第四章

1. 试求边长为a,b,c（包括外推距离）的长方体裸堆的几何曲率和中子通量密度的分布。设有一边长$a=b=0.5m,c=0.6m$（包括外推距离）的长方体裸堆，$L=0.043m$，$\tau=6\times10^{-4}m^2$。（1）求达到临界时所必须的k_∞；（2）如果功率为$5000kW,\sum_f=4.01m^{-1}$，求中子通量密度分布。

解：长方体的几何中心为原点建立坐标系，则单群稳态扩散方程为：

$$D(\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial z^2})-\sum_a\phi+k_\infty\sum_a\phi=0$$

边界条件： $\phi(a/2,y,z)=\phi(x,b/2,z)=\phi(x,y,c/2)=0$

（以下解题过程都不再强调外推距离，可认为所有外边界尺寸已包含了外推距离）

因为三个方向的通量拜年话是相互独立的，利用分离变量法：

$$\phi(x,y,z)=X(x)Y(y)Z(z)$$

将方程化为：$\frac{\nabla^2X}{X}+\frac{\nabla^2Y}{Y}+\frac{\nabla^2Z}{Z}=-\frac{k_\infty-1}{L^2}$

设：$\frac{\nabla^2X}{X}=-B_x^2,\frac{\nabla^2Y}{Y}=-B_y^2,\frac{\nabla^2Z}{Z}=-B_z^2$

想考虑 X 方向，利用通解：$X(x)=A\cos B_xx+C\sin B_xx$

代入边界条件：$A\cos(B_x\frac{a}{2})=0\Rightarrow B_{nx}=\frac{n\pi}{a},n=1,3.5,...\Rightarrow B_{1x}=\frac{\pi}{a}$

同理可得：$\phi(x,y,z)=\phi_0\cos(\frac{\pi}{a}x)\cos(\frac{\pi}{a}y)\cos(\frac{\pi}{a}z)$

其中ϕ_0是待定常数。

其几何曲率：$B_g^2=(\frac{\pi}{a})^2+(\frac{\pi}{b})^2+(\frac{\pi}{c})^2=106.4m^{-2}$

（1）应用修正单群理论，临界条件变为：$\frac{k_\infty-1}{M^2}=B_g^2$

其中：$M^2=L^2+\tau=0.00248m^2$

$\Rightarrow k_\infty=1.264$

（2）只须求出通量表达式中的常系数ϕ_0

$$P=E_f\int_V\sum_f\phi dV=E_f\sum_f\phi_0\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}}\cos(\frac{\pi}{a}x)dx\int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}}\cos(\frac{\pi}{b}y)dy\int_{-\frac{c}{2}}^{\frac{c}{2}}\cos(\frac{\pi}{c}z)dz=E_f\sum_f\phi_0abc(\frac{2}{\pi})^3$$

$$\Rightarrow\phi_0=\frac{P(\frac{2}{\pi})^3}{E_f\sum_f abc}=1.007\times10^{18}m^{-2}s^{-1}$$

2. 设一重水—铀反应堆的堆芯$k_\infty=1.28,L^2=1.8\times10^{-2}m^2,\tau=1.20\times10^{-2}m^2$。试按单群理论，修正单群理论的临界方程分别求出该芯部的材料曲率和达到临界时候的总的中子不泄露几率。

解：对于单群理论：

在临界条件下：$\Lambda = \dfrac{1}{1+B_g^2L^2} = \dfrac{1}{1+B_m^2L^2} = 0.7813$

（或用 $\Lambda = 1/k_\infty$ ）

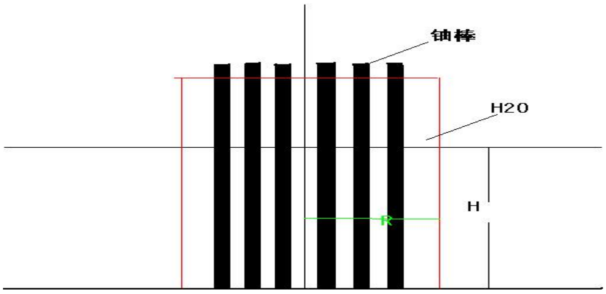
对于单群修正理论：$M^2 = L^2 + \tau = 0.03m^2$

$$B_M^2 = \frac{k_\infty - 1}{L^2} = 9.33m^{-2}$$

在临界条件下：$\Lambda = \dfrac{1}{1+B_g^2M^2} = \dfrac{1}{1+B_m^2M^2} = 0.7813$

（注意：这时能用 $\Lambda = 1/k_\infty$ ，实际上在维持临界的前提条件下修正理论不会对不泄露几率产生影响，但此时的几何曲率、几何尺寸已发生了变化，不再是之前的系统了。）

4. 设有圆柱形铀-水栅装置，R=0.50 米，水位高度 H=1.0 米，设栅格参数为：k_∞=1.19，L^2=6.6×10^{-4} 米 ^{2}， τ =0.50×10^{-2} 米 ^{2}。（a）试求该装置的有效增殖系数 k；（b）当该装置恰好达临界时，水位高度 H 等于多少？（c）设某压水堆以该铀-水栅格作为芯部，堆芯的尺寸为 R=1.66 米，H=3.50 米，若反射层节省估算为 δ_r=0.07 米， δ_H=0.1 米。试求反应堆的初始反应性 ρ 以及快中子不泄漏几率和热中子不泄漏几率。



（a）已知了反应堆的几何曲率 B_g

栅格参数 k_∞、L^2、τ

修正单群临界理论

$k = \dfrac{k_\infty}{1+(L^2+\tau)B_g^2}$

有效增殖系数 k_{eff}

（b）已知系统达临界，$k_{eff}=1$

栅格参数 k_∞、L^2、τ

临界理论

材料曲率 B_m

$B_m^2 = \dfrac{k_\infty - 1}{L^2+\tau}$

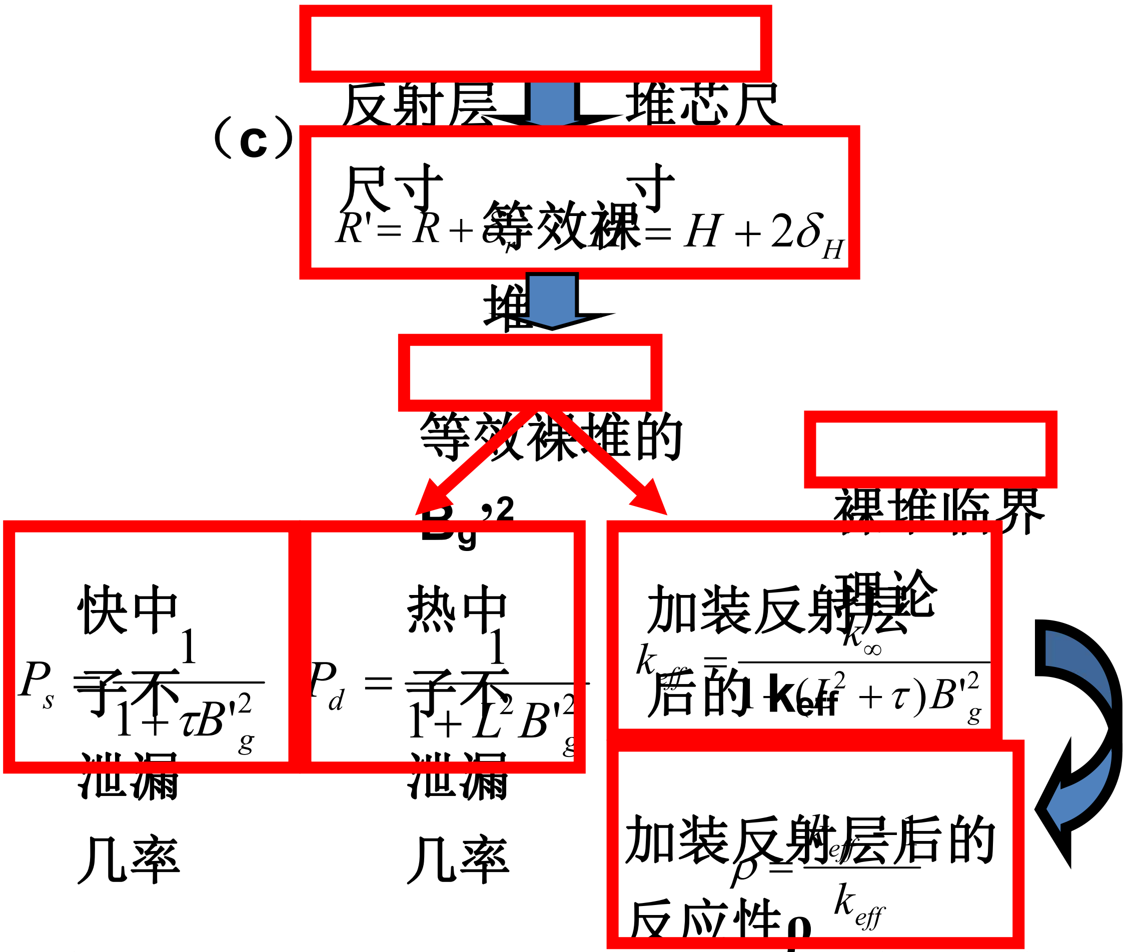
临界时，几何曲率=材料曲率

已经有

几何曲率 B_g

对于圆柱形裸堆 $B_g^2 = B_r^2 + B_z^2 = \left(\dfrac{2.405}{R}\right)^2 + \left(\dfrac{\pi}{H}\right)^2$

（c）



5. 一个球壳形反应堆，内半径为 R_1，外半径为 R_2，如果球的内、外均为真空，求证单群理论的临界条件为：

$$\tan BR_2 = \frac{\tan BR_1 - BR_1}{1 + BR_1 \tan BR_1}$$

解答：以球心为坐标原点建立球坐标系，单群稳态扩散方程：

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial \phi}{\partial r} = -B^2 \phi$$

边界条件：i. $\lim\limits_{x \to R_1} J = 0;$

ii. $\phi(R_2) = 0$

（如果不 R_2 包括了外推距离的话，所得结果将与题意相悖）

球域内方程通解：$\phi(r) = A\frac{\cos Br}{r} + C\frac{\sin Br}{r}$

由条件 i 可得：

$$\lim_{r \to R_1} J = -D\nabla\phi\big|_{r=R_1} = AB\frac{\cos BR_1}{R_1} - A\frac{\sin BR_1}{R_1^2} - CB\frac{\sin BR_1}{R_1} - C\frac{\cos BR_1}{R_1^2} = 0$$

$$\Rightarrow C = A\frac{BR_1 \cos BR_1 - \sin BR_1}{BR_1 \sin BR_1 + \cos BR_1} = -A\frac{\tan BR_1 - BR_1}{BR_1 \tan BR_1 + 1}$$

由条件 ii 可得：

由此可见，$\tan BR_2 = \dfrac{\tan BR_1 - BR_1}{BR_1 \tan BR_1 + 1}$，证毕。

7.一由纯 ^{235}U 金属 $(\rho = 18.7\times 10^3 kg/m^3)$ 组成的球形快中子堆，其周围包以无限厚的纯 ^{238}U $(\rho = 19.0\times 10^3 kg/m^3)$，试用单群理论计算其临界质量，单群常数如下：

$^{235}U:\sigma_f = 1.5b, \sigma_a = 1.78b, \sum_{tr} = 35.4m^{-1}, v = 2.51; {}^{238}U:\sigma_f = 0, \sigma_a = 0.18b, \sum_{tr} = 35.4m^{-1}$。

解：以球心为左边原点建立球左边系，对于 U-235 和 U-238 分别列单群稳态扩散方程，设其分界面在半径为 R 处：

$U-235:\nabla^2\phi_5 = -\dfrac{k_\infty - 1}{L_5^2}\phi_5$　　　方程 1

$U-238:\nabla^2\phi_8 = \dfrac{1}{L_8^2}\phi_8$　　　方程 2

边界条件：i. $\lim\limits_{r\to 0}\phi_5 < \infty$　　　ii. $\phi_5(R) = \phi_8(R)$

iii. $D_5 \dfrac{\partial \phi_5}{\partial r}\Big|_{r=R} = D_8 \dfrac{\partial \phi_8}{\partial r}\Big|_{r=R}$　　　iv. $\lim\limits_{r\to\infty}\phi_8 = 0$

令 $B^2 = \dfrac{k_\infty - 1}{L_5^2}$（.在此临界条件下，既等于材料曲率，也等于几何曲率），球域内

方程 1 通解：$\phi_5(r) = A_5 \dfrac{\cos Br}{r} + C_5 \dfrac{\sin Br}{r}$

由条件 i 可知 $A_5 = 0$，所以：$\phi_5(r) = C\dfrac{\sin Br}{r}$

球域内方程 2 通解：$\phi_8(r) = A_8 \dfrac{\exp(-r/L_8)}{r} + C_8 \dfrac{\exp(r/L_8)}{r}$

由条件 iv 可知,所以：$\phi_8(r) = A_8 \dfrac{\exp(-r/L_8)}{r}$

由条件 ii 可得：$C\dfrac{\sin BR}{R} = A\dfrac{\exp(-R/L_8)}{R} \Rightarrow C = A\dfrac{\exp(-R/L_8)}{\sin BR}$

由条件 iii 可得：

$$D_5 C(B\frac{\cos BR}{R} - \frac{\sin BR}{R}) = D_8 A(-\frac{1}{L_8 R} - \frac{1}{R^2})\exp(-\frac{R}{L_8}) \Rightarrow C = \frac{D_8}{D_5} A\frac{(\frac{R}{L_8}+1)\exp(-\frac{R}{L_8})}{\sin BR - BR\cos BR}$$

所以（由题目已知参数 $\sum_{tr,5} = \sum_{tr,8} \Rightarrow D_5 = \dfrac{1}{3\sum_{tr,5}} = \dfrac{1}{3\sum_{tr,8}} = D_8$）

$$A\frac{(\frac{R}{L_8}+1)\exp(-\frac{R}{L_8})}{\sin BR - BR\cos BR} = \frac{D_8}{D_5} A\frac{\exp(-R/L_8)}{\sin BR} \Rightarrow \sin BR - BR\cos BR = (\frac{R}{L_8}+1)\sin BR$$

即：$-BR\cos BR = \dfrac{R}{L_8}\sin BR$

$$\cos BR = -\frac{1}{BL_8}\sin BR \Rightarrow R = \frac{arc\cot(-1/BL_8)}{B}$$

代入数据：

$$N_8=\frac{10^3\rho_5 N_A}{M_5}=4.79\times10^{-28}m^{-3}$$

$$N_8=\frac{10^3\rho_8 N_A}{M_8}=4.81\times10^{-28}m^{-3}$$

$$k_\infty=\frac{v\sum_{f,5}}{\sum_{a,5}}=\frac{v\sigma_{f,5}}{\sigma_{a,5}}=2.115$$

$$L_5^2=\frac{1}{3\sum_{a,5}\sum_{f,5}}=1.31\times10^{-3}m^2$$

$$B^2=\sqrt{\frac{k_\infty-1}{L_5^2}}=29.17m^{-1}$$

$$L_8=\sqrt{\frac{1}{3\sum_{a,5}\sum_{f,5}}}=0.1043m$$

$$R=\frac{arc\cot(-1/BL_8)}{B}=\frac{\pi/2+\arctan(1/BL_8)}{B}=0.06474m$$

$$m=\rho_5 V_5=\rho_5\times\frac{4}{3}\pi R^3=21.3kg$$

8.试证明有限高半圆形反应堆中子通量密度分布和几何曲率

$$\phi(r,z\mu)=AJ_1(\frac{x_1 r}{R})\sin\theta\cos(\frac{\pi z}{H})$$

$$B_g^2=(\frac{x_1}{R})^2+(\frac{\pi}{H})^2$$

其中：$x_1=3.89$ 是 $J_1(x_1)$ 的第一个零点，即。

证明：（1）书上图 4-8 所示的柱坐标系下，单群稳态扩散方程可写为（临界条件下，几何曲率与材料曲率相等）：

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial\theta^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}=-B_g^2\phi,(0\le r\le R,0\le\theta\le\pi,-H/2\le Z\le H/2)$$

边界条件（不考虑外推距离）：i. $\phi|_{r=R}=\phi|_{r=0}=0$

ii. $\phi|_{\theta=0}=\phi|_{\theta=\pi}=0$

iii. $\phi|_{z=H/2}=\phi|_{z=-H/2}=0$

(注意,这里不能用线性微分方程解的存在唯一性定理：

如果 $\phi_i(t)(i=1,2,\cdots,n),f(t)$ 都是区间 $[a,b]$ 上的连续函数，则对于任一 $t_0\in(a,b)$ 及任意的 $x_0^{(0)},x_0^{(1)},x_0^{(2)},\cdots x_0^{(n-1)}$，方程：

$$x^{(n)}+a_1x^{(n)}+\cdots+a_{n-1}x'+a_nx=f(t)$$

存在唯一解

$$x=\varphi(t)$$

定义于区间 $[a,b]$ 上，且满足初值条件 $x^{(k)}(t_0)=x_0^{(k)}(k=0,\cdots,n-1)$，而此扩散方程并非线性微分方程。）

对于表达式：$\phi(r,z,\theta)=AJ_1(\frac{x_1 r}{R})\sin\theta\cos(\frac{\pi z}{H}),x_1=3.89$

不难证明其满足上述全部三个边界条件。$(J_1(0)=J_1(3.89)=0)$