第三章

1.有两束方向相反的平行热中子束射到 ^{235}U 的薄片上，设其上某点自左面入射的中子束强度为$10^{12}cm^{-2}\cdot s^{-1}$。自右面入射的中子束强度为$2\times10^{12}cm^{-2}\cdot s^{-1}$。计算：

（1）该点的中子通量密度；

（2）该点的中子流密度；

（3）设$\sum_a=19.2\times10^2 m^{-1}$，求该点的吸收率。

解：（1）由定义可知：$\phi=I^+ + I^- = 3\times10^{12}cm^{-2}s^{-1}$

（2）若以向右为正方向：$\overline{J}=I^+ - I^- = -1\times10^{12}cm^{-2}s^{-1}$
可见其方向垂直于薄片表面向左。

（3）$R_a=\sum_a\phi=19.2\times10^2\times3\times10^{12}\times10^{-2}=5.76\times10^{13}cm^{-3}s^{-1}$

2.设在 x 处中子密度的分布函数是：$n(x,E,\overrightarrow{\Omega})=\dfrac{n_0}{2\pi}e^{-x/\lambda}e^{aE}(1+\cos\mu)$

其中：λ, a 为常数，　μ 是$\overrightarrow{\Omega}$与 x 轴的夹角。求：

（1）　中子总密度$n(x)$；

（2）　与能量相关的中子通量密度$\phi(x,E)$；

（3）　中子流密度$J(x,E)$。

解：由于此处中子密度只与$\overrightarrow{\Omega}$与 x 轴的夹角相关，不妨视 μ 为视角，定义$\overrightarrow{\Omega}$在$Y-Z$平面影上与 Z 轴的夹角 φ 为方向角，则有：

（1）　根据定义：

$$n(x)=\int_0^{+\infty}dE\int_{4\pi}\frac{n_0}{2\pi}e^{-x/\lambda}e^{aE}(1+\cos\mu)d\overrightarrow{\Omega}$$
$$=\int_0^{+\infty}dE\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\pi}\frac{n_0}{2\pi}e^{-x/\lambda}e^{aE}(1+\cos\mu)\sin\mu d\mu$$
$$=n_0e^{-x/\lambda}\int_0^{+\infty}e^{aE}dE\int_0^{\pi}(1+\cos\mu)\sin\mu d\mu$$

可见，上式可积的前提应保证$a<0$，则有：

$$n(x)=n_0e^{-x/\lambda}(\frac{e^{aE}}{a})\Big|_0^{+\infty}(\int_0^{\pi}\sin\mu d\mu+\int_0^{\pi}\cos\mu\sin\mu d\mu)$$
$$=-\frac{n_0e^{-x/\lambda}}{a}(-\cos\mu\Big|_0^{\pi}+0)=-\frac{2n_0e^{-x/\lambda}}{a}$$

（2）令 m_n 为中子质量，则$E=m_nv^2/2\Rightarrow v(E)=\sqrt{2E/m_n}$

$$\phi(x,E)=n(x,E)v(E)=\sqrt{2E/m_n}\int_{4\pi}n(x,E,\overrightarrow{\Omega})d\overrightarrow{\Omega}=2n_0e^{-x/\lambda}e^{aE}\sqrt{2E/m_n}$$

（等价性证明：如果不做坐标变换，则依据投影关系可得：

$$\cos\mu=\sin\theta\cos\varphi$$

则涉及角通量的、关于空间角的积分：

$$\int_{4\pi}(1+\cos\mu)d\overrightarrow{\Omega}=\int_0^{2\pi}(1+\sin\theta\cos\varphi)\sin\theta d\theta$$
$$=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\pi}\sin\theta d\theta+\int_0^{2\pi}\cos\varphi d\varphi\int_0^{\pi}\sin^2\theta d\theta$$
$$=2\pi(-\cos\theta\Big|_0^{\pi})+(2\pi\int_0^{\pi}\sin\mu\cos\mu d\mu)=4\pi+0=4\pi$$

对比：

$$\int_{4\pi}(1+\cos\mu)d\overrightarrow{\Omega}=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\pi}(1+\cos\mu)\sin\mu d\mu$$

$$=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\pi}\sin\mu d\mu+\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\pi}\sin\mu\cos\mu d\mu$$

$$=2\pi(-\cos\mu|_0^{\pi})+(2\pi\int_0^{\pi}\sin\mu\cos\mu d\mu)=4\pi+0=4\pi$$

可知两种方法的等价性。）

（3）根据定义式：

$$J(x,E)=\int_{4\pi}\overline{\Omega}\phi(x,E,\overline{\Omega})d\overline{\Omega}=\int_{4\pi}\overline{\Omega}n(x,E,\overline{\Omega})v(E)d\overline{\Omega}$$

$$=\frac{n_0e^{-x/\lambda}e^{aE}\sqrt{2E/m_n}}{2\pi}\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\pi}\cos\mu(1+\cos\mu)\sin\mu d\mu$$

$$=n_0e^{-x/\lambda}e^{aE}\sqrt{2E/m_n}(\int_0^{\pi}\cos\mu\sin\mu d\mu+\int_0^{\pi}\cos^2\mu\sin\mu d\mu)$$

利用不定积分：$\int\cos^n x\sin xdx=-\frac{\cos^{n+1}x}{n+1}+C$（其中 n 为正整数），则：

$$J(x,E)=n_0e^{-x/\lambda}e^{aE}\sqrt{2E/m_n}(0-\frac{\cos^3\mu}{3}|_0^{\pi})=\frac{2n_0e^{-x/\lambda}e^{aE}\sqrt{2E/m_n}}{3}$$

6．在某球形裸堆（R=0.5 米）内中子通量密度分布为

$$.\quad \varphi(r)=\frac{5\times10^{17}}{r}\sin(\frac{\pi r}{R})(cm^{-2}s^{-1})$$

试求：

（1）$\phi(0)$；

（2）$J(r)$ 的表达式，设 $D=0.8\times10^{-2}m$；

（3）每秒从堆表面泄露的总中子数（假设外推距离很小，可略去不济）。

解：（1）由中子通量密度的物理意义可知，φ 必须满足有限、连续的条件

$$\therefore\qquad \varphi(0)=\lim_{r\to0}\varphi(r)=\lim_{r\to0}\frac{5\times10^{17}}{r}\sin(\frac{\pi r}{R})$$

$$=\lim_{r\to0}\frac{5\times10^{17}}{r}\cdot\frac{\pi r}{R}$$

$$=5\times10^{17}\cdot\frac{\pi}{R}$$

$$=3.14\times10^{18}\quad cm^{-2}s^{-1}$$

（2）　中子通量密度分布：$\varphi(r)=\frac{5\times10^{17}}{r}\sin(\frac{\pi r}{R})\quad cm^{-2}s^{-1}$

$$\Rightarrow\qquad J(r)=-Dgrad\varphi$$

$$=-D\frac{\partial\varphi(r)}{\partial r}\vec{e}$$

（$\vec{e}$ 为径向单位矢量）

$$\Rightarrow\qquad J(r)=-0.8\times10^{-2}\times\left[\frac{-5\times10^{17}}{r^2}\sin(\frac{\pi r}{R})+\frac{5\times10^{17}}{r}\cos(\frac{\pi r}{R})\frac{\pi}{R}\right]\vec{e}$$

$$=4\times10^{15}\left[\frac{1}{r^2}\sin(2\pi r)-\frac{2\pi}{r}\cos(2\pi r)\right]\vec{e}$$

（3）泄漏中子量=径向中子净流量×球体表面积

$\therefore \qquad L = \oint \vec{J} \cdot \vec{ds}$

中子流密度矢量：

$$J(r) = 4\times10^{15}\left[\frac{1}{r^2}\sin(2\pi r) - \frac{2\pi}{r}\cos(2\pi r)\right]\vec{e}$$

$\because J(r)$ 仅于 r 有关，在给定 r 处各向同性

$$\therefore \qquad L = J(R)\times 4\pi R^2$$

$$= 4\times10^{15}\times\frac{\pi}{0.5^2}\times 4\pi\times 0.5^2$$

$$= 1.58\times10^{17}s^{-1}$$

7.设有一立方体反应堆，边长 $a = 9\ m$. 中子通量密度分布为：

$$\phi(x,y,z) = 3\times10^{13}\cos(\frac{\pi x}{a})\cos\left(\frac{\pi y}{b}\right)\cos\left(\frac{\pi z}{c}\right)(cm^{-2}\cdot s^{-1})$$

已知 $D = 0.84\times10^{-2}m, L = 0.175m.$ 试求：

（1） $J(r)$ 的表达式；

（2）从两端及侧面每秒泄露的中子数；

（3）每秒被吸收的中子数（设外推距离很小，可略去）。

解：有必要将坐标原点取在立方体的几何中心，以保证中子通量始终为正。为简化表达式起见，不妨设 $\phi_0 = 3\times10^{13}cm^{-2}s^{-1}$。

（1） 利用斐克定律：

$$\vec{J}(\vec{r}) = \vec{J}(x,y,z) = -Dgrad\,\phi(x,y,z) = -D(\frac{\partial\phi}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial\phi}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial\phi}{\partial y}\vec{k})$$

$$= D\phi_0\frac{\pi}{a}\left[\sin(\frac{\pi x}{a})\cos(\frac{\pi y}{b})\cos(\frac{\pi z}{c})\vec{i} + \sin(\frac{\pi y}{b})\cos(\frac{\pi x}{a})\cos(\frac{\pi z}{c})\vec{j} + \sin(\frac{\pi z}{c})\cos(\frac{\pi x}{a})\cos(\frac{\pi y}{b})\vec{k}\right]$$

$$J(\vec{r}) = \left|\vec{J}(\vec{r})\right|$$

$$= D\phi_0\frac{\pi}{a}\sqrt{\sin^2(\frac{\pi x}{a})\cos^2(\frac{\pi y}{b})\cos^2(\frac{\pi z}{c}) + \sin^2(\frac{\pi y}{b})\cos^2(\frac{\pi x}{a})\cos^2(\frac{\pi z}{c}) + \sin^2(\frac{\pi z}{c})\cos^2(\frac{\pi x}{a})\cos^2(\frac{\pi y}{b})}$$

（2）先计算上端面的泄漏率：

$$L\big|_{Z=a/2} = \int_{S(z=a/2)}\vec{J}(r)\vec{k}dS = D\phi_0\frac{\pi}{a}\int_{-a/2}^{a/2}dx\int_{-a/2}^{a/2}\sin(\frac{\pi}{2})\cos(\frac{\pi x}{a})\cos(\frac{\pi y}{b})dy$$

$$= D\phi_0\frac{\pi}{a}\left[\frac{a}{\pi}\sin(\frac{\pi x}{a})\right]\Big|_{-a/2}^{a/2}\left[\frac{a}{\pi}\sin(\frac{\pi y}{a})\right]\Big|_{-a/2}^{a/2} = 4D\phi_0\frac{\pi}{a}$$

同理可得，六个面上的总的泄漏率为：

$$L = 6\times 4D\phi_0\frac{\pi}{a} = 24\times0.84\times10^{-2}\times3\times10^{13}\times\frac{9}{3.14} = 1.7\times10^{17}s^{-1}$$

其中，两端面的泄漏率为：$L/3 = 5.8\times10^{16}s^{-1}$;

侧面的泄漏率为：$L - L/3 = 1.2\times10^{17}s^{-1}$

（如果有同学把问题理解为“六个面”上的总的泄露，也不算错）

（3）由 $L^2 = D/\sum_a$，可得：$\sum_a = D/L^2$

由于外推距离可忽略，只考虑堆体积内的吸收反应率：

$$\int_V R_a dV = \int_V \sum_a \phi dV = D/L^2\int_{-a/2}^{a/2}dx\int_{-a/2}^{a/2}dy\int_{-a/2}^{a/2}\cos(\frac{\pi x}{a})\cos\left(\frac{\pi y}{b}\right)\cos\left(\frac{\pi z}{c}\right)dz = \frac{D}{L^2}\phi_0(\frac{2a}{\pi})^3$$

$$= \frac{0.84\times10^{-2}}{0.175^2}\times3\times10^{13}\times(\frac{2\times9}{3.14})^3 = 1.24\times10^{20}\,s^{-1}$$

8.圆柱体裸堆内中子通量密度分布为

$$\varphi(r,z)=10^{16}\cos\left(\frac{\pi z}{H}\right)J_0\left(\frac{2.405r}{R}\right)(cm^{-2}\bullet s^{-1})$$

其中，H,R 为反应堆的高度和半径（假定外推距离可略去不计）。试求：

（1） 径向和轴向的平均中子通量密度和最大中子通量密度之比；

（2） 每秒从堆侧表面和两个端面泄露的中子数；

（3） 设 $H=7m, R=3m$，反应堆功率为 $10MW$，$\sigma_f^5=410b$，求反应堆内 ^{235}U 的装载量。

解：

(a)1.径向中子通量密度平均值与径向中子通量密度最大值之比：

$$\frac{\phi(r)}{\phi_{\max}(r)}=\frac{\frac{1}{R}\int_0^R\phi(r,z)dr}{\phi(r')} \qquad \text{（1）}$$

由极值条件：

$$\frac{\partial\phi(r,z)}{\partial r}=0 \qquad \text{（2）}$$

求出使φ取极大值的 r

代入方程（1）

$$\frac{\phi(r)}{\phi_{\max}(r)}$$