\boldsymbol{v}t),\quad \boldsymbol{r}'_{\perp}=\boldsymbol{r}_{\perp} \\ t'=\gamma t-\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{r}/c^2 \end{cases} \tag{8.2.20}$$

由

$$\boldsymbol{r}'=\boldsymbol{r}'_{\parallel}+\boldsymbol{r}'_{\perp}=\boldsymbol{r}+(\gamma-1)\boldsymbol{r}_{\parallel}-\gamma\boldsymbol{v}t=\boldsymbol{r}+(\gamma-1)\frac{\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{r}}{v^2}\boldsymbol{v}-\gamma\boldsymbol{v}t$$

得　一般洛伦兹变换　　　　反变换

$$\begin{cases} \boldsymbol{r}'=\boldsymbol{r}+(\gamma-1)\dfrac{\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{r}}{v^2}\boldsymbol{v}-\gamma\boldsymbol{v}t \\ t'=\gamma\left(t-\dfrac{\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{r}}{c^2}\right) \end{cases} \tag{8.2.21}$$

$$\xrightarrow[\boldsymbol{v}\ \leftrightarrow\ -\boldsymbol{v}]{\boldsymbol{r}',t'\ \leftrightarrow\ \boldsymbol{r},t} \begin{cases} \boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}'+(\gamma-1)\dfrac{\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{r}'}{v^2}\boldsymbol{v}+\gamma\boldsymbol{v}t' \\ t=\gamma\left(t'+\dfrac{\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{r}'}{c^2}\right) \end{cases}$$

四 简单洛伦兹变换的推导说明

- “不失一般”的技巧

从参考系相对运动沿 x 轴方向导出简单洛伦兹变换，再推广至一般洛伦兹变换（后者待定系数为16个,全部非零！）

- 同时用到狭义相对论的两条基本原理
- 教科书中的推导隐含的假定

当相对运动速度限制为 x 轴方向，坐标变换退化为两组去耦变换：

$$y' = y, \qquad z' = z \tag{8.2.1}$$

$$x' = a_1 x + a_2 t, \qquad t' = b_1 x + b_2 t \tag{8.2.2}$$

隐含如下假定：

（1）垂直方向的坐标（间隔）不变；

（2）水平方向的坐标变换与垂直坐标无关。

这些假定并非显而易见，而必须从狭义相对论的基本原理出发作出严格证明。或基于直觉，或视为常识，没有说服力。实际上，牛顿的绝对时空观与人们的直觉和常识一致，但却是不正确的。

8.2 洛伦兹变换

- 为何限于笛卡儿坐标系的正交线性变换？

➢ 一旦使用4维张量描述物理现象并将物理规律写成4维张量形式，就可以对时空坐标实施任意的坐标变换.

➢ 在任意坐标变换下，所得到的新的时空坐标，以及新的张量分量，均只能视为数学辅助量，一般无法直接测量；无法重现电磁规律的三维形式；因而这类变换只具有数学意义，缺乏物理价值.

➢ 狭义相对论的结论与坐标系及其变换无关，选择笛卡儿坐标系及其正交线性变换，使得分析过程大大简化，且变换前后的时间坐标、空间坐标和物理量均是相应参考系中的实测量，而非数学辅助量.

➢ 我们必须限于平直空间(假定)，否则无法引入全空间的笛卡儿坐标系.

爱因斯坦在他的《相对论的意义》一书中曾深刻指出：“必须将几何学的基本概念和自然对象联系起来；没有这样的联系，几何学对于物理学家是没有价值的.”爱因斯坦的狭义相对论以及随后由他创立的广义相对论，提供了实现几何学基本概念和自然现象完美结合的最好范例.

（爱因斯坦，相对论的意义, 1955, 北京, 科学出版社, 李灏 译）