第二讲：数学工具----Laplace变换（2 学时）

1、定义与基本变换
2、定理与技巧
3、反变换
4、求解微分方程

1、定义与基本变换

变换是数学中经常采用的技巧，比如，在初等数学中：

$$2^0, 2^1, 2^{1.1}, \cdots, 2^{\pi}$$

令：　　对数变换

$$N = 2^{\pi} \longrightarrow \lg N = \pi \lg 2$$

利用对数变换，我们可以将正数的乘积运算变为对数的加法运算。

1、定义与基本变换

又如，Fourier变换将时间域的实函数变换成频率域的频谱，即，正弦谐波的线性组合。

对线性时不变系统而言，我们要寻求能简化微分方程求解过程的变换。一个好的变换至少要有如下2个特征：

1、它的基本函数具有很大的覆盖面，

2、变换本身具有线性叠加性。

1、定义与基本变换

Fourier变换就具有上述特性，

1、它的基本函数为谐波函数，或纯虚指数函数，它们的线性组合可以表示大部分常用的函数，

2、基本函数线性组合的输入导致的响应是基本函数响应的线性组合，只是组合系数发生变化。

遗憾的是，Fourier变换的收敛条件比较严格。

1、定义与基本变换

历史从来都是选择性记忆的，优胜劣汰，大浪淘沙。只有好的工具才会流传后世。

Laplace变换就是这样的数学工具，它对Fourier变换加以扩展，以复指数函数为基本函数，将时间域的实函数变换成复频率域的频谱函数，将微分算子变成代数算子，非常方便。

1、定义与基本变换

复变量和复变函数

（1）复变量： $s=\sigma+j\omega$

（2）复变函数： $F(s)=F_r(s)+jF_i(s)$

〉**F(s)**是函数，其自变量为**s**；**s**为复变量

〉**F(s)**函数值也是复的

〉除此之外，在一般情况下，**F(s)**与实函数无异

1、定义与基本变换

(3) 复指数函数与尤拉定理：

$$e^{j\theta}=\cos\theta+j\sin\theta,\ e^{-j\theta}=\cos\theta-j\sin\theta$$

$$\cos\theta=\frac{1}{2}\left(e^{j\theta}+e^{-j\theta}\right),\ \sin\theta=\frac{1}{2j}\left(e^{j\theta}-e^{-j\theta}\right)$$

1、定义与基本变换

尤拉定理证明：

有： $$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots$$

所以： $$e^{j\theta} = 1 + j\theta - \frac{\theta^2}{2!} - j\frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^4}{4!} + j\frac{\theta^5}{5!} - \frac{\theta^6}{6!} - j\frac{\theta^7}{7!} + \cdots$$

而： $$\sin\theta = \theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \frac{\theta^7}{7!} + \cdots, \cos\theta = 1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \frac{\theta^6}{6!} + \cdots$$

改写 $$e^{j\theta} = \left(1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \frac{\theta^6}{6!} + \cdots\right) + j\left(\theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \frac{\theta^7}{7!} + \cdots\right)$$

所以 $$e^{j\theta} = \cos\theta + j\sin\theta$$

1、定义与基本变换

函数f(t)的拉氏变换

拉氏积分运算符

复变量

当t<0, f(t)=0

$$F(s) \longleftrightarrow f(t)$$

——映射

单边、线性变换

不追求数学细节，如收敛条件等。

1、定义与基本变换

由上式可以看出，Laplace变换是Fourier变换的推广，一些工程上重要的函数，如阶跃函数、指数增长函数等不满足Fourier变换的收敛条件，但乘上一个合适的指数衰减因子后，就可以完成变换。

当s为纯虚数时， 函数的Laplace变换就是它的Fourier变换；

当s为复数时，函数的Laplace变换就是它与实部指数函数乘积的Fourier变换。

1、定义与基本变换

基本时间函数及其Laplace变换

（1）指数函数

（2）阶跃函数

（3）斜坡函数

（4）正弦函数

（5）脉冲函数

1、定义与基本变换

例1、 指数函数

$$f(t)=\begin{cases} Ae^{-at} & (t\geq 0) \\ 0 & (t<0) \end{cases}$$

注意：在某一域内复变函数 F(s) 及其所有导数皆存在，则称该复变函数 F(s) 在该域内是解析的。

$$L[f(t)]=\int_0^{\infty} Ae^{-at}e^{-st}dt=\int_0^{\infty} Ae^{-(s+a)t}dt$$

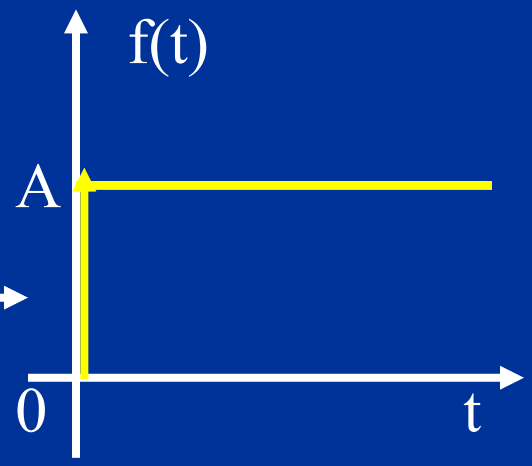
$$=-\frac{A}{s+a}e^{-(s+a)t}\Big|_0^{\infty}=\frac{A}{s+a} \longrightarrow$$ 在复平面上有一个极点

为使积分收敛，这里假设(s+a)的实部大于零

1、定义与基本变换

例2 阶跃函数

$$f(t)=\begin{cases}A\,(t>0)\\0\,(t<0)\end{cases}$$



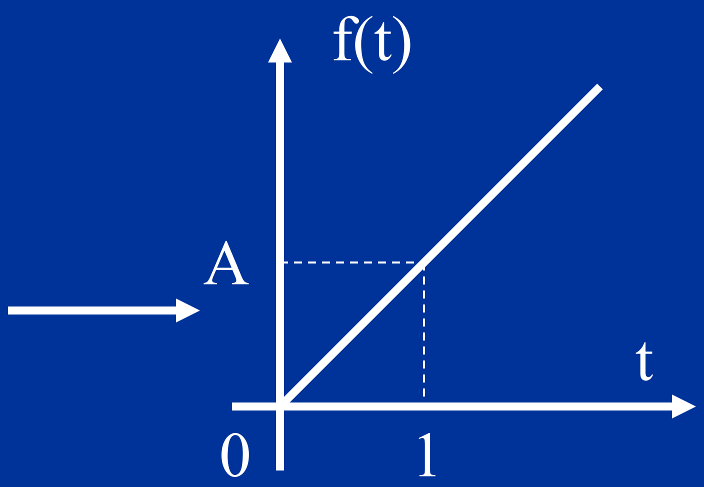
$$L\left[f(t)\right]=\frac{A}{s}$$

注意：A=1，称其为单位阶跃函数，记为 1(t)。阶跃函数在 t=0 处是不确定的，相当于在 t=0 处将一个直流信号突然加到系统上。

1、定义与基本变换

例3 斜坡函数

$$f(t)=\begin{cases} At(t\geq 0) \\ 0(t<0) \end{cases}$$



$$L\left[f(t)\right]=\frac{A}{s^2}$$

注意：A=1，称其为单位斜坡函数。

1、定义与基本变换

例3 斜坡函数

首先注意到：$\dfrac{d\left(te^{-st}\right)}{dt} = e^{-st} - ste^{-st}$

于是：$\xrightarrow{1}$ $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{d\left(te^{-st}\right)}{dt}dt = \int_0^{\infty} e^{-st}dt - \int_0^{t} ste^{-st}dt$

$\xrightarrow{2}$ $\displaystyle te^{-st}\Big|_0^{\infty} = -\frac{e^{-st}}{s}\Bigg|_0^{\infty} - s\int_0^{t} te^{-st}dt$

$\xrightarrow{3}$ $\displaystyle 0 = \frac{1}{s} - s\int_0^{t} te^{-st}dt$

1、定义与基本变换

例4、 正弦、余弦函数

$$f(t)=\begin{cases}0, & t<0\\ \sin\omega t, & t\ge 0\end{cases} \qquad f(t)=\begin{cases}0, & t<0\\ \cos\omega t, & t\ge 0\end{cases}$$

显然，直接求取并不明智。由尤拉定理有：

$$\sin\omega t=\frac{1}{2j}\left[e^{j\omega t}-e^{-j\omega t}\right],\cos\omega t=\frac{1}{2}\left[e^{j\omega t}+e^{-j\omega t}\right]$$

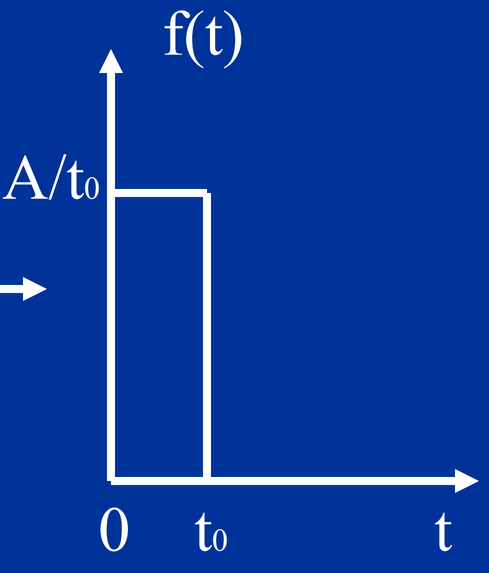
$$L[\sin\omega t]=\frac{1}{2j}\left[\frac{1}{s-j\omega}-\frac{1}{s+j\omega}\right]=\frac{1}{2j}\frac{(s+j\omega)-(s-j\omega)}{(s-j\omega)(s+j\omega)}=\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$$

$$L[\cos\omega t]=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{s-j\omega}+\frac{1}{s+j\omega}\right]=\frac{1}{2}\frac{(s+j\omega)+(s-j\omega)}{(s-j\omega)(s+j\omega)}=\frac{s}{s^2+\omega^2}$$

1、定义与基本变换

例5.1 脉动函数

$$f(t)=\begin{cases}\dfrac{A}{t_0}(0<t<t_0)\\0(t<0,t>t_0)\end{cases}$$

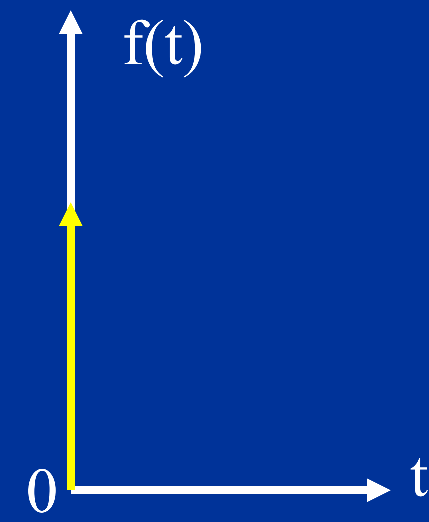


$$L\left[f(t)\right]=\frac{A}{t_0 s}\left(1-e^{-t_0 s}\right)$$

1、定义与基本变换

例5 脉冲函数

$$f(t)=\begin{cases}\lim\limits_{t_0\to 0}\dfrac{A}{t_0}(0<t<t_0)\\ 0(t<0,t>t_0)\end{cases}\longrightarrow$$



$$L\left[f(t)\right]=A$$

注意：A=1，称其为单位脉冲函数，记为 $\delta(t)$

和脉动函数相比，脉冲函数“面积”不变，时间间隔为0。

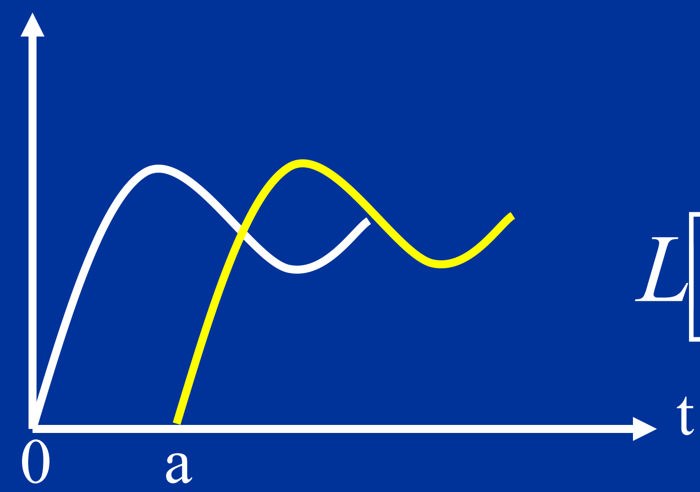
2、定理与技巧

2.1时域函数平移

$$f(t-a)1(t-a)$$

时域移位定理

$$f(t)1(t) \Rightarrow f(t-a)1(t-a)$$



$$L\left[f(t-a)1(t-a)\right]=e^{-as}F(s)$$

f(t)的拉氏变换

线性叠加原理是显然的。

时域位移-------复域指数乘积

2、定理与技巧

2.2 $f(t)$与 e^{-at}相乘 ⟶ 复域位移定理

$$L\left[f(t)e^{-at}\right]=F(s+a)$$

例6

$$L\left(e^{-at}\sin\omega t\right)=\frac{\omega}{(s+a)^2+\omega^2}$$

复域位移--------时域指数乘积

2、定理与技巧

2.3 时间比例尺定理

$$L\left[f\left(\frac{t}{a}\right)\right]=aF(as)$$

证明

$$L[f(\frac{t}{a})]=\int_0^{\infty} f(\frac{t}{a})e^{-st}dt$$

令$t/a=\tau$,则原式$=\int_0^{\infty} f(\tau)e^{-sa\tau}ad\tau=aF(as)$

2、定理与技巧

例7：已知

$$L\left(e^{-t}\right)=\frac{1}{s+1}$$

于是：

$$L\left(e^{-0.2t}\right)=\frac{5}{5s+1}$$

2、定理与技巧

几个重要的拉氏变换对

f(t)	F(s)	f(t)	F(s)
$\delta(t)$	1	$\sin wt$	$w/(s^2+w^2)$
$1(t)$	$1/s$	$\cos wt$	$s/(s^2+w^2)$
t	$1/s^2$	$e^{-at}\sin wt$	$\dfrac{w}{(s+a)^2+w^2}$
e^{-at}	$1/(s+a)$	$e^{-at}\cos wt$	$\dfrac{s+a}{(s+a)^2+w^2}$

2、定理与技巧

2.4 微分定理

$$L\left[\frac{d}{dt}f(t)\right]=sF(s)-f(0)$$

式中 f(0) 是 f(t)在t=0处的初始值。

同样，对于f(t)的n阶导数，则有

$$L\left[\frac{d^n}{dt^n}f(t)\right]=s^nF(s)-s^{n-1}f(0)-\cdots-sf^{(n-2)}(0)-f^{(n-1)}(0)$$

证：根据拉氏变换的定义有

$$L[f'(t)]=\int_0^{+\infty} f'(t)e^{-st}dt = s\int_0^{+\infty} f(t)e^{-st}dt + f(t)e^{-st}\Big|_0^{+\infty}$$

$$= sF(s) - f(0)$$

原函数二阶导数的拉氏变换

$$L[f''(t)] = sL[f'(t)] - f'(0) = s[sF(s) - f(0)] - f'(0)$$

$$= s^2F(s) - sf(0) - f'(0)$$

依次类推，可以得到n阶导函数的拉氏变换

$$L[f^n(t)] = s^nF(s) - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f'(0) - \cdots - f^{n-1}(0)$$

2、定理与技巧

2.5 终值定理

假定 f(t) 和 df(t)/dt 可以进行拉氏变换，$\lim_{t\to\infty} f(t)$存在，并且F(s)在虚轴上无极点，在原点处无多重极点，即，sF(s)在包括虚轴的右半s平面内解析，则有

$$\lim_{t\to\infty} f(t) = \lim_{s\to 0} sF(s)$$

注意：若 $t\to\infty$ 时，f(t)极限 $\lim_{t\to\infty} f(t)$ 不存在，也就不能用终值定理。如对正弦函数和余弦函数就不能应用终值定理。

证：由微分定理有：

$$L[f'(t)] = \int_0^\infty f'(t)e^{-st}dt = sF(s) - f(0)$$

等式两边对s趋向于0取极限

$$左边 = \lim_{s\to 0}\int_0^\infty f'(t)e^{-st}dt = \int_0^\infty \lim_{s\to 0} f'(t)e^{-st}dt$$

$$= \int_0^\infty f'(t)dt = f(t)\Big|_0^\infty = \lim_{t\to\infty} f(t) - f(0)$$

$$右边 = \lim_{s\to 0}[sF(s) - f(0)] = \lim_{s\to 0} sF(s) - f(0)$$

$$\therefore \lim_{t\to\infty} f(t) = \lim_{s\to 0} sF(s)$$

2、定理与技巧

2.6 初值定理

假定 f(t) 和 df(t)/dt 可以进行拉氏变换，$\lim_{s\to\infty} sF(s)$ 存在，则有

$$f(0)=\lim_{s\to\infty} sF(s)$$

证明方法同上。只是要对 $s\to\infty$ 取极限。

2.7 积分定理

$$L\left(\int f(t)dt\right)=\frac{F(s)}{s}+\frac{f^{-1}(0)}{s}$$

式中 $f^{-1}(0)=\int f(t)dt$ 在t=0处的值。

证： 令：$h(t)=\int f(t)dt \qquad h'(t)=f(t)$

由上述微分定理，有

$$L[h'(t)]=sL[h(t)]-h(0)$$

$$L[h(t)]=\frac{1}{s}L[h'(t)]+\frac{1}{s}h(0)=\frac{1}{s}L[f(t)]+\frac{1}{s}h(0)$$

$$=\frac{1}{s}F(s)+\frac{1}{s}f^{-1}(0)$$

即：

$$L[\int f(t)dt] = \frac{F(s)}{s} + \frac{f^{-1}(0)}{s}$$

同理，对f(t)的二重积分的拉氏变换为

$$L[\iint f(t)dt^2] = \frac{1}{s^2}F(s) + \frac{1}{s^2}f^{(-1)}(0) + \frac{1}{s}f^{(-2)}(0)$$

若原函数f(t)及其各重积分的初始值都等于0

则有

$$L[\iint\cdots\int f(t)dt^n] = \frac{1}{s^n}F(s)$$

即原函数 f(t)的n重积分的拉氏变换等于其象函数除以 s^n。

2、定理与技巧

2.8 卷积定理（了解）

将 $\int_0^t f_1(t-\tau)f_2(\tau)d\tau$ 记为 $f_1(t)*f_2(t)$，称其为卷积，则有

$$L\left(f_1(t)*f_2(t)\right)=F_1(s)F_2(s)$$

即：两个原函数的卷积的拉氏变换等于两个象函数的乘积。

证明：

$$L[\int_0^t f_1(t-\tau)f_2(\tau)d\tau]=\int_0^\infty[\int_0^t f_1(t-\tau)f_2(\tau)d\tau]e^{-st}dt$$

$\because \tau > t$时，$f_1(t-\tau)\cdot 1(t-\tau)=0$

$$\therefore \int_0^t f_1(t-\tau)f_2(\tau)d\tau=\int_0^\infty f_1(t-\tau)\cdot 1(t-\tau)\cdot f_2(\tau)d\tau$$

$$L[\int_0^t f_1(t-\tau)f_2(\tau)d\tau]$$

$$=\int_0^\infty[\int_0^\infty f_1(t-\tau)1(t-\tau)f_2(\tau)d\tau]e^{-st}dt$$

$$=\int_0^\infty f_2(\tau)d\tau\int_0^\infty f_1(t-\tau)1(t-\tau)e^{-st}dt$$

$\because$ 令 $t-\tau=\zeta$，则

$$L[\int_0^t f_1(t-\tau)f_2(\tau)d\tau]$$

$$=\int_0^\infty f_2(\tau)d\tau\int_0^\infty f_1(\zeta)e^{-s(\tau+\zeta)}d\zeta$$

$$=\int_0^\infty f_2(\tau)e^{-s\tau}d\tau\int_0^\infty f_1(\zeta)e^{-s\zeta}d\zeta=F_2(s)F_1(s)$$

即得　证得

3、拉氏反变换

定义：从象函数F(s)求原函数f(t)的运算称为拉氏反变换。记为

$$L^{-1}[F(s)]$$

由F(s)，可以按下式求出

$$f(t)=L^{-1}[F(s)]=\frac{1}{2\pi\cdot j}\int_{C-j\infty}^{C+j\infty}F(s)e^{st}ds\,(t>0)$$

式中C是实常数，而且大于F(s)所有极点的实部。

拉氏变换与拉氏反变换，在时域函数和复频域函数之间构成了变换对。

3、拉氏反变换

对于连续的时间函数来说，它与它的拉普拉斯变换之间保持一一对应关系。

$$f(t) \xleftrightarrow{\text{一一对应}} F(s)$$

3、拉氏反变换

直接按上式求原函数太过复杂！

求取拉普拉斯反变换的基本方法是，将复杂的F(s)展开成很多简单项之和，分别求取简单项的拉普拉斯反变换，再叠加得到f(t)。

3、拉氏反变换

我们遇到的F(s)通常是有理分式。若F(s)不能在表中直接找到原函数，则需要将它展开成部分分式之和。这些部分分式的拉氏变换通常可以在表中查到。也就是：

$$F(s)=\frac{B(s)}{A(s)}$$

$$F(s)=F_1(s)+F_2(s)+\cdots+F_n(s)$$

$$f(t)=L^{-1}\left[F(s)\right]=L^{-1}\left[F_1(s)\right]+L^{-1}\left[F_2(s)\right]+\cdots+L^{-1}\left[F_n(s)\right]$$

3、拉氏反变换

几个重要的拉氏变换对

f(t)	F(s)	f(t)	F(s)
$\delta(t)$	1	$\sin wt$	$w/(s^2+w^2)$
$1(t)$	$1/s$	$\cos wt$	$s/(s^2+w^2)$
t	$1/s^2$	$e^{-at}\sin wt$	$\dfrac{w}{(s+a)^2+w^2}$
e^{-at}	$1/(s+a)$	$e^{-at}\cos wt$	$\dfrac{s+a}{(s+a)^2+w^2}$

例8 $F(s)=\dfrac{1}{(s+a)(s+b)}=\dfrac{1}{b-a}(\dfrac{1}{s+a}-\dfrac{1}{s+b})$

则$f(t)=\dfrac{e^{-at}-e^{-bt}}{b-a}$

例9 求 $F(s)=\dfrac{1}{s^2(s+1)}$ 的反变换。

$$F(s)=\frac{1}{s^2(s+1)}=\frac{1}{s^2}-\frac{1}{s}+\frac{1}{s+1}$$

$$f(t)=L^{-1}[F(s)]=t-1+e^{-t}$$

例10 $F(s)=\dfrac{1}{s(s-1)^2}$的逆变换

解： $F(s)=\dfrac{a}{s}+\dfrac{b}{s-1}+\dfrac{c}{(s-1)^2}$

则$a(s-1)^2+bs(s-1)+cs=1$

对应项系数相等得 $a=1, b=-1, c=1$

$$\therefore\ F(s)=\frac{1}{s}+\frac{-1}{s-1}+\frac{1}{(s-1)^2}$$

$$\therefore\ f(t)=1-e^t+te^t$$

最后一项用到频域平移性质。

4、求解线性微分方程

（1）对线性微分方程中每一项进行拉氏变换，将线性微分方程变为 s 的代数方程，然后整理代数方程，得到有关变量的拉氏变换的表达式；

（2）进行拉氏反变换，可以得到线性微分方程的解。

4、求解线性微分方程

例11 求解 $\frac{d^2x}{dt^2}+3\frac{dx}{dt}+6x=0, x(0)=0, \dot{x}(0)=3$

$$s^2X(s)-sx(0)-\dot{x}(0)+3sX(s)-3x(0)+6X(s)=0$$

$$X(s)=\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{5}}\frac{\sqrt{15}/2}{(s+1.5)^2+\left(\sqrt{15}/2\right)^2}$$

$$x(t)=\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{5}}e^{-1.5t}\sin\left(\frac{\sqrt{15}}{2}t\right)$$

利用性质2.2；并查拉氏变换对照表

4、求解线性微分方程

部分分式展开式的求法

$$F(s)=\frac{M(s)}{D(s)}=\frac{b_0 s^m+b_1 s^{m-1}+\cdots+b_{m-1}s+b_m}{s^n+a_1 s^{n-1}+\cdots+a_{n-1}s+a_n}(m<n)$$

（1）情况一:F(s)有不同极点,这时,F(s）总能展开成如下简单的部分分式之和

$$F(s)=\frac{c_1}{s-p_1}+\frac{c_2}{s-p_2}+\cdots+\frac{c_n}{s-p_n}$$

式中$p_i(i=1,2,\cdots,n)$是$D(s)=0$的根，

c_i是常数

$$c_i=[\frac{M(s)}{D(s)}(s-p_i)]_{s=p_i}$$

例12 $$F(s)=\frac{1}{(s+1)(s-2)(s+3)}$$

$$=\frac{c_1}{s+1}+\frac{c_2}{s-2}+\frac{c_3}{s+3}$$

$$c_1=\left[\frac{1}{(s+1)(s-2)(s+3)}\cdot(s+1)\right]_{s=-1}=-\frac{1}{6}$$

$$c_2=\left[\frac{1}{(s+1)(s-2)(s+3)}\cdot(s-2)\right]_{s=2}=\frac{1}{15}$$

$$c_3=\left[\frac{1}{(s+1)(s-2)(s+3)}\cdot(s+3)\right]_{s=-3}=\frac{1}{10}$$

$$\therefore F(s)=-\frac{1}{6}\frac{1}{s+1}+\frac{1}{15}\frac{1}{s-2}+\frac{1}{10}\frac{1}{s+3}$$

$$\therefore f(t)=-\frac{1}{6}e^{-t}+\frac{1}{15}e^{2t}+\frac{1}{10}e^{-3t}$$

（2）情况2:F(s)有共轭极点

例13 求解微分方程

$$y''+4y'+5y=0, y(0)=y'(0)=1$$

则微分方程两边同时取拉氏变换（初始条件不为零）

$$s^2F(s)-sf(0)-f'(0)+4sF(s)-4f(0)+5F(s)=0$$

$$\therefore F(s)=\frac{s+5}{s^2+4s+5}=\frac{s+5}{(s+2)^2+1}=\frac{s+2+3}{(s+2)^2+1}$$

$$=\frac{s+2}{(s+2)^2+1}+\frac{3}{(s+2)^2+1}$$

$$\therefore y=e^{-2t}\cos t+3e^{-2t}\sin t$$

同样用到了频域平移性质。注意:出现衰减震荡， ω=1

（3）情况3:F(s)有重极点

假若F(s)有L重极点 p_1,而其余极点均不相同。那么

$$F(s)=\frac{M(s)}{D(s)}=\frac{b_l}{(s-p_1)^l}+\frac{b_{l-1}}{(s-p_1)^{l-1}}+\cdots+\frac{b_1}{s-p_1}$$

$$+\frac{c_{l+1}}{s-p_{l+1}}+\cdots+\frac{c_n}{s-p_n}$$

式中 $b_l=[\frac{M(s)}{D(s)}\cdot(s-p_1)^l]_{s=p_1}$

$$b_{l-1}=\left\{\frac{d}{ds}[\frac{M(s)}{D(s)}\cdot(s-p_1)^l]\right\}_{s=p_1}$$

$$\cdots\cdots, b_{l-i} = \frac{1}{i!}\left\{\frac{d^i}{ds}\left[\frac{M(s)}{D(s)}(s-p_1)^l\right]\right\}_{s=p_1}$$

$$b_1 = \frac{1}{(l-1)!}\left\{\frac{d^{l-1}}{ds}\left[\frac{M(s)}{D(s)}(s-p_1)^l\right]\right\}_{s=p_1}$$

系数$c_{l+1},\cdots,c_n$，仍按以前的方法计算

$$c_j = \left[\frac{M(s)}{D(s)}(s-p_j)\right]_{s=p_j}$$

式中$p_j(j=l+1,\cdots,n)$是$D(s)=0$的其余互异极点。

例14 求对应的时间函数

$$F(s)=\frac{s^2+2s+3}{(s+1)^3}$$

解：

$$F(s)=\frac{s^2+2s+3}{(s+1)^3}=\frac{a_1}{s+1}+\frac{a_2}{(s+1)^2}+\frac{a_3}{(s+1)^3}$$

两边同时乘以 $(s+1)^3$ ，有

$$s^2+2s+3=a_1(s+1)^2+a_2(s+1)+a_3$$

比较系数有：

$$F(s)=\frac{s^2+2s+3}{(s+1)^3}=\frac{1}{s+1}+\frac{0}{(s+1)^2}+\frac{2}{(s+1)^3}$$

于是有：

$$f(t)=e^{-t}+t^2e^{-t}$$

例15 $y^{(3)}+3y''+3y'+y=1, y(0)=y'(0)=y''(0)=0$

求微分方程.

$$F(s)=\frac{1}{s(s+1)^3}=\frac{b_3}{(s+1)^3}+\frac{b_2}{(s+1)^2}+\frac{b_1}{s+1}+\frac{c_4}{s}$$

$$b_3=[\frac{1}{s(s+1)^3}(s+1)^3]_{s=-1}=-1$$

$$b_2=\left\{\frac{d}{ds}[\frac{1}{s(s+1)^3}(s+1)^3]\right\}_{s=-1}=[\frac{d}{ds}(\frac{1}{s})]_{s=-1}$$

$$=(-s^{-2})\Big|_{s=-1}=-1$$

$$b_1 = \frac{1}{2!}(2s^{-3})\Big|_{s=-1} = -1$$

$$c = \frac{1}{s(s+1)^3}s\Big|_{s=0} = 1$$

$$F(s) = \frac{1}{s} + \frac{-1}{(s+1)^3} + \frac{-1}{(s+1)^2} + \frac{-1}{s+1}$$

$$\Rightarrow y = 1 - \frac{1}{2}t^2e^{-t} - te^{-t} - e^{-t}$$

也用到了频域平移性质。

如果不记公式,可用以下方法求解

$$F(s)=\frac{1}{s(s+1)^3}=\frac{a}{s}+\frac{b_1}{(s+1)^3}+\frac{b_2}{(s+1)^2}+\frac{b_3}{s+1}$$

$$\therefore a(s+1)^3+b_1s+b_2(s+1)s+b_3s(s+1)^2=1$$

$$\therefore as^3+b_3s^3+(3a+b_2+2b_3)s^2$$

$$+(3a+b_1+b_2+b_3)s+a=1$$

$$\therefore a=1,b_1=-1,b_2=-1,b_3=-1$$

4、求解线性微分方程

在求解微分方程的过程中，可以有如下结论：

1、Laplace变换的确简化了微分方程的求解。

2、分母多项式又称为特征多项式，特征方程即特征多项式等于0，其解称为特征根或极点。

$$s^2+4s+3=0 \Rightarrow s_1=-1, s_2=-3$$

4、求解线性微分方程

3、极点决定了解的结构。

$$s=-a \Leftrightarrow e^{-at}$$

$$s=\pm j\omega \Leftrightarrow \sin(\omega t+\phi)$$

$$s=-a\pm j\omega \Leftrightarrow e^{-at}\sin(\omega t+\phi)$$

习题

E2.4, E2.21, E2.18, E2.29, E2.30 , P2.37

（拉普拉斯变换与时间响应求解）