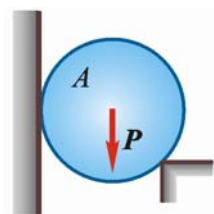
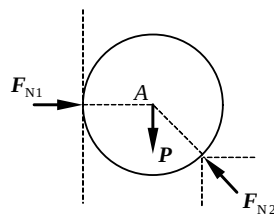


第1章 静力学公理和物体的受力分析

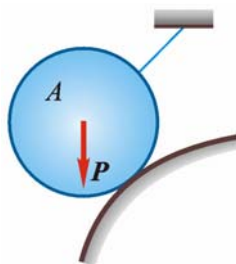
1-1 画出下列各图中物体 A , ABC 或构件 AB , AC 的受力图。未画重力的各物体的自重不计，所有接触处均为光滑接触。



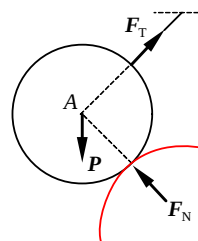
(a)



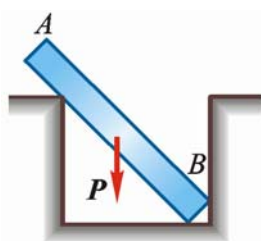
(a1)



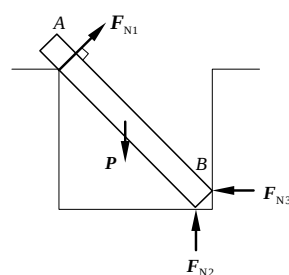
(b)



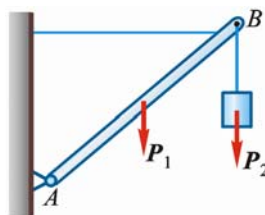
(b1)



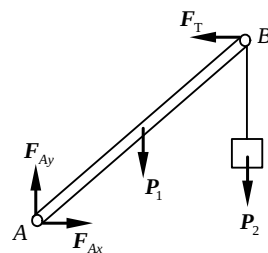
(c)



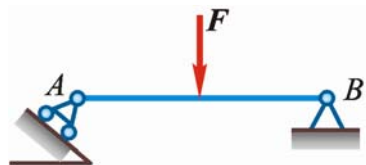
(c1)



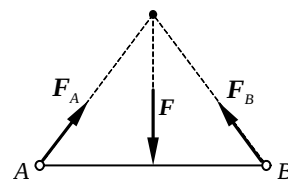
(d)



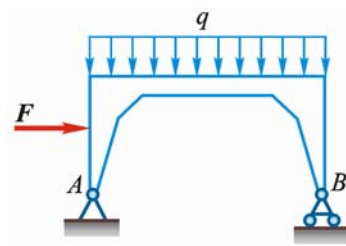
(d1)



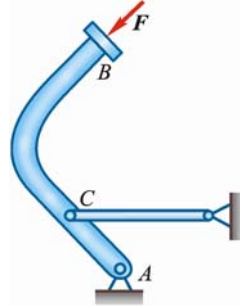
(e)



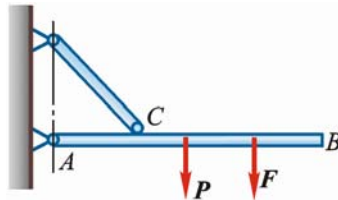
(e1)



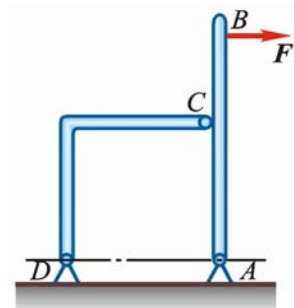
(f)



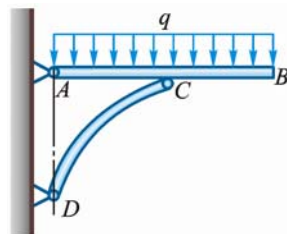
(g)



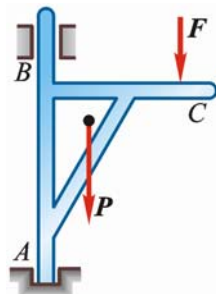
(h)



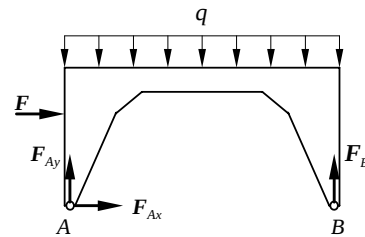
(i)



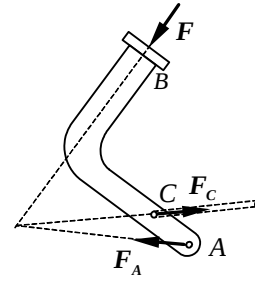
(j)



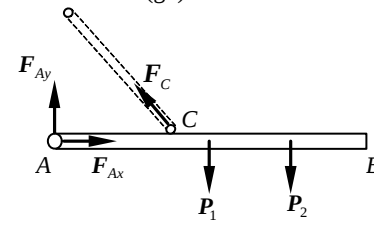
(k)



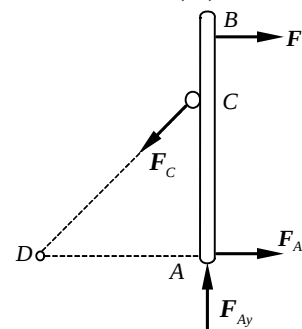
(f1)



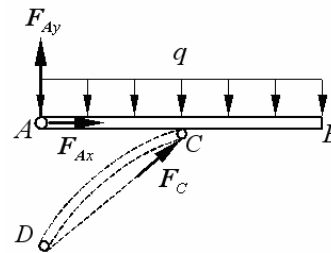
(g1)



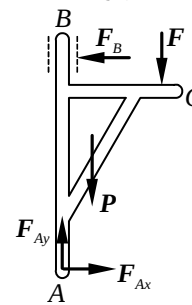
(h1)



(i1)



(j1)



(k1)

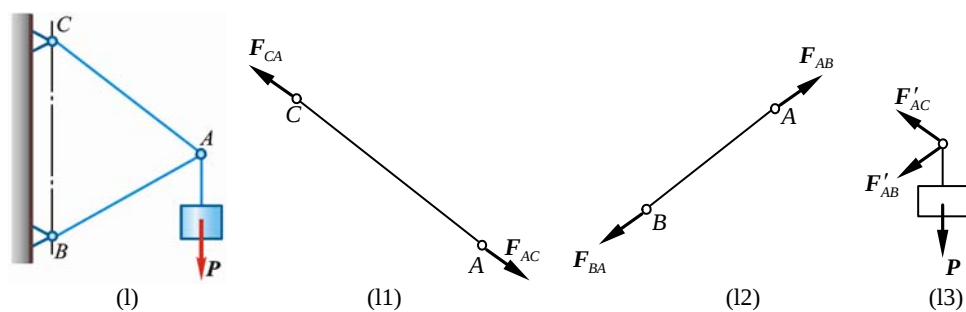
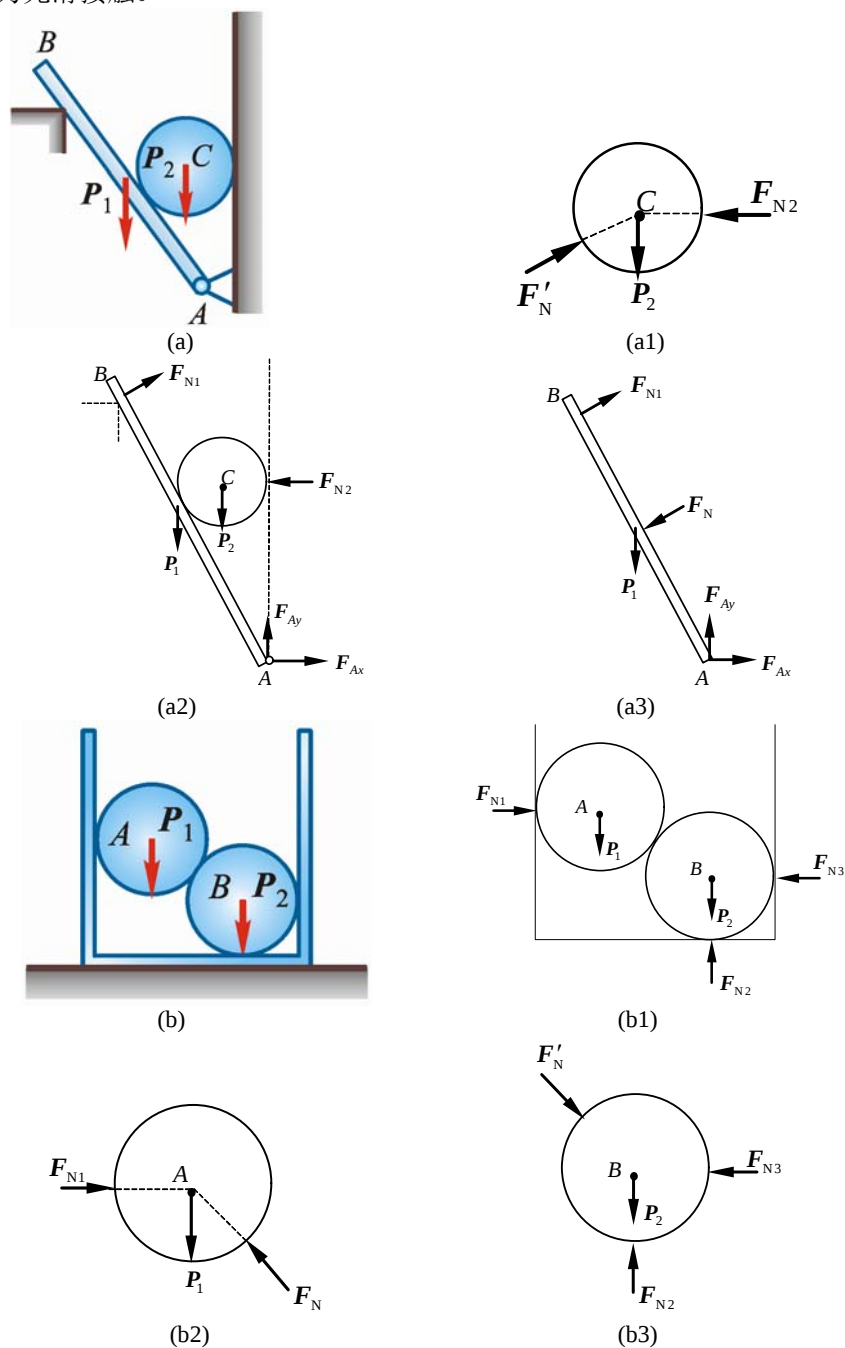
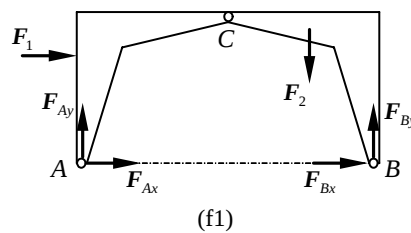
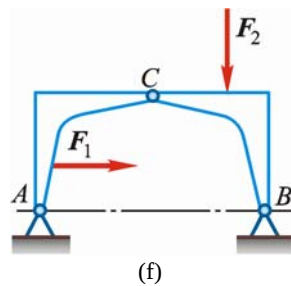
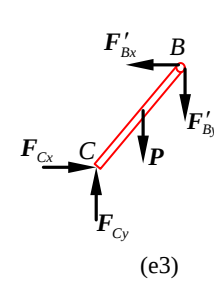
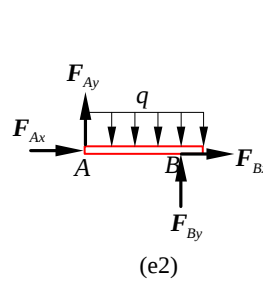
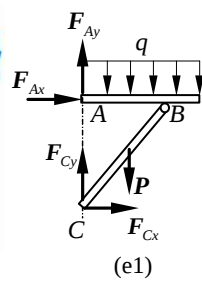
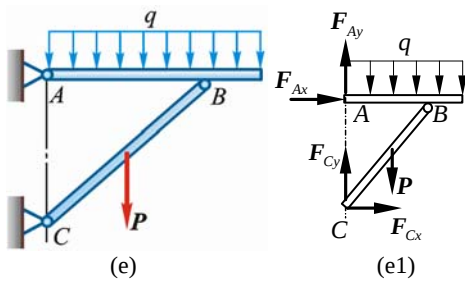
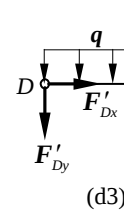
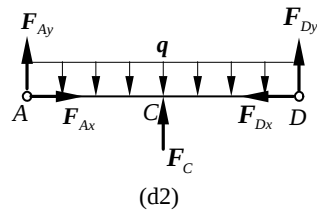
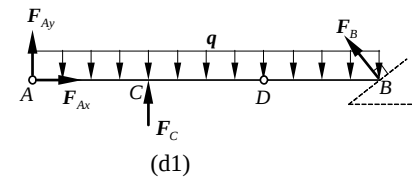
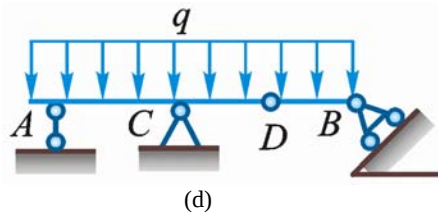
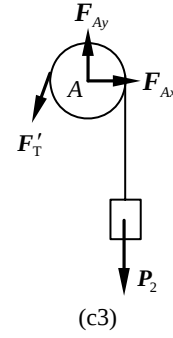
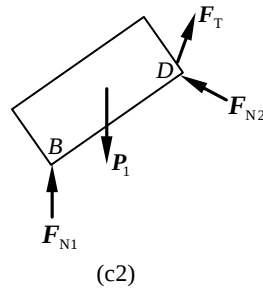
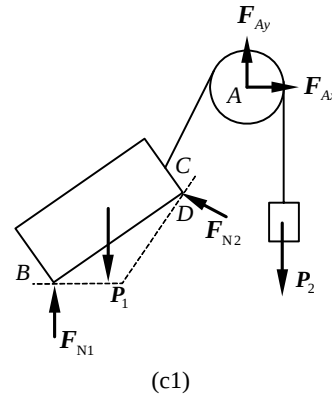
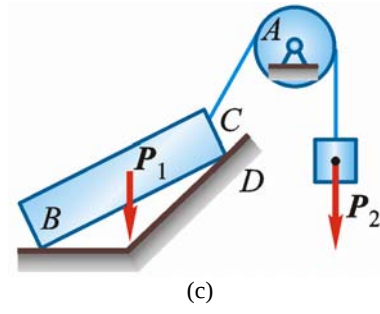
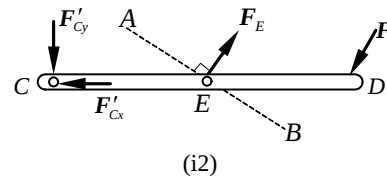
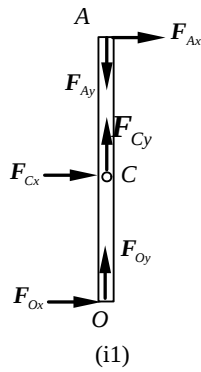
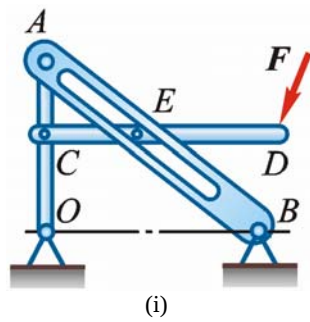
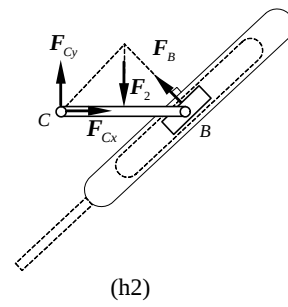
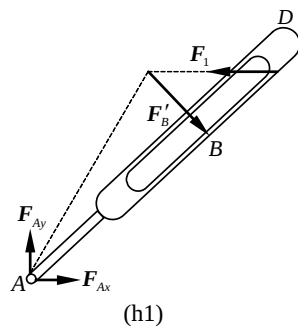
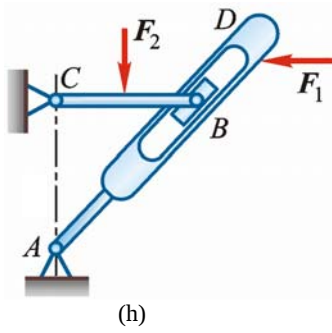
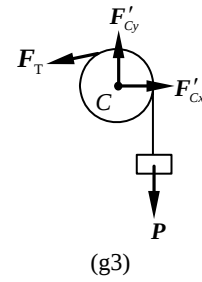
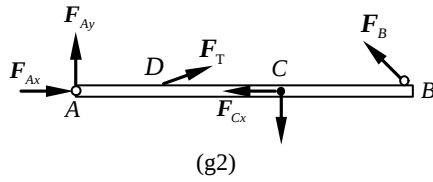
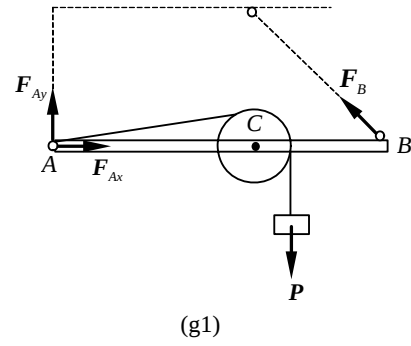
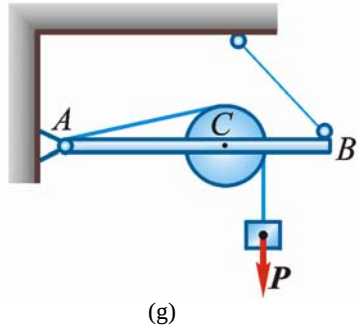
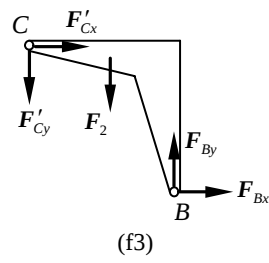
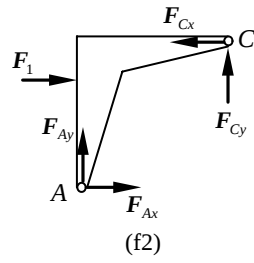


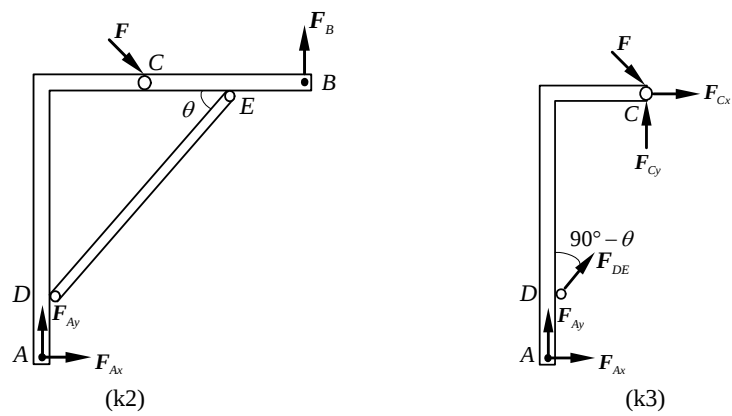
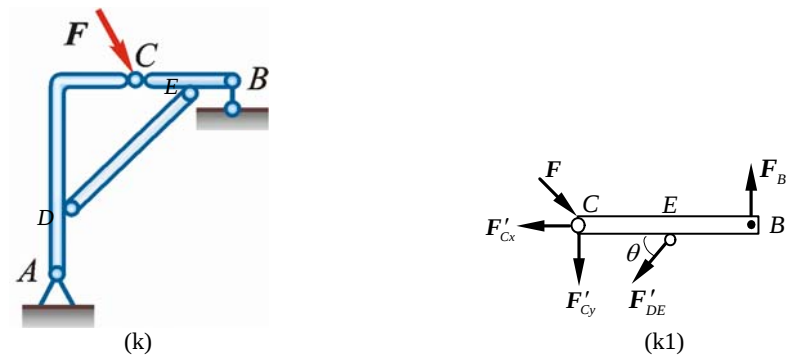
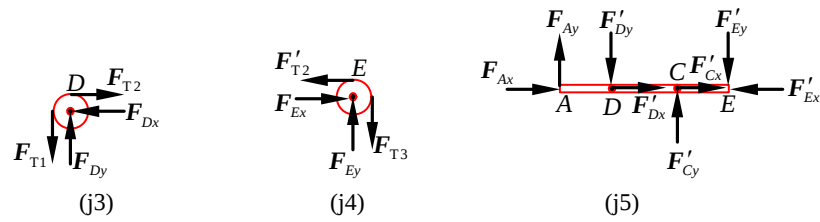
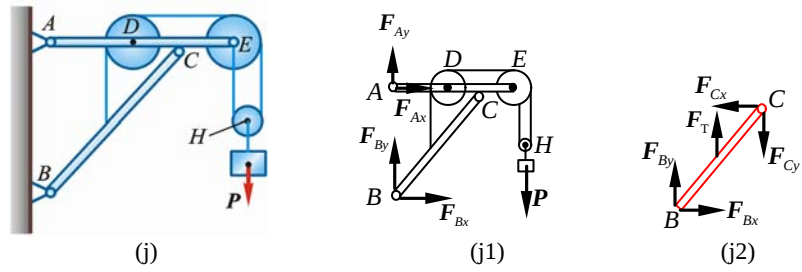
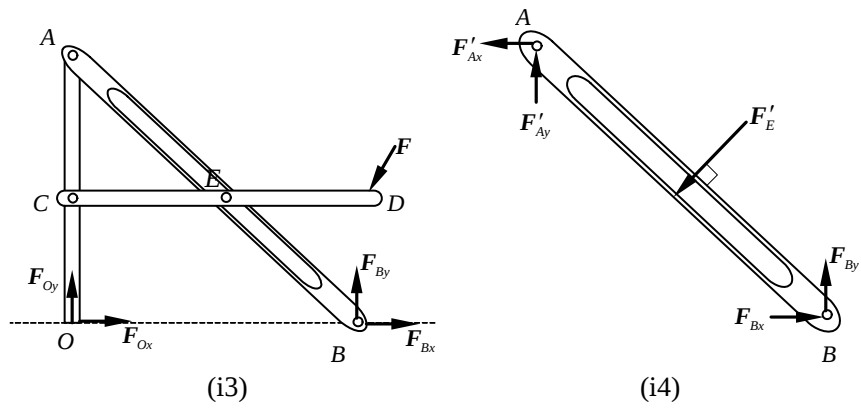
图 1-1

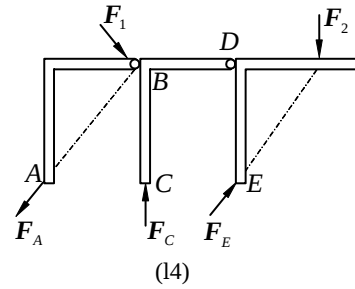
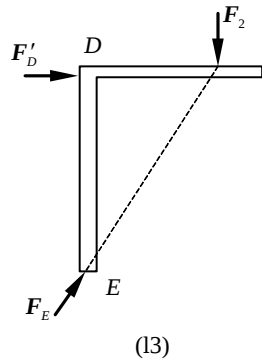
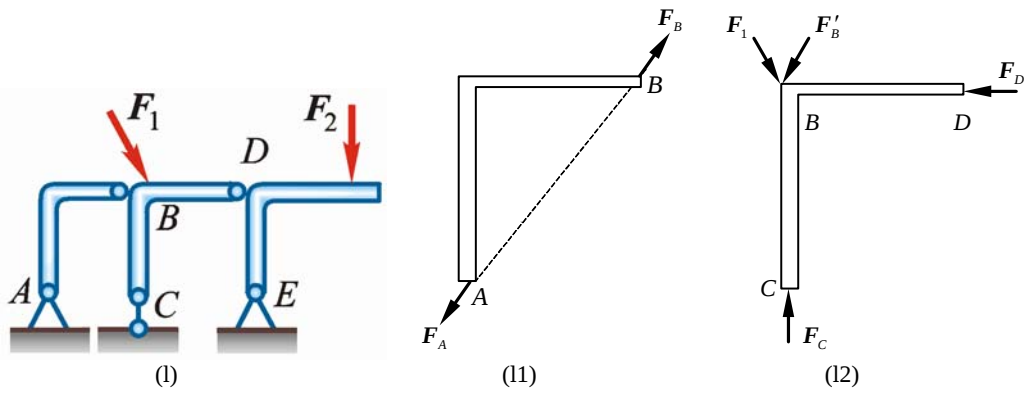
1-2 画出下列每个标注字符的物体的受力图。题图中未画重力的各物体的自重不计，所有接触处均为光滑接触。



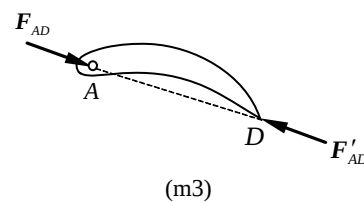
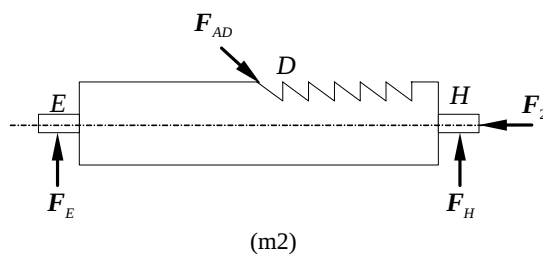
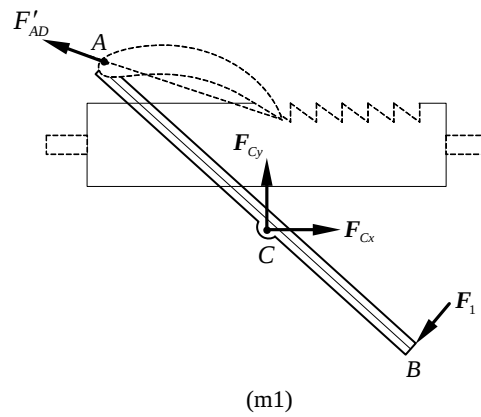
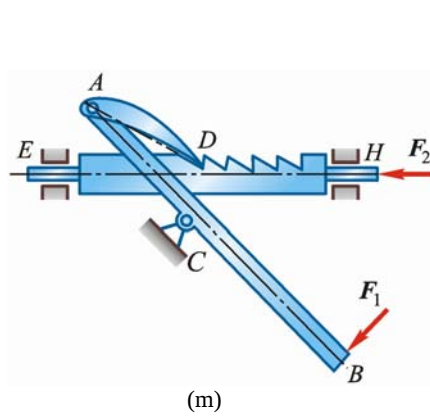
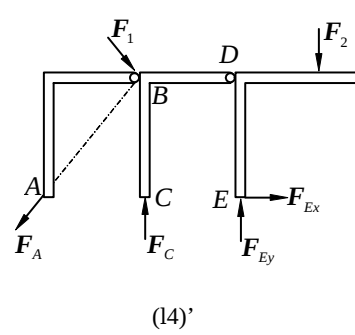
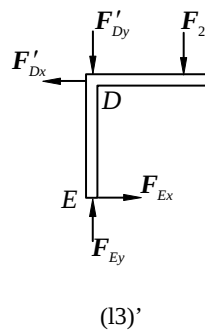
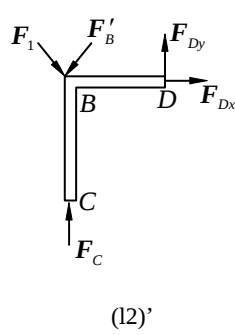








或



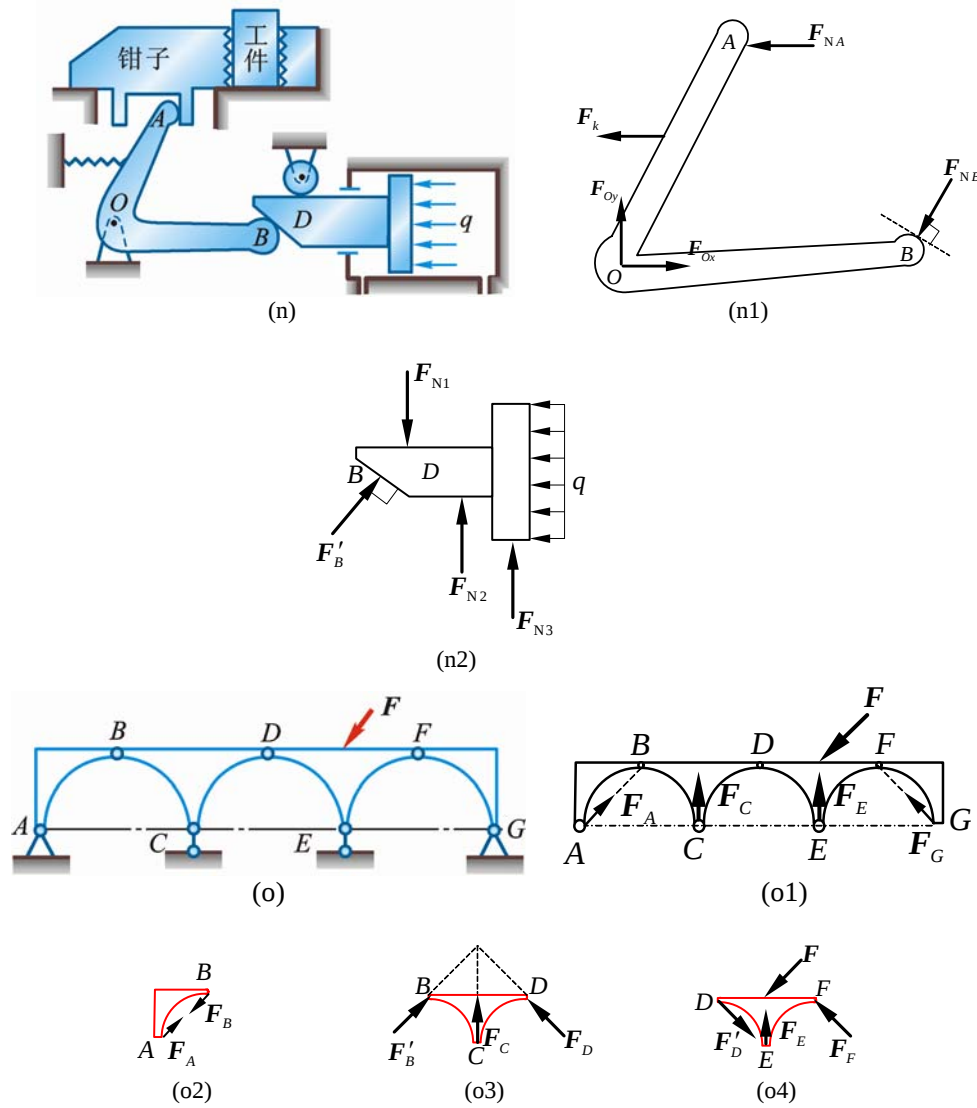


图 1-2

第2章 平面汇交力系与平面力偶系

2-1 铆接薄板在孔心 A 、 B 和 C 处受 3 个力作用，如图 2-1a 所示。 $F_1 = 100 \text{ N}$ ，沿铅直方向； $F_3 = 50 \text{ N}$ ，沿水平方向，并通过点 A ； $F_2 = 50 \text{ N}$ ，力的作用线也通过点 A ，尺寸如图。求此力系的合力。

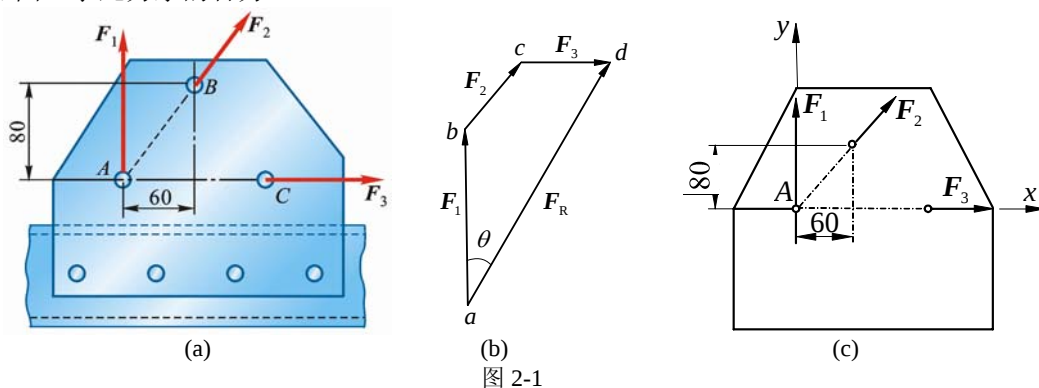


图 2-1

解 (1) 几何法

作力多边形 $abcd$ ，其封闭边 ad 即确定了合力 F_R 的大小和方向。由图 2-1b，得

$$\begin{aligned} F_R &= \sqrt{(F_1 + F_2 \times 4/5)^2 + (F_3 + F_2 \times 3/5)^2} \\ &= \sqrt{(100 \text{ N} + 50 \text{ N} \times 4/5)^2 + (50 \text{ N} + 50 \text{ N} \times 3/5)^2} = 161 \text{ N} \\ \angle(F_R, F_1) &= \arccos\left(\frac{F_1 + F_2 \times 4/5}{F_R}\right) \\ &= \arccos\left(\frac{100 \text{ N} + 50 \text{ N} \times 4/5}{161 \text{ N}}\right) = 29.74^\circ = 29^\circ 44' \end{aligned}$$

(2) 解析法 建立如图 2-1c 所示的直角坐标系 Axy 。

$$\sum F_x = F_1 + F_2 \times 3/5 = 50 \text{ N} + 50 \text{ N} \times 3/5 = 80 \text{ N}$$

$$\sum F_y = F_1 + F_2 \times 4/5 = 100 \text{ N} + 50 \text{ N} \times 4/5 = 140 \text{ N}$$

$$F_R = (80\mathbf{i} + 140\mathbf{j}) \text{ N}$$

$$F_R = \sqrt{(80 \text{ N})^2 + (140 \text{ N})^2} = 161 \text{ N}$$

2-2 如图 2-2a 所示，固定在墙壁上的圆环受 3 条绳索的拉力作用，力 F_1 沿水平方向，力 F_3 沿铅直方向，力 F_2 与水平线成 40° 角。3 个力的大小分别为 $F_1 = 2000 \text{ N}$ ， $F_2 = 2500 \text{ N}$ ， $F_3 = 1500 \text{ N}$ 。求 3 个力的合力。

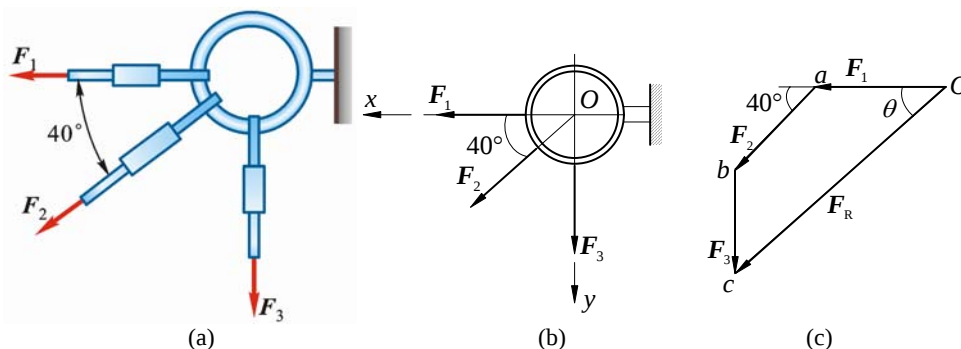


图 2-2

解 (1) 解析法

建立如图 2-2b 所示的直角坐标系 Oxy 。

$$\sum F_x = F_1 + F_2 \cos 40^\circ = 2000 \text{ N} + 2500 \text{ N} \cdot \cos 40^\circ = 3915 \text{ N}$$

$$\sum F_y = F_3 + F_2 \sin 40^\circ = 1500 \text{ N} + 2500 \text{ N} \cdot \sin 40^\circ = 3107 \text{ N}$$

$$F_R = \sqrt{(\sum F_x)^2 + (\sum F_y)^2} = \left(\sqrt{3915^2 + 3107^2} \right) \text{ N} = 4998 \text{ N}$$

$$\angle(F_R, F_x) = \arccos\left(\frac{\sum F_x}{F_R}\right) = \arccos\left(\frac{3915 \text{ N}}{4998 \text{ N}}\right) = 38^\circ 26'$$

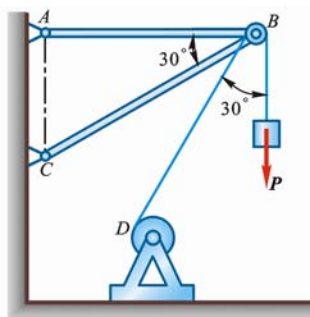
(2) 几何法

作力多边形 $Oabc$ ，封闭边 Oc 确定了合力 F_R 的大小和方向。根据图 2-2c，得

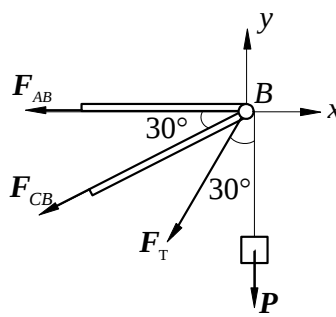
$$\begin{aligned} F_R &= \sqrt{(F_1 + F_2 \cos 40^\circ)^2 + (F_3 + F_2 \sin 40^\circ)^2} \\ &= \sqrt{(2000 + 2500 \cos 40^\circ)^2 + (1500 + 2500 \sin 40^\circ)^2} = 4998 \text{ N} \end{aligned}$$

$$\angle(F_R, F_1) = \arccos \frac{\sum F_x}{F_R} = \arccos \frac{3915 \text{ N}}{4998 \text{ N}} = 38^\circ 26'$$

2-3 物体重 $P=20 \text{ kN}$ ，用绳子挂在支架的滑轮 B 上，绳子的另一端接在绞车 D 上，如图 2-3a 所示。转动绞车，物体便能升起。设滑轮的大小、杆 AB 与 CB 自重及摩擦略去不计， A ， B ， C 三处均为铰链连接。当物体处于平衡状态时，求拉杆 AB 和支杆 CB 所受的力。



(a)



(b)

图 2-3

解 取支架、滑轮及重物为研究对象，坐标及受力如图 2-3b 所示。由平衡理论得

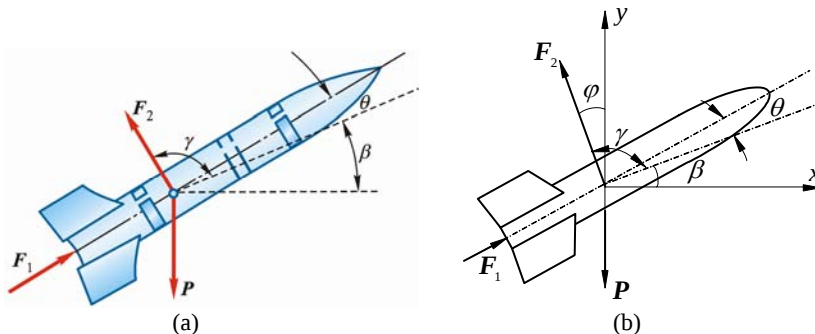
$$\sum F_x = 0, \quad -F_{AB} - F_{CB} \cos 30^\circ - F_T \sin 30^\circ = 0$$

$$\sum F_y = 0, \quad -F_{CB} \sin 30^\circ - F_T \cos 30^\circ - P = 0$$

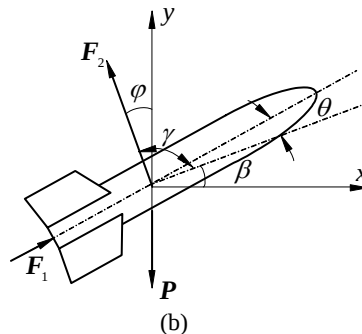
将 $F_T = P = 20 \text{ kN}$ 代入上述方程，得

$$F_{AB} = 54.6 \text{ kN} \text{ (拉)}, \quad F_{CB} = -74.6 \text{ kN} \text{ (压)}$$

2-4 火箭沿与水平面成 $\beta = 25^\circ$ 角的方向作匀速直线运动，如图 2-4a 所示。火箭的推力 $F_1 = 100 \text{ kN}$ ，与运动方向成 $\theta = 5^\circ$ 角。如火箭重 $P = 200 \text{ kN}$ ，求空气动力 F_2 和它与飞行方向的交角 γ 。



(a)



(b)

图 2-4

解 坐标及受力如图 2-4b 所示，由平衡理论得

$$\sum F_x = 0, \quad F_1 \cos(\theta + \beta) - F_2 \sin \varphi = 0 \quad (1)$$

$$F_2 \sin \varphi = F_1 \cos(\theta + \beta)$$

$$\sum F_y = 0, \quad F_1 \sin(\theta + \beta) - P + F_2 \cos \varphi = 0 \quad (2)$$

$$F_2 \cos \varphi = P - F_1 \sin(\theta + \beta)$$

式(1)除以式(2)，得

$$\tan \varphi = \frac{F_1 \cos(\theta + \beta)}{P - F_1 \sin(\theta + \beta)}$$

代入有关数据，解得

$$\varphi = 30^\circ$$

$$\gamma = 90^\circ + \varphi - \beta = 90^\circ + 30^\circ - 25^\circ = 95^\circ$$

将 φ 值等数据代入式(1)，得

$$F_2 = 173 \text{ kN}$$

2-5 如图 2-5a 所示，刚架的点 B 作用 1 水平力 F ，刚架重量不计。求支座 A，D 的约束力。

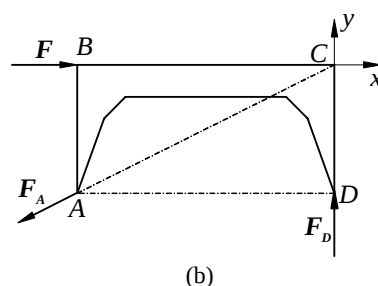
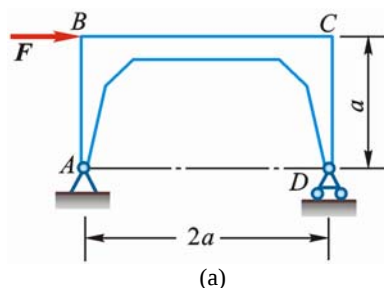


图 2-5

解 研究对象：刚架。由三力平衡汇交定理，支座 A 的约束力 F_A 必通过点 C，方向如图 2-5b 所示。取坐标系 Cxy，由平衡理论得

$$\sum F_x = 0, \quad F - F_A \times \frac{2}{\sqrt{5}} = 0 \quad (1)$$

$$\sum F_y = 0, \quad F_D - F_A \times \frac{1}{\sqrt{5}} = 0 \quad (2)$$

式(1)、(2)联立，解得

$$F_A = \frac{\sqrt{5}}{2} F = 1.12F, \quad F_D = 0.5F$$

2-6 如图 2-6a 所示，输电线 ACB 架在两线杆之间，形成 1 下垂曲线，下垂距离 $CD=f=1 \text{ m}$ ，两电线杆距离 $AB=40 \text{ m}$ 。电线 ACB 段重 $P=400 \text{ N}$ ，可近似认为沿 AB 连线均匀分布。求电线中点和两端的拉力。

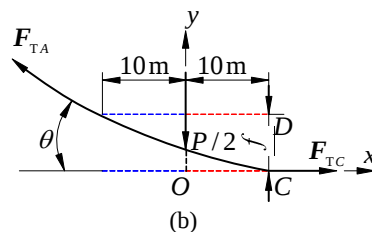
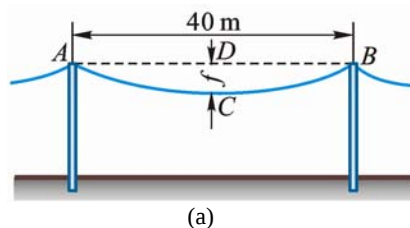


图 2-6

解 本题为悬索问题，这里采用近似解法，假定绳索荷重均匀分布。取 AC 段绳索为研究对象，坐标及受力如图 2-6b 所示。图中：

$$W_1 = \frac{P}{2} = 200 \text{ N}$$

由平衡理论得

$$\sum F_x = 0, \quad F_{TC} - F_{TA} \cos \theta = 0 \quad (1)$$

$$\sum F_y = 0, \quad F_{TA} \sin \theta - W_1 = 0 \quad (2)$$

式 (1)、(2) 联立，解得

$$F_{TA} = \frac{W_1}{\sin \theta} = \frac{200 \text{ N}}{\frac{1}{\sqrt{10^2 + 1^2}}} = 2010 \text{ N}$$

$$F_{TC} = F_{TA} \cos \theta = 2010 \text{ N} \times \frac{10}{\sqrt{10^2 + 1^2}} = 2000 \text{ N}$$

因对称

$$F_{TB} = F_{TA} = 2010 \text{ N}$$

2-7 如图 2-7a 所示液压夹紧机构中， D 为固定铰链， B, C, E 为活动铰链。已知力 F ，机构平衡时角度如图 2-7a，求此时工件 H 所受的压紧力。

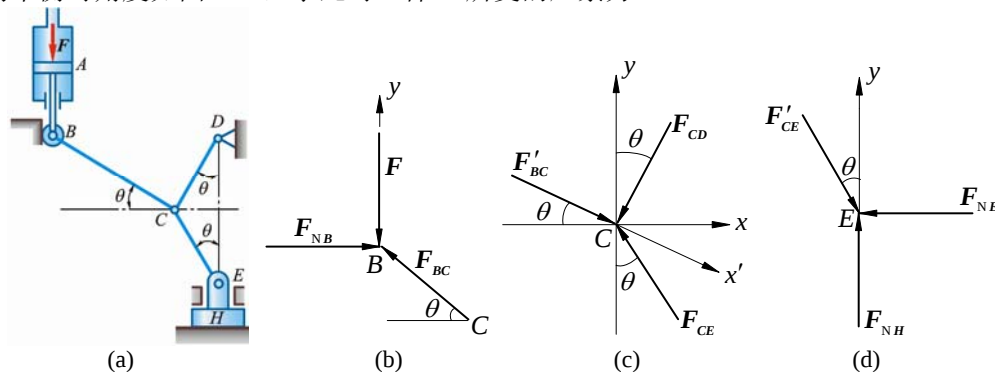


图 2-7

解 (1) 轮 B ，受力如图 2-7 b 所示。由平衡理论得

$$\sum F_y = 0, \quad F_{BC} = \frac{F}{\sin \theta} \quad (\text{压})$$

(2) 节点 C ，受力如图 2-7c 所示。由图 2-7c 知， $F'_{BC} \perp F_{CD}$ ，由平衡理论得

$$\sum F_x = 0, \quad F_{BC} - F_{CE} \cos(90^\circ - 2\theta) = 0, \quad F_{CE} = \frac{F_{BC}}{\sin 2\theta}$$

(3) 节点 E ，受力如图 2-7d 所示

$$\sum F_y = 0, \quad F_{NH} = F'_{CE} \cos \theta = \frac{F}{2 \sin^2 \theta}$$

即工件所受的压紧力

$$F_{NH} = \frac{F}{2 \sin^2 \theta}$$

2-8 图 2-8a 所示为 1 拨桩装置。在木桩的点 A 上系 1 绳，将绳的另一端固定在点 C ，在绳的点 B 系另 1 绳 BE ，将它的另一端固定在点 E 。然后在绳的点 D 用力向下拉，使绳的 BD 段水平， AB 段铅直， DE 段与水平线、 CB 段与铅直线间成等角 $\theta = 0.1 \text{ rad}$ (当 θ 很小时， $\tan \theta \approx \theta$)。如向下的拉力 $F = 800 \text{ N}$ ，求绳 AB 作用于桩上的拉力。

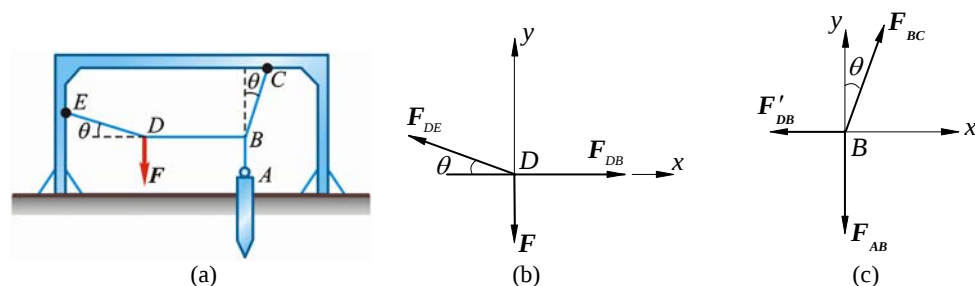


图 2-8

解 (1) 节点 D ，坐标及受力如图 2-8b，由平衡理论得

$$\sum F_x = 0, \quad F_{DB} - F_{DE} \cos \theta = 0$$

$$\sum F_y = 0, \quad F_{DE} \sin \theta - F = 0$$

解得

$$F_{DB} = F \cot \theta$$

讨论：也可以向垂直于 F_{DE} 方向投影，直接得

$$F_{DB} = F \cot \theta$$

(2) 节点 B ，坐标及受力如图 2-8c 所示。由平衡理论得

$$\sum F_x = 0, \quad F_{CB} \sin \theta - F_{DB'} = 0$$

$$\sum F_y = 0, \quad F_{CB} \sin \theta - F_{AB} = 0$$

解得

$$F_{AB} = F_{DB} \cot \theta = F \cot^2 \theta = \frac{F}{\theta^2} = \frac{800 \text{ N}}{0.1^2} = 80 \text{ kN}$$

2-9 铰链 4 杆机构 $CABD$ 的 CD 边固定，在铰链 A 、 B 处有力 F_1 、 F_2 作用，如图 2-9a 所示。该机构在图示位置平衡，不计杆自重。求力 F_1 与 F_2 的关系。

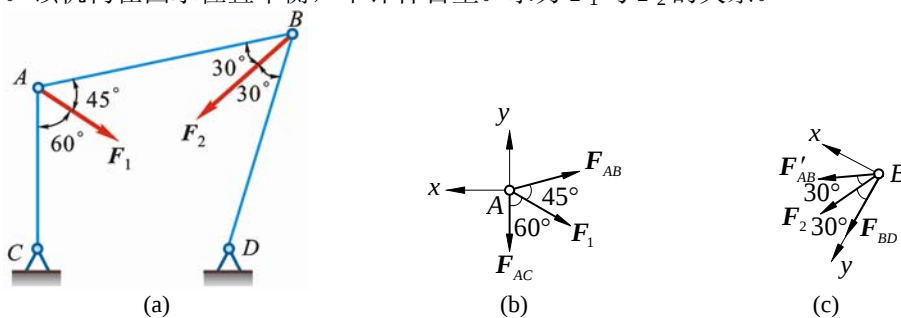


图 2-9

解 (1) 节点 A ，坐标及受力如图 2-9b 所示，由平衡理论得

$$\sum F_x = 0, \quad F_{AB} \cos 15^\circ + F_1 \cos 30^\circ = 0, \quad F_{AB} = -\frac{\sqrt{3}F_1}{2 \cos 15^\circ} \quad (\text{压})$$

(2) 节点 B ，坐标及受力如图 2-9c 所示，由平衡理论得

$$\sum F_x = 0, \quad -F_{AB} \cos 30^\circ - F_2 \cos 60^\circ = 0$$

$$F_2 = -\sqrt{3}F_{AB} = \frac{3F_1}{2 \cos 15^\circ} = 1.553F_1$$

即 $F_1 : F_2 = 0.644$

2-10 如图 2-10 所示，刚架上作用力 F 。试分别计算力 F 对点 A 和 B 的力矩。

解 $M_A(F) = -Fb \cos \theta$

$$\begin{aligned} M_B(F) &= -Fb \cos \theta + Fa \sin \theta \\ &= F(a \sin \theta - b \cos \theta) \end{aligned}$$

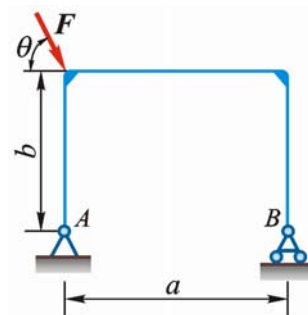


图 2-10

2-11 为了测定飞机螺旋桨所受的空气阻力偶，可将飞机水平放置，其 1 轮搁置在地秤上，如图 2-11a 所示。当螺旋桨未转动时，测得地秤所受的压力为 4.6 kN ，当螺旋桨转动时，测得地秤所受的压力为 6.4 kN 。已知两轮间距离 $l = 2.5 \text{ m}$ ，求螺旋桨所受的空气阻力偶的矩 M 。

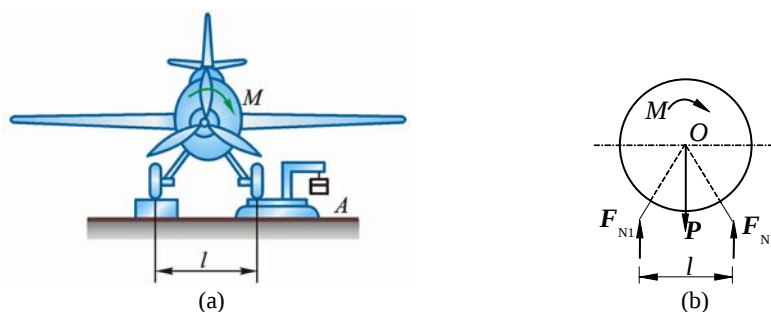


图 2-11

解 研究对象和受力如图 2-11b，约束力改变量构成 1 力偶，则

$$\sum M = 0, \quad -M + (6.4 \text{ kN} - 4.6 \text{ kN})l = 0, \quad M = 1.8 \text{ kN} \cdot l = 4.5 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

2-12 已知梁 AB 上作用 1 力偶，力偶矩为 M ，梁长为 l ，梁重不计。求在图 2-12a, 2-12b, 2-12c 三种情况下支座 A 和 B 的约束力。

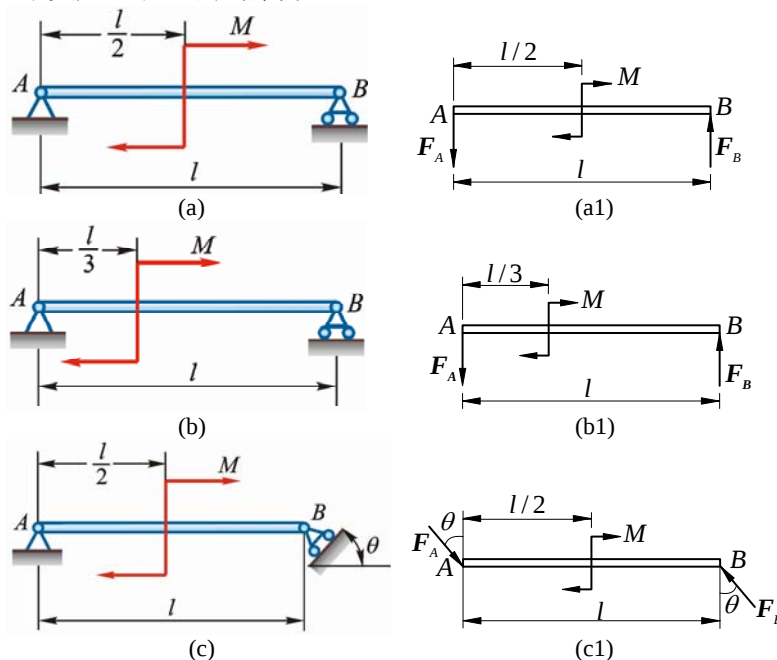


图 2-12

解 (a) 梁 AB ，受力如图 2-12a1 所示。 F_A, F_B 组成为力偶，故

$$F_A = F_B$$

$$\sum M_A = 0, \quad F_B l - M = 0, \quad F_B = \frac{M}{l}, \quad F_A = \frac{M}{l}$$

(b) 梁 AB ，受力如图 2-12b1 所示。

$$\sum M_A = 0, \quad F_B l - M = 0, \quad F_B = F_A = \frac{M}{l}$$

(c) 梁 AB ，受力如图 2-12c1 所示。

$$\sum M_A = 0, \quad F_B l \cos \theta - M = 0, \quad F_B = F_A = \frac{M}{l \cos \theta}$$

2-13 图 2-13a 所示结构中，各构件自重不计。在构件 AB 上作用 1 力偶矩为 M 的力偶，求支座 A 和 C 的约束力。

解 (1) BC 为二力杆： $F_C = -F_B$ (图 2-13c)

(2) 研究对象 AB ，受力如图 2-13b 所示， F_A, F_B 组成为力偶，则

$$\sum M = 0, \quad F_{NA} \times \sqrt{2} \times 2a - M = 0, \quad F_A = \frac{M}{2\sqrt{2}a} = \frac{\sqrt{2}M}{4a}$$

$$F_C = F_B = F_A = \frac{\sqrt{2}M}{4a}$$

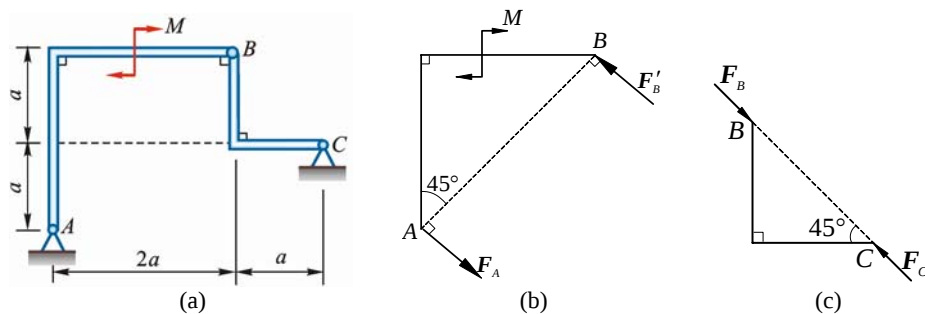


图 2-13

2-14 图 2-14a 中，两齿轮的半径分别是 r_1 , r_2 ，作用于轮 I 上的主动力偶的力偶矩为 M_1 ，齿轮的啮合角为 θ ，不计两齿轮的重量。求使两轮维持匀速转动时齿轮 II 的阻力偶之矩 M_2 及轴承 O_1 , O_2 的约束力的大小和方向。

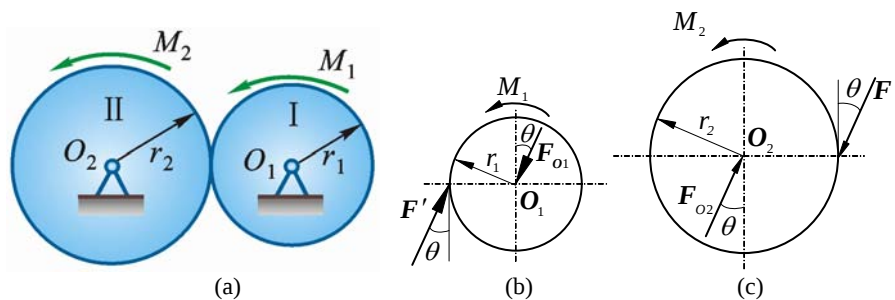


图 2-14

解 (1) 轮 O_1 ，受力如图 2-14b 所示

$$\sum M = 0, \quad M_1 - F_{O1}r_1 \cos \theta = 0, \quad F_{O1} = \frac{M_1}{r_1 \cos \theta} \quad (\text{方向如图})$$

(2) 轮 O_2 ，受力如图 2-14c 所示

$$\sum M = 0, \quad M_2 - F_{O2}r_2 \cos \theta = 0, \quad F_{O2} = \frac{M_2}{r_2 \cos \theta} \quad (\text{方向如图})$$

$$F_{O2} = F' = F = F_{O1}, \quad M_2 = \frac{r_2}{r_1} M$$

2-15 直角弯杆 ABCD 与直杆 DE 及 EC 铰接如图 2-15a，作用在杆 DE 上力偶的力偶矩 $M = 40 \text{ kN} \cdot \text{m}$ ，不计各杆件自重，不考虑摩擦，尺寸如图。求支座 A, B 处的约束力和杆 EC 受力。

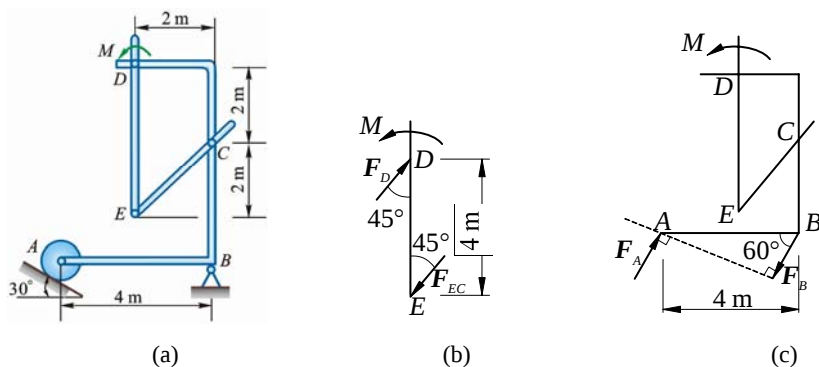


图 2-15

解 (1) EC 为二力杆，杆 DE 受力如图 2-15b 所示

$$\sum M = 0, \quad -F_{EC} \cdot 4 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + M = 0$$

$$F_{EC} = \frac{40}{2\sqrt{2}} = (10\sqrt{2}) \text{ kN} = 14.1 \text{ kN}$$

(2) 整体，受力图 c。为构成约束力偶与外力偶 M 平衡，有

$$F_A = F_B$$

$$\sum M = 0, \quad M - F_A \times 4 \cdot \cos 30^\circ = 0$$

$$F_A = \left(\frac{20}{\sqrt{3}} \right) \text{ kN} \approx 11.5 \text{ kN}, \quad F_B \approx 11.5 \text{ kN}$$

2-16 在图 2-16a 所示结构中，各构件的自重略去不计，在构件 BC 上作用 1 力偶矩为 M 的力偶，各尺寸如图。求支座 A 的约束力。

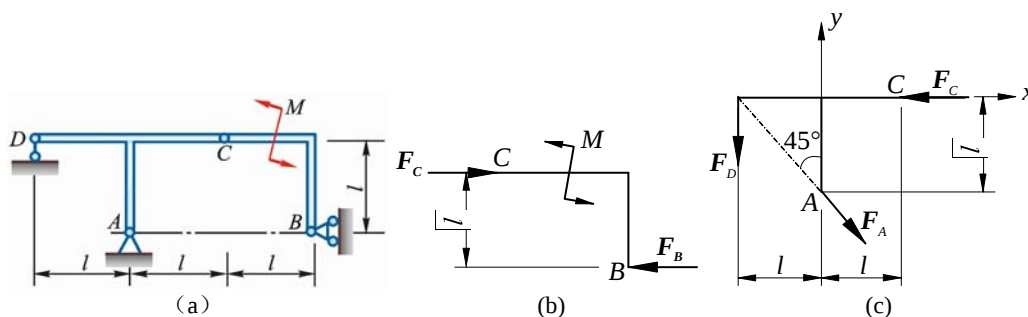


图 2-16

解 (1) 研究对象 BC ，受力如图 2-16b 所示，为构成约束力偶，有

$$F_B = F_C$$

$$\sum M = 0, \quad -F_B \cdot l + M = 0, \quad F_B = \frac{M}{l}$$

$$F_C = F_B = \frac{M}{l}$$

(2) 研究对象：ADC，受力如图 2-16c 所示

$$\sum F_x = 0, \quad -F'_C + F_A \cos 45^\circ = 0$$

$$F_A = \sqrt{2}F'_C = \frac{\sqrt{2}M}{l} \quad (\text{方向如图})$$

2-17 在图 2-17a 所示机构中，曲柄 OA 上作用 1 力偶，其力偶矩为 M ；另在滑块 D 上作用水平力 F 。机构尺寸如图，各杆重量不计。求当机构平衡时，力 F 与力偶矩 M 的关系。

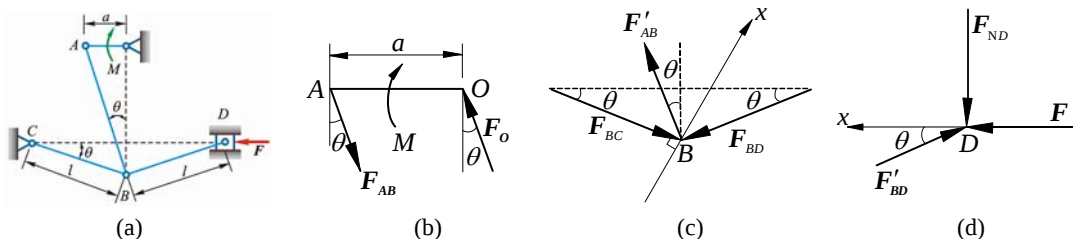


图 2-17

解 (1) 杆 AO ，受力如图 2-17b 所示

$$\sum M = 0, \quad F_{AB} \cos \theta \cdot a = M, \quad F_{AB} = \frac{M}{a \cos \theta} \quad (1)$$

(2) 节点 B ，受力如图 2-17c 所示

$$\sum F_x = 0, \quad F'_{AB} \cos 2\theta - F_{BD} \sin 2\theta = 0$$

式（1）代入上式，得

$$F_{BD} = \frac{F'_{AB} \cos 2\theta}{\sin 2\theta} = \frac{M \cos 2\theta}{a \cos \theta \sin 2\theta} \quad (2)$$

（3）滑块 D ，受力如图 2-17d 所示

$$\sum F_x = 0, \quad F - F_{BD} \cos \theta = 0$$

式（2）代入上式，得

$$F = \frac{M}{a} \cot 2\theta$$

第3章 平面任意力系

3-1 图 3-1a 中，已知 $F_1 = 150 \text{ N}$ ， $F_2 = 200 \text{ N}$ ， $F_3 = 300 \text{ N}$ ， $F = F' = 200 \text{ N}$ 。求力系向点 O 简化的结果；并求力系合力的大小及其与原点 O 的距离 d 。

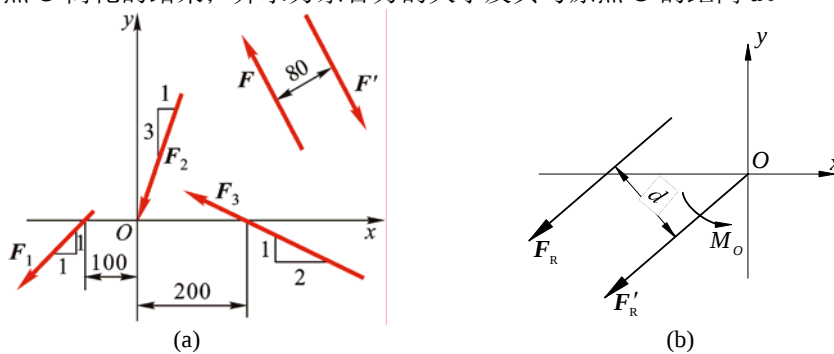


图 3-1

解 (1) 求合力 F_R 的大小

$$\begin{aligned}\sum F_x &= -F_1 \times \frac{1}{\sqrt{2}} - F_2 \times \frac{1}{\sqrt{10}} - F_3 \times \frac{2}{\sqrt{5}} \\ &= -150 \text{ N} \times \frac{1}{\sqrt{2}} - 200 \text{ N} \times \frac{1}{\sqrt{10}} - 300 \text{ N} \times \frac{2}{\sqrt{5}} = -437.62 \text{ N}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sum F_y &= -F_1 \times \frac{1}{\sqrt{2}} - F_2 \times \frac{3}{\sqrt{10}} - F_3 \times \frac{1}{\sqrt{5}} \\ &= -150 \text{ N} \times \frac{1}{\sqrt{2}} - 200 \text{ N} \times \frac{3}{\sqrt{10}} + 300 \text{ N} \times \frac{1}{\sqrt{5}} = -161.62 \text{ N}\end{aligned}$$

主矢 $F_R' = \sqrt{(\sum F_x)^2 + (\sum F_y)^2} = \left(\sqrt{(-437.62)^2 + (-161.62)^2} \right) \text{ N} = 466.5 \text{ N}$

主矩 $M_O = F_1 \times \frac{0.10}{\sqrt{2}} \text{ m} + F_3 \times \frac{0.20}{\sqrt{5}} \text{ m} - F \times 0.08 \text{ m}$

$$= 150 \text{ N} \times \frac{0.10}{\sqrt{2}} \text{ m} + 300 \text{ N} \times \frac{0.20}{\sqrt{5}} \text{ m} - 200 \text{ N} \times 0.08 \text{ m} = 21.44 \text{ N} \cdot \text{m} \quad (\text{逆})$$

合力 F_R 在原点 O 的左侧上方，如图 3-1b 所示，且 $F_R = F_R' = 466.5 \text{ N}$

(2) 求距离 d

$$d = \frac{|M_O|}{F_R'} = \frac{21.44 \text{ N} \cdot \text{m}}{466.5 \text{ N}} = 0.0459 \text{ m} = 4.59 \text{ cm} \quad (\text{图 3-1b})$$

3-2 图 3-2a 所示平面任意力系中 $F_1 = 40\sqrt{2} \text{ N}$ ， $F_2 = 80 \text{ N}$ ， $F_3 = 40 \text{ N}$ ， $F_4 = 110 \text{ N}$ ， $M = 2000 \text{ N} \cdot \text{mm}$ 。各力作用位置如图 3-2b 所示，图中尺寸的单位为 mm 。求：(1) 力系向点 O 简化的结果；(2) 力系的合力的大小、方向及合力作用线方程。

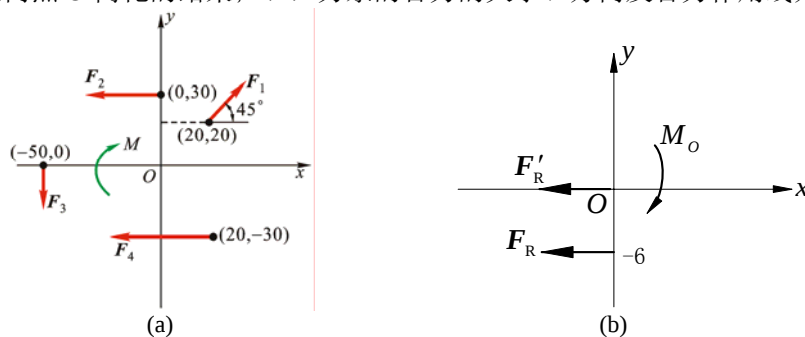


图 3-2

解 (1) 向点 O 简化

$$F'_{Rx} = F_1 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - F_2 - F_4 = -150 \text{ N}, \quad F'_{Ry} = F_1 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - F_3 = 0$$

$$F'_R = -150i \text{ N}$$

$$\begin{aligned} M_O &= F_2 \times 30 \text{ mm} + F_3 \times 50 \text{ mm} - F_4 \times 30 \text{ mm} - M \\ &= 80 \text{ N} \times 30 \text{ mm} + 40 \text{ N} \times 50 \text{ mm} - 110 \text{ N} \times 30 \text{ mm} - 2000 \text{ N} \cdot \text{mm} \quad (\text{顺}) \\ &= -900 \text{ N} \cdot \text{mm} \end{aligned}$$

(2) 合力

大小： $F_R = 150 \text{ N}$ ，方向水平向左。合力作用线方程：

$$|y| = \frac{|M_O|}{|F_R|} = \frac{900 \text{ N} \cdot \text{mm}}{150 \text{ N}} = 6 \text{ mm}$$

由 M_O 转向知合力作用线方程为

$$y = -6 \text{ mm}$$

3-3 如图 3-3 所示，当飞机作稳定航行时，所有作用在它上面的力必须相互平衡。已知飞机的重力 $P = 30 \text{ kN}$ ，螺旋桨的牵引力 $F = 4 \text{ kN}$ 。飞机的尺寸： $a = 0.2 \text{ m}$ ， $b = 0.1 \text{ m}$ ， $c = 0.05 \text{ m}$ ， $l = 5 \text{ m}$ 。求阻力 F_x ，机翼升力 F_{y1} 和尾部的升力 F_{y2} 。

解 选择坐标系如图。

$$\sum F_x = 0, \quad F_x - F = 0, \quad F_x = F = 4 \text{ kN}$$

$$\sum M_A = 0, \quad F_{y2}(a+l) - Pa - F(b+c) = 0$$

$$F_{y2} = \frac{Pa + F(b+c)}{a+l} = 1.27 \text{ kN}$$

$$\sum F_y = 0, \quad F_{y1} + F_{y2} - P = 0$$

$$F_{y1} = P - F_{y2} = 28.7 \text{ kN}$$

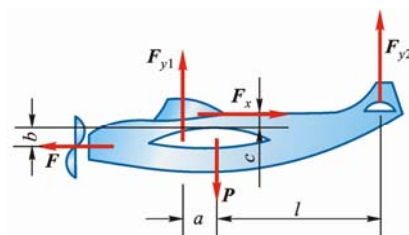
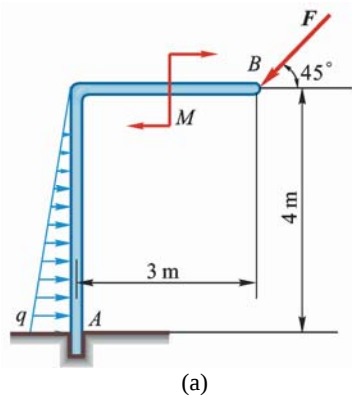
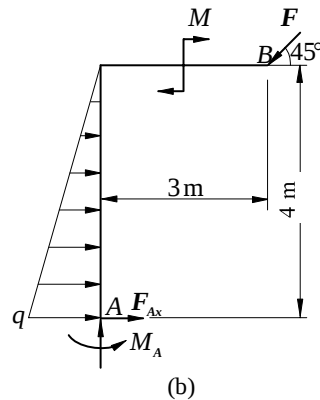


图 3-3

3-4 在图 3-4a 所示刚架中， $q = 3 \text{ kN/m}$ ， $F = 6\sqrt{2} \text{ kN}$ ， $M = 10 \text{ kN} \cdot \text{m}$ ，不计刚架的自重。求固定端 A 的约束力。



(a)



(b)

图 3-4

解 受力如图 3-4b 所示

$$\sum F_y = 0, \quad F_{Ay} = F \sin 45^\circ = 6 \text{ kN}$$

$$\sum F_x = 0, \quad F_{Ax} + \frac{1}{2}q \times 4 \text{ m} - F \cos 45^\circ = 0, \quad F_{Ax} = 0$$

$$\sum M_A = 0, \quad M_A - \frac{1}{2}q \times 4 \text{ m} \times \frac{4}{3} \text{ m} - M - F \sin 45^\circ \times 3 \text{ m} + F \cos 45^\circ \times 4 \text{ m} = 0$$

$$M_A = 12 \text{ kN} \cdot \text{m} \quad (\text{逆})$$

3-5 如图 3-5a 所示，飞机机翼上安装 1 台发动机，作用在机翼 OA 上的气动力按梯形分布： $q_1 = 60 \text{ kN/m}$, $q_2 = 40 \text{ kN/m}$ ，机翼重为 $P_1 = 45 \text{ kN}$ ，发动机重为 $P_2 = 20 \text{ kN}$ ，发动机螺旋桨的作用力偶矩 $M = 18 \text{ kN} \cdot \text{m}$ 。求机翼处于平衡状态时，机翼根部固定端 O 的受力。

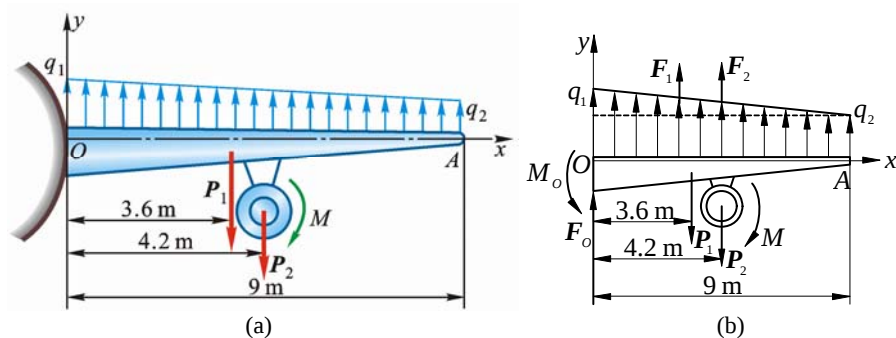


图 3-5

解 研究对象：机翼（含螺旋桨），受力如图 3-5b 所示。梯形分布载荷看作三角形分布载荷 $(q_1 - q_2)$ 和均布载荷 q_2 两部分合成。三角形分布载荷 $q_1 - q_2$ 的合力

$$F_1 = \frac{1}{2}(q_1 - q_2) \times 9 \text{ m} = 90\,000 \text{ N}$$

均布载荷 q_2 的合力

$$F_2 = q_2 \times 9 \text{ m} = 360\,000 \text{ N}$$

F_2 位于离 O 4.5m 处。

$$\sum F_y = 0, \quad F_O + F_1 + F_2 - P_1 - P_2 = 0$$

$$F_O = P_1 + P_2 + F_1 - F_2 = -385\,000 \text{ N} = -385 \text{ kN}$$

$$\sum M_O = 0, \quad M_O + F_1 \times 3 \text{ m} + F_2 \times 4.5 \text{ m} - P_1 \times 3.6 \text{ m} - P_2 \times 4.2 \text{ m} - M = 0$$

$$M_O = 1626 \text{ kN} \cdot \text{m} \quad (\text{逆})$$

3-6 无重水平梁的支承和载荷如图 3-6a、图 3-6b 所示。已知力 F ，力偶矩为 M 的力偶和强度为 q 的均匀载荷。求支座 A 和 B 处的约束力。

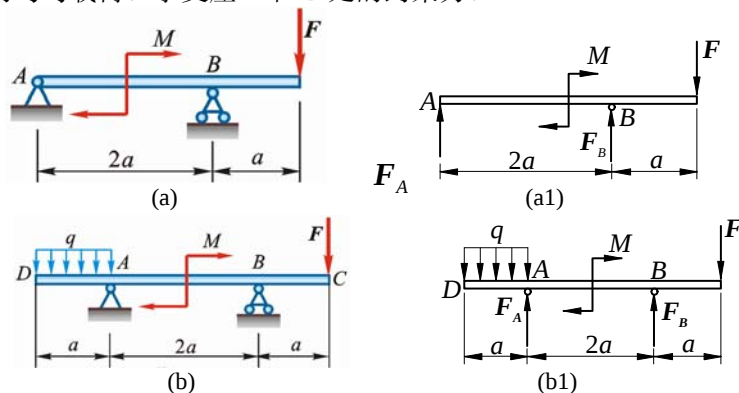


图 3-6

解 (1) 梁 AB ，坐标及受力如图 3-6a1 所示

$$\sum M_A = 0, \quad F_B \times 2a - M - F \times 3a = 0, \quad F_B = \frac{1}{2}\left(3F + \frac{M}{a}\right)$$

$$\sum F_y = 0, \quad F_A + F_B - F = 0, \quad F_A = F - F_B = -\frac{1}{2}\left(F + \frac{M}{a}\right)$$

(2) 梁 AB ，坐标及受力如图 3-6b1 所示

$$\sum M_A = 0, \quad \frac{1}{2}qa^2 + F_B \times 2a - F \times 3a - M = 0$$

$$F_B = \frac{1}{2}(3F + \frac{M}{a} - \frac{1}{2}qa)$$

$$\sum F_y = 0, F_A + F_B - F - qa = 0$$

$$F_A = -\frac{1}{2}(F + \frac{M}{a} - \frac{5}{2}qa)$$

3-7 如图 3-7a 所示，液压式汽车起重机全部固定部分（包括汽车自重）总重为 $P_1 = 60 \text{ kN}$ ，旋转部分总重为 $P_2 = 20 \text{ kN}$ ， $a = 1.4 \text{ m}$ ， $b = 0.4 \text{ m}$ ， $l_1 = 1.85 \text{ m}$ ， $l_2 = 1.4 \text{ m}$ 。求：（1）当 $l = 3 \text{ m}$ ，起吊重为 $P = 50 \text{ kN}$ 时，支撑腿 A、B 所受地面的约束力；（2）当 $l = 5 \text{ m}$ 时，为了保证起重机不致翻倒，问最大起重为多大？

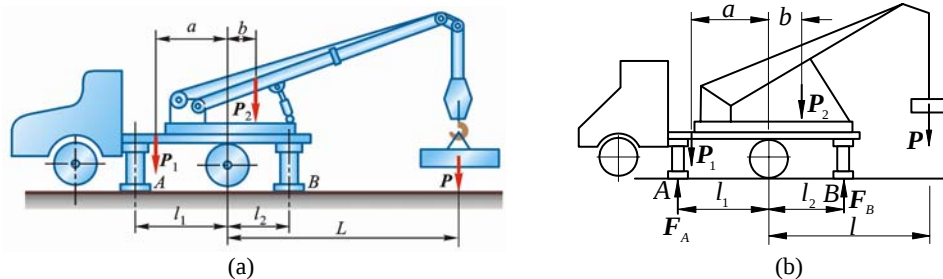


图 3-7

解 整体，坐标及受力如图 3-7b 所示。

(1) 求当 $l = 3 \text{ m}$ ， $P = 50 \text{ kN}$ 时的 F_A ， F_B

$$\sum M_A = 0, -P_1(l_1 - a) - P_2(l_1 + b) - P(l + l_1) - F_B(l_1 + l_2) = 0$$

$$F_B = \frac{1}{l_1 + l_2}[P_1(l_1 - a) + P_2(l_1 + b) + P(l + l_1)] = 96.8 \text{ kN}$$

$$\sum F_y = 0, F_A + F_B - P_1 - P_2 - P = 0$$

$$F_A = P_1 + P_2 + P - F_B = 33.2 \text{ kN}$$

(2) 求当 $l = 5 \text{ m}$ 时，保证起重机不翻倒的 P 。

起重机不翻倒的临界状态时， $F_A = 0$ 。

$$\sum M_B = 0, P_1(a + l_2) + P_2(l_2 - b) - P(l - l_2) = 0$$

$$P = \frac{1}{l - l_2}[P_1(a + l_2) + P_2(l_2 - b)] = 52.2 \text{ kN}$$

即

$$P_{\max} = 52.2 \text{ kN}$$

3-8 如图 3-8a 所示，行动式起重机不计平衡锤的重为 $P = 500 \text{ kN}$ ，其重心在离右轨 1.5 m 处。起重机的起重力为 $P_1 = 250 \text{ kN}$ ，突臂伸出离右轨 10 m 。跑车本身重力略去不计，欲使跑车满载时起重机均不致翻倒，求平衡锤的最小重力 P_2 以及平衡锤到左轨的最大距离 x 。

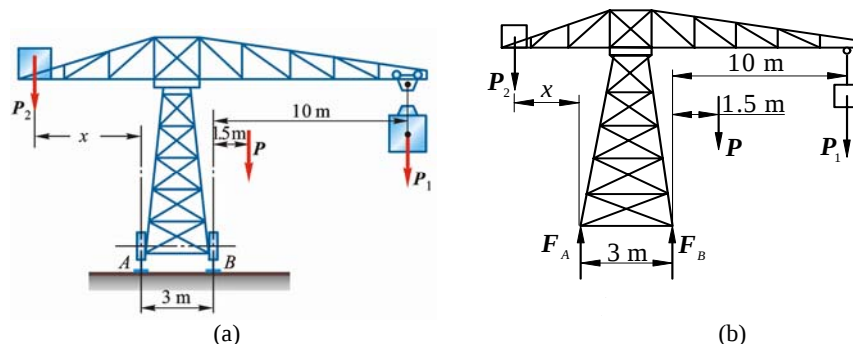


图 3-8

解 起重机，受力如图 3-8b 所示。

(1) 起重机满载时不向右倾倒临界状态下， $F_A = 0$ 。

$$\sum M_B = 0, \quad P_2(x + 3 \text{ m}) - P \times 1.5 \text{ m} - P_1 \times 10 \text{ m} = 0 \quad (1)$$

(2) 起重机空载时向左不倾斜临界状态下， $F_B = 0$

$$\sum M_A = 0, \quad P_2 x - P(3 \text{ m} + 1.5 \text{ m}) = 0 \quad (2)$$

式 (1)、(2) 联立，解得

$$P_2 = P_{2\min} = 333 \text{ kN}$$

$$x = x_{\max} = 4.5 \frac{P}{P_2} = 6.75 \text{ m}$$

3-9 飞机起落架，尺寸如图 3-9a 所示，A、B、C 均为铰链，杆 OA 垂直于 AB 连线。当飞机等速直线滑行时，地面作用于轮上的铅直正压力 $F_N = 30 \text{ kN}$ ，水平摩擦力和各杆自重都比较小，可略去不计。求 A、B 两处的约束力。

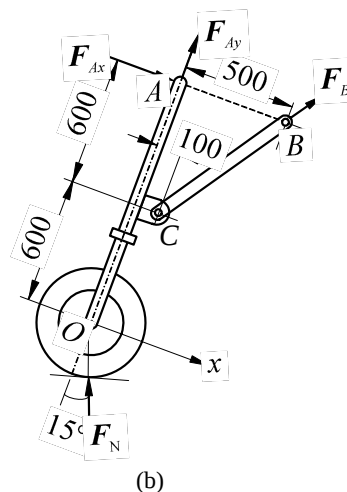
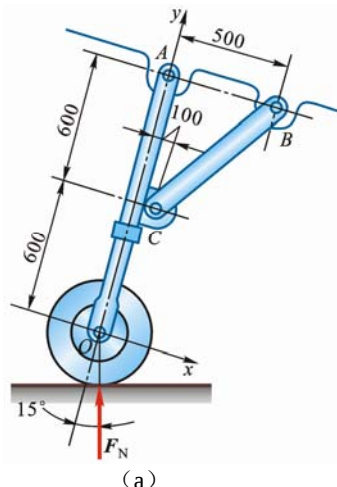


图 3-9

解 如图 3-9b，杆 BC 为二力杆， F_B 沿 BC。

$$\sum M_A = 0, \quad -F_N \sin 15^\circ \times 1.2 \text{ m} + F_B \times \frac{0.6}{\sqrt{0.4^2 + 0.6^2}} \times 0.5 \text{ m} = 0$$

$$F_B = 22.4 \text{ kN} \quad (\text{拉})$$

$$\sum F_x = 0, \quad F_{Ax} - F_N \sin 15^\circ + F_B \times \frac{0.6}{\sqrt{0.4^2 + 0.6^2}} = 0$$

$$F_{Ax} = -4.67 \text{ kN}$$

$$\sum F_y = 0, \quad F_{Ay} + F_N \cos 15^\circ + F_B \times \frac{0.6}{\sqrt{0.4^2 + 0.6^2}} = 0$$

$$F_{Ay} = -47.7 \text{ kN}$$

3-10 水平梁 AB 由铰链 A 和 BC 所支持，如图 3-10a 所示。在梁上 D 处用销子安装半径为 $r = 0.1 \text{ m}$ 的滑轮。有 1 跨过滑轮的绳子，其 1 端水平系于墙上，另 1 端悬挂有重为 $P = 1800 \text{ N}$ 的重物。如 $AD = 0.2 \text{ m}$ ， $BD = 0.4 \text{ m}$ ， $\varphi = 45^\circ$ ，且不计梁、杆、滑轮和绳的重力。求铰链 A 和杆 BC 对梁的约束力。

解 整体，坐标及受力如图 3-10b 所示：

$$F_T = P = 1800 \text{ N}$$

$$\sum M_A = 0, \quad F_T r - P(AD + r) + F_{BC} \sin \varphi \cdot (AD + DB) = 0$$

$$F_{BC} = \frac{P \cdot AD}{(AD + BD) \sin \varphi} = 600\sqrt{2} \text{ N} = 848.5 \text{ N} \quad (\text{拉})$$

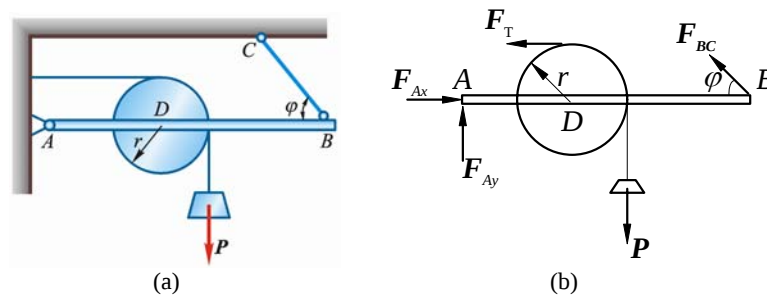


图 3-10

$$\begin{aligned}\sum F_x = 0, F_{Ax} - F_T - F_{BC} \cos \varphi &= 0 \\ F_{Ax} &= F_T + F_{BC} \cos \varphi = 2400 \text{ N} \\ \sum F_y = 0, F_{Ay} + F_{BC} \sin \alpha - P &= 0 \\ F_{Ay} &= P - F_{BC} \sin \varphi = 1200 \text{ N}\end{aligned}$$

3-11 如图 3-11a 所示，组合梁由 AC 和 CD 两段铰接构成，起重机放在梁上。已知起重机的重为 $P_1 = 50 \text{ kN}$ ，重心在铅直线 EC 上，起重载荷为 $P_2 = 10 \text{ kN}$ 。如不计梁重，求支座 A、B、D 三处的约束力。

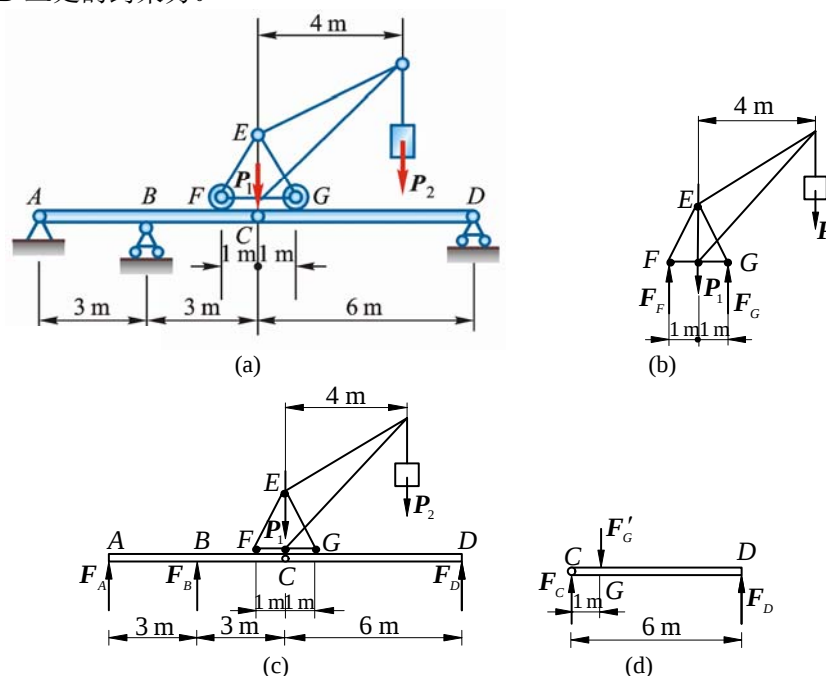


图 3-11

解 (1) 起重机，受力如图 3-11b 所示

$$\begin{aligned}\sum M_F = 0, F_G \times 2 \text{ m} - P_1 \times 1 \text{ m} - P_2 \times 5 \text{ m} &= 0 \\ F_G &= (P_1 + 5P_2) / 2 = 50 \text{ kN}\end{aligned}$$

(2) 梁 CD，受力如图 3-11d 所示

$$\begin{aligned}\sum M_C = 0, -F'_G \times 1 \text{ m} + F_D \times 6 \text{ m} &= 0 \\ F_D &= F'_G / 6 = 8.33 \text{ kN}\end{aligned}$$

(3) 整体，受力如图 3-11c 所示

$$\begin{aligned}\sum M_A = 0, F_B \times 3 \text{ m} + F_D \times 12 \text{ m} - P_1 \times 6 \text{ m} - P_2 \times 10 \text{ m} &= 0 \\ F_B &= (6P_1 + 10P_2 - 12F_D) / 3 = 100 \text{ kN} \\ \sum F_y = 0, F_A + F_B - F_D - P_2 - P_1 &= 0 \\ F_A &= P_2 + P_1 - F_B - F_D = -48.3 \text{ kN}\end{aligned}$$

3-12 在图 3-12a, 图 3-12b 各连续梁中, 已知 q , M , a 及 θ , 不计梁的自重, 求各连续梁在 A , B , C 三处的约束力。

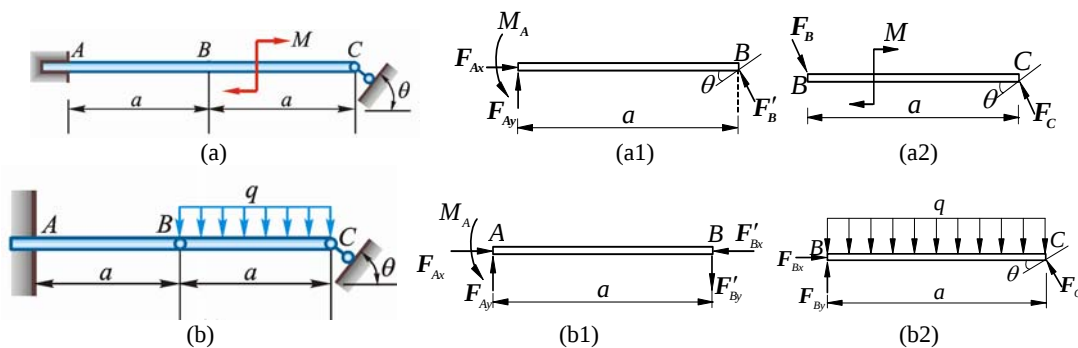


图 3-12

解 (a) (1) 梁 BC , 受力如图 3-12a2 所示。该力系为一力偶系, 则: $F_B = F_C$

$$\sum M = 0, F_C a \cos \theta = M, F_C = F_B = \frac{M}{a \cos \theta}$$

(2) 梁 AB , 受力如图 3-12a1 所示

$$\sum F_x = 0, F_{Ax} = F'_B \sin \theta = \frac{M}{a} \tan \theta$$

$$\sum F_y = 0, F_{Ay} = -F'_B \cos \theta = \frac{-M}{a}$$

$$\sum M_B = 0, M_A - F_{Ay} a = 0, M_A = -M (\text{顺})$$

解 (b) (1) 梁 BC , 受力如图 3-12b2 所示

$$\sum M_B = 0, -qa^2/2 + F_C \cos \theta \cdot a = 0, F_C = \frac{qa}{2 \cos \theta}$$

$$\sum F_x = 0, F_{Bx} = F_C \sin \theta = \frac{qa}{2} \tan \theta$$

$$\sum F_y = 0, F_{By} = qa/2$$

(2) 梁 AB , 受力如图 3-12b1 所示

$$\sum F_x = 0, F_{Ax} = F'_{Bx} = \frac{qa}{2} \tan \theta$$

$$\sum F_y = 0, F_{Ay} = F'_{By} = qa/2$$

$$\sum M_A = 0, M_A = qa^2/2$$

3-13 由 AC 和 CD 构成的组合梁通过铰链 C 连接。它的支承和受力如图 3-13a 所示。已知 $q = 10 \text{ kN/m}$, $M = 40 \text{ kN} \cdot \text{m}$, 不计梁的自重。求支座 A , B , D 的约束力和铰链 C 受力。

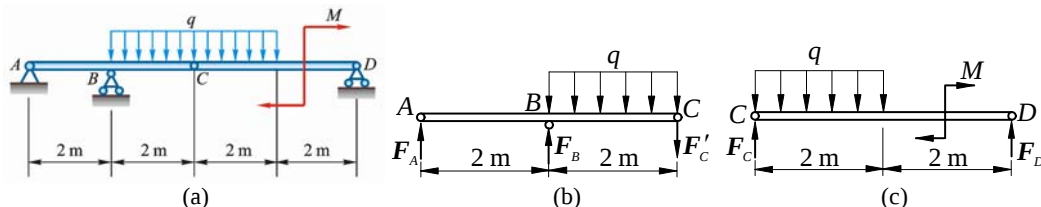


图 3-13

解 (1) 梁 CD , 受力如图 3-13c 所示

$$\sum M_C = 0, -\frac{1}{2} q \times (2 \text{ m})^2 - M + F_D \times 4 \text{ m} = 0$$

$$F_D = (M + 2q) / 4 = 15 \text{ kN}$$

两边对时间 t 求导，消去 $\dot{\phi} = \omega_1$ ，得

$$\alpha_1 = \dot{\omega}_1 = \frac{6M}{(R+r)^2(9m_1+2m_2)} \quad (\text{与 } \omega_1 \text{ 同向})$$

13-14 如图 13-14a、13-14b 所示 2 种支持情况的均质正方形板，边长均为 a ，质量均为 m ，初始时均处于静止状态。受某干扰后均沿顺时针方向倒下，不计摩擦，求当 OA 边处于水平位置时，2 方板的角速度。

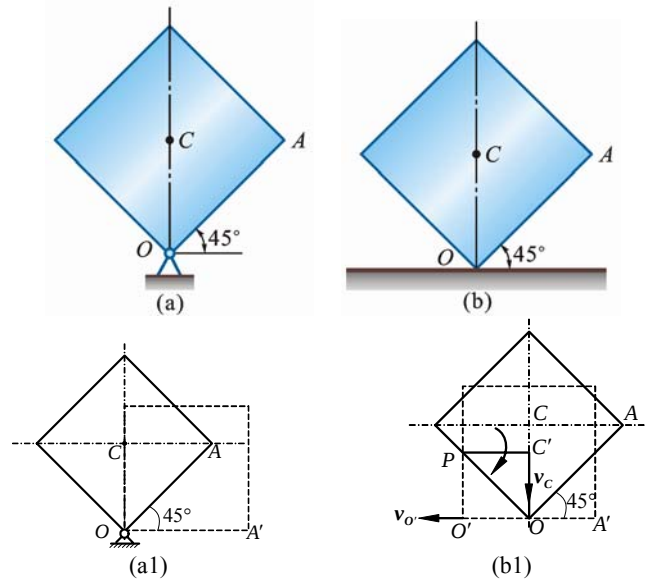


图 13-14

解 (1) 定轴转动倒下，如图 13-14a1 所示，重力做功

$$W = mg \left(\frac{\sqrt{2}}{2}a - \frac{1}{2}a \right) = \frac{1}{2}mga(\sqrt{2}-1)$$

动能

$$T = \frac{1}{2}J_O\omega_a^2 = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{6}ma^2 + m \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2}a \right)^2 \right] \omega_a^2 = \frac{m}{3}a^2\omega_a^2$$

动能定理

$$T = W$$

$$\frac{m}{3}a^2\omega_a^2 = \frac{\sqrt{2}-1}{2}mga$$

$$\omega_a = \frac{2.468}{\sqrt{a}} \text{ rad/s} \quad (a \text{ 以 m 计})$$

(2) 板作平面运动，因水平方向合外力为 0，且初始静止，故水平质心守恒，如图 13-14b1 所示， OA 至水平位置时，瞬心在点 P

$$W = \frac{1}{2}(\sqrt{2}-1)mga$$

$$v_C = \frac{a}{2}\omega_b$$

$$T = \frac{1}{2}J_P\omega_b^2 = \frac{1}{2} \left(J_C + m \left(\frac{a}{2} \right)^2 \right) \omega_b^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{6}ma^2 + \frac{1}{4}ma^2 \right) \omega_b^2$$

$$T = W$$

$$\frac{5}{24}ma^2\omega_b^2 = \frac{\sqrt{2}-1}{2}mga$$

$$\omega_b = \frac{3.121}{\sqrt{a}} \text{ rad/s}$$

13-15 水平均质细杆质量为 m ，长为 l ， C 为杆的质心。杆 A 处为光滑铰支座， B 端为 1 挂钩，如图 13-15a 所示。如 B 端突然脱落，杆转到铅垂位置时。问 b 值多大能使杆有最大角速度？

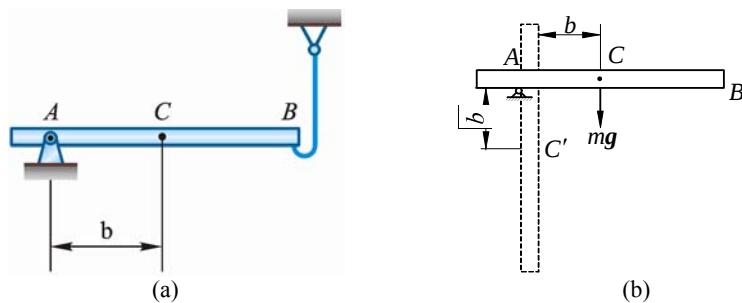


图 13-15

解 由图 13-15b 可得

$$\begin{aligned} mgb &= \frac{1}{2} J_A \omega^2 \\ mgb &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{12} ml^2 + mb^2 \right) \omega^2 \\ 2gb &= \left(\frac{l^2}{12} + b^2 \right) \omega^2 \end{aligned} \quad (1)$$

上式两边对 b 求导，得

$$2g = 2\omega^2 b$$

$$\omega^2 = \frac{g}{b}$$

代入式 (1)，得

$$\begin{aligned} mgb &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{12} ml^2 + mb^2 \right) \frac{g}{b} \\ b^2 &= \frac{l^2}{12} \\ b &= \frac{\sqrt{3}}{6} l \end{aligned}$$

13-16 均质细杆长 l ，质量为 m_1 ，上端 B 靠在光滑的墙上，下端 A 以铰链与均质圆柱的中心相连。圆柱质量为 m_2 ，半径为 R ，放在粗糙的地面上，自图 13-16a 所示位置由静止开始滚动而不滑动，初始杆与水平线的交角 $\theta = 45^\circ$ 。求点 A 在初瞬时的加速度。

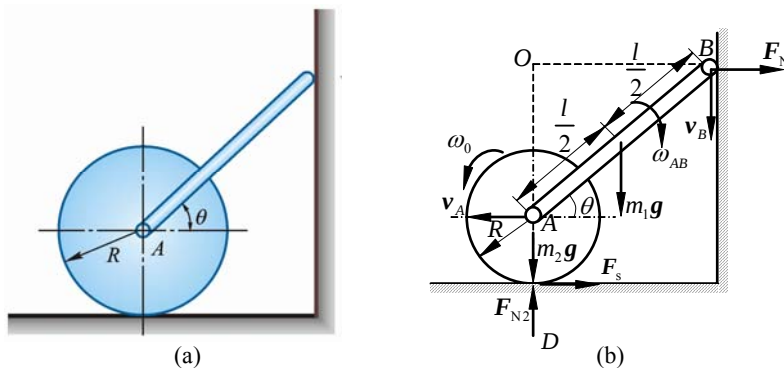


图 13-16

解 系统由静止开始运动至图 13-16b 所示位置时，杆 AB 的速度瞬心为点 O ，其角速度 ω_{AB} 顺时针转向。圆柱的速度瞬心为点 D ，其角速度 ω_D 逆时针转向。

$$v_A = l\omega_{AB} \sin \theta = R\omega_D$$

根据动能定理得

$$m_1 g \frac{l}{2} (\sin 45^\circ - \sin \theta) = \frac{1}{2} J_0 \omega_{AB}^2 + \frac{1}{2} J_D \omega_D^2$$

即
$$m_1 g \frac{l}{2} (\sin 45^\circ - \sin \theta) = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{12} m_1 l^2 + m_1 \left(\frac{l}{2} \right)^2 \right] \left(\frac{v_A}{l \sin \theta} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{3}{2} m_2 R^2 \right) \left(\frac{v_A}{R} \right)^2$$

整理得

$$v_A^2 = \frac{6m_1 l g (\sin 45^\circ - \sin \theta) \sin^2 \theta}{2m_1 + 9m_2 \sin^2 \theta}$$

两边对时间 t 求导，注意到

$$\dot{\theta} = -\omega_{AB} = -v_A / (l \sin \theta)$$

得

$$\begin{aligned} 2v_A a_A &= \frac{6m_1 l}{(2m_1 + 9m_2 \sin^2 \theta)^2} \left\{ (2m_1 g + 9m_2 g \sin^2 \theta) \cdot [2 \sin \theta \cos \theta \dot{\theta} \sin 45^\circ - 3 \sin^2 \theta \cos \theta \ddot{\theta}] - (\sin 45^\circ - \sin \theta) \sin^2 \theta \cdot 18m_2 g \sin \theta \cos \theta \ddot{\theta} \right\} \\ &= \frac{6m_1 l \dot{\theta} \sin \theta \cos \theta}{(2m_1 + 9m_2 \sin^2 \theta)^2} \left\{ 2m_1 g (2 \sin 45^\circ - 3 \sin \theta) + 9m_2 g \sin^2 \theta \cdot [(2 \sin 45^\circ - 3 \sin \theta) - 2(\sin 45^\circ - \sin \theta)] \right\} \\ 2v_A a_A &= \frac{6m_1 l \sin \theta \cos \theta (-\frac{v_A}{l \sin \theta})}{(2m_1 + 9m_2 \sin^2 \theta)^2} \cdot \{ 2m_1 g \cdot (2 \sin 45^\circ - 3 \sin \theta) - 9m_2 g \sin^3 \theta \} \\ a_A &= -\frac{3m_1 g \cos \theta}{(2m_1 + 9m_2 \sin^2 \theta)^2} \cdot \{ 2m_1 \cdot (2 \sin 45^\circ - 3 \sin \theta) - 9m_2 \sin^3 \theta \} \end{aligned}$$

以 $\theta = 45^\circ$ 代入，解得

$$a_A = \frac{3m_1 g}{4m_1 + 9m_2} \quad (\leftarrow)$$

13-17 在图 13-17 所示车床上车削直径 $D = 48 \text{ mm}$ 的工件，主切削力 $F = 7.84 \text{ kN}$ 。若主轴转速 $n = 240 \text{ r/min}$ ，电动机转速为 1420 r/min 。主传动系统的总效率 $\eta = 0.75$ ，求机床主轴、电动机主轴分别受的力矩和电动机的功率。

解 依题意机床主轴所受力矩

$$\begin{aligned} M_{\text{主}} &= F \cdot \frac{D}{2} = \left(7.84 \times 10^3 \times \frac{48 \times 10^{-3}}{2} \right) \text{ N} \cdot \text{m} \\ &= 188 \text{ N} \cdot \text{m} \end{aligned}$$

机床切削功率

$$\begin{aligned} P_{\text{切}} &= M_{\text{主}} \cdot \omega = \left(188 \times \frac{240 \times 2\pi}{60} \right) \text{ W} = 4725 \text{ W} \\ &= 4.725 \text{ kW} \end{aligned}$$

电动机功率

$$P_{\text{电}} = \frac{P_{\text{切}}}{\eta} = 6.30 \text{ kW}$$

电动机主轴所受力矩

$$M_{\text{电}} = \frac{P_{\text{电}}}{\omega_{\text{电}}} = \left(6.3 \times 10^3 \times \frac{60}{1420 \times 2\pi} \right) \text{ N} \cdot \text{m} = 42.4 \text{ N} \cdot \text{m}$$

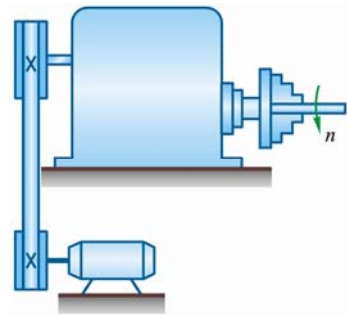


图 13-17

13-18 如图 13-18a 所示，测量机器功率的动力计，由胶带 $ACDB$ 和杠杆 BF 组成。胶带具有铅直的两段 AC 和 BD ，并套住机器的滑轮 E 的下半部，杠杆支点为 O 。借升高或降低支点 O ，可以变更胶带的张力，同时变更轮与胶带间的摩擦力。杠杆上挂 1 质量为 3 kg 的重锤，使杠杆 BF 处于水平的平衡位置。如力臂 $l = 500\text{ mm}$ ，发动机转数 $n = 240\text{ r/min}$ ，求发动机的功率。

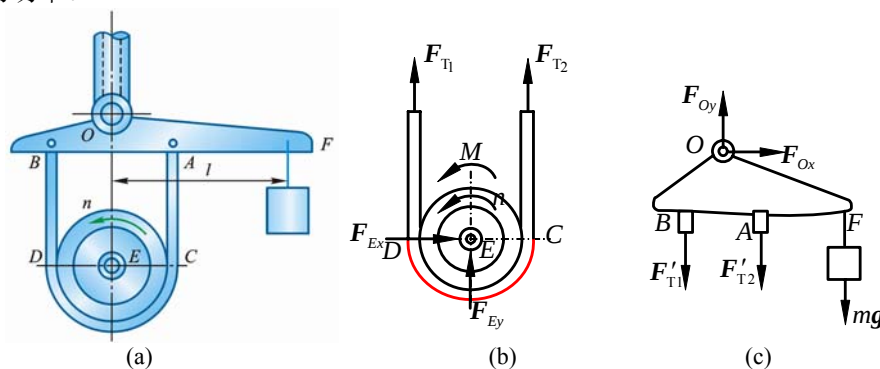


图 13-18

解 设发动机的角速度为 ω ，则

$$\omega = \frac{2\pi n}{60} = \left(\frac{2\pi \times 240}{60} \right) \text{ rad/s} = 8\pi \text{ rad/s}$$

$$\omega = \text{常数}$$

发动机作等速转动，故滑轮 E 的角加速度

$$\alpha = 0$$

滑轮 E 受力分析如图 13-18b 所示，由

$$\sum M_E = 0$$

得

$$M - (F_{T1} - F_{T2})R = 0$$

$$M = (F_{T1} - F_{T2})R$$

(1)

取杠杆为研究对象，受力如图 13-18c 所示，由

$$\sum M_O = 0$$

得

$$mgl - (F'_{T1} - F'_{T2})R = 0$$

$$mgl = (F'_{T1} - F'_{T2})R$$

(2)

由式 (1)、式 (2) 得

$$M = mgl$$

发动机的功率

$$P = M\omega = mgl\omega = 3\text{ kg} \times 9.8\text{ m/s}^2 \times 0.50\text{ m} \times 8\pi\text{ rad/s} = 369\text{ W}$$

第 14 章 达朗贝尔原理（动静法）

14-1 如图 14-1a 所示由相互铰接的水平臂连成的传送带，将圆柱形零件从 1 高度传送到另 1 个高度。设零件与臂之间的摩擦因数 $f_s = 0.2$ 。求：（1）降落加速度 a 为多大时，零件不致在水平臂上滑动；（2）比值 h/d 等于多少时，零件在滑动之前先倾倒。

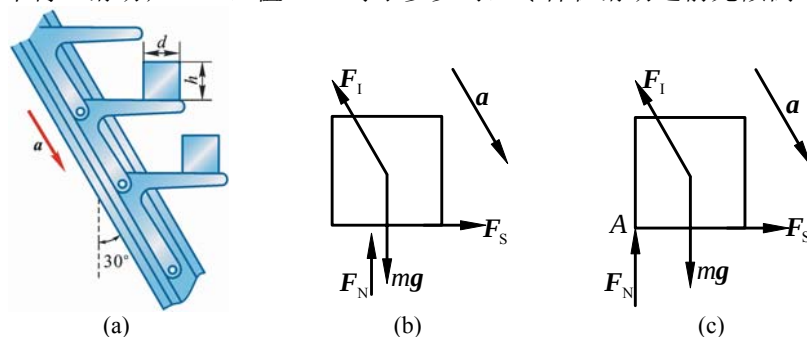


图 14-1

解 取圆柱形零件为研究对象，作受力分析，并虚加上零件的惯性力 F_1 。

（1）零件不滑动时，受力如图 14-1b 所示，它满足以下条件：
摩擦定律

$$F_s \leq f_s F_N \quad (1)$$

达朗贝尔原理

$$\sum F_x = 0, \quad F_s - F_1 \sin 30^\circ = 0 \quad (2)$$

$$\sum F_y = 0, \quad F_N + F_1 \cos 30^\circ - mg = 0 \quad (3)$$

$$F_1 = ma \quad (4)$$

式（1）、（2）、（3）、（4）联立，解得

$$a \leq 2.92 \text{ m/s}^2 \quad (5)$$

（2）零件不滑动而倾倒时，约束力 F_N 已集中到左侧点 A，如图 14-1c 所示，零件在惯性力作用下将向左倾倒。倾倒条件是

$$\sum M_A \geq 0, \quad \frac{d}{2}(-mg + F_1 \cos 30^\circ) + F_1 \sin 30^\circ \frac{h}{2} \geq 0 \quad (6)$$

式（4）、（6）联立，解得 $\frac{h}{d} \geq \frac{2g - \sqrt{3}a}{a}$

此时式（1）、（2）、（3）仍满足，将式（5）代入上式得

$$\frac{h}{d} \geq 5$$

14-2 如图 14-2b 所示汽车总质量为 m ，以加速度 a 作水平直线运动。汽车质心 G 离地面的高度为 h ，汽车的前后轴到通过质心垂线的距离分别等于 c 和 b 。求其前后轮的正压力，又，汽车应如何行驶方能使前后轮的压力相等。

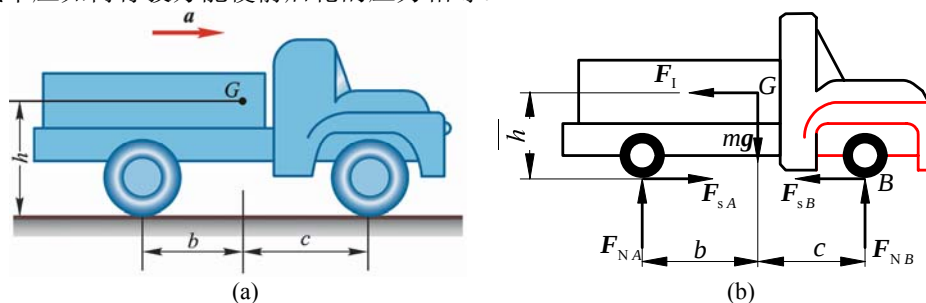


图 14-2

解 取汽车为研究对象，受力（含虚加惯性力）如图 14-2b 所示。其中惯性力 $F_1 = ma$

由动静法：

$$\sum M_A = 0, F_{NB}(b+c) - mgb + F_1 h = 0 \quad (1)$$

$$\sum M_B = 0, -F_{NA}(b+c) + mgc + F_1 h = 0 \quad (2)$$

解得

$$F_{NA} = m \frac{bg - ha}{(c+b)}, F_{NB} = m \frac{cg + ha}{(b+c)}$$

欲使 $F_{NA} = F_{NB}$ ，则汽车的加速度可由

$$m \frac{bg - ha}{(c+b)} = m \frac{cg + ha}{(b+c)}$$

解得

$$a = \frac{(b-c)g}{2h}$$

14-3 如图 14-3a 所示矩形块质量 $m_1 = 100 \text{ kg}$ ，置于平台车上。车质量为 $m_2 = 50 \text{ kg}$ ，此车沿光滑的水平面运动。车和矩形块在一起由质量为 m_3 的物体牵引，使之作加速运动。设物块与车之间的摩擦力足够阻止相互滑动，求能够使车加速运动而 m_1 块不倒的质量为 m_3 的最大值，以及此时车的加速度大小。

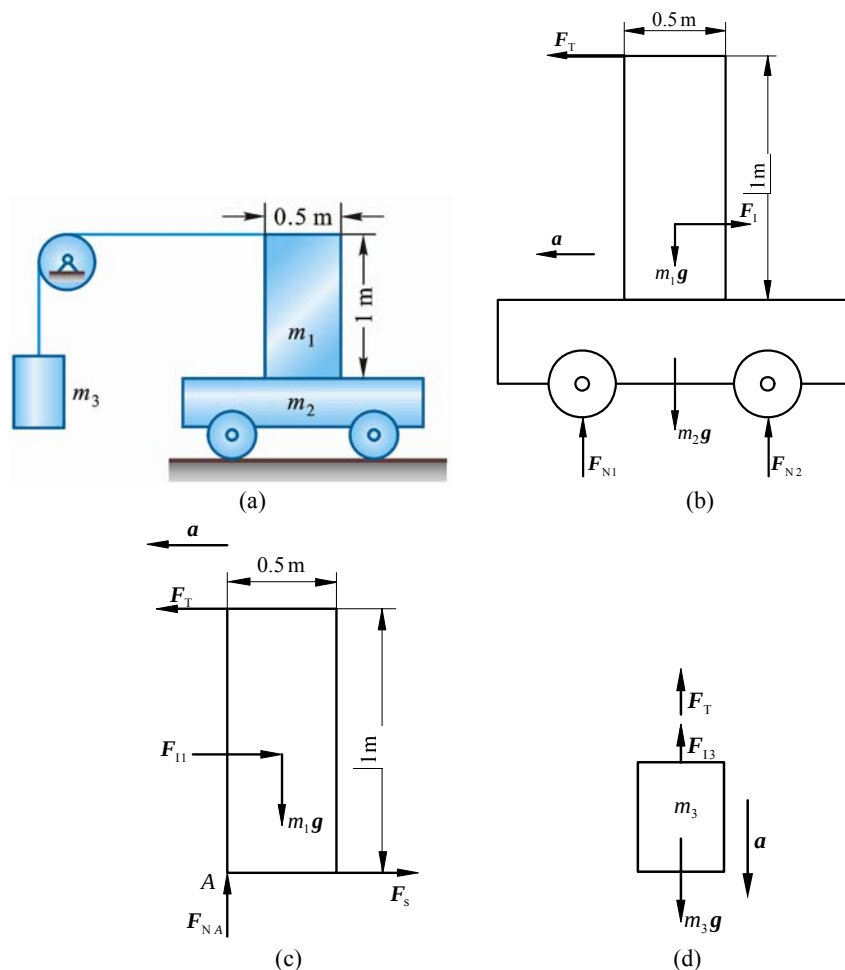


图 14-3

解 取车与矩形块为研究对象如图 14-3b 所示。惯性力为

$$F_I = (m_1 + m_2) a = 150 a$$

由动静法

$$\sum F_x = 0, F_T - F_I = 0, F_T = 150a$$

取矩形块为研究对象，欲求使车与矩形块一起加速运动而块 m_1 不倒的 m_3 最大值，应考虑在

此时矩形块受车的约束力 F_N 已集中到左侧点 A ，如图 14-3c 所示，且矩形块惯性力为

$$F_{I1} = m_1 a$$

由动静法，不翻倒的条件为

$$\sum M_A = 0, \quad F_T \cdot 1 - \frac{0.5}{2} \cdot m_1 g - m_1 a \cdot \frac{1}{2} = 0$$

将

$$F_T = 150 a$$

代入上式，解得

$$a = \frac{g}{4} = 2.45 \text{ m/s}^2$$

取物块为研究对象，惯性力（如图 14-3d 所示）

$$F_{I3} = m_3 a$$

由动静法

$$F_T + m_3 a - m_3 g = 0$$

$$m_3 = \frac{F_T}{g - a} = \frac{150 \cdot \frac{g}{4}}{g - \frac{g}{4}} = 50 \text{ kg}$$

14-4 调速器由两个质量为 m_1 的均质圆盘所构成，圆盘偏心地铰接于距转动轴为 a 的 A 、 B 两点。调速器以等角速度 ω 绕铅直轴转动，圆盘中心到悬挂点的距离为 l ，如图 14-4a 所示。调速器的外壳质量为 m_2 ，并放在两个圆盘上。如不计摩擦，求角速度 ω 与圆盘离铅垂线的偏角 φ 之间的关系。

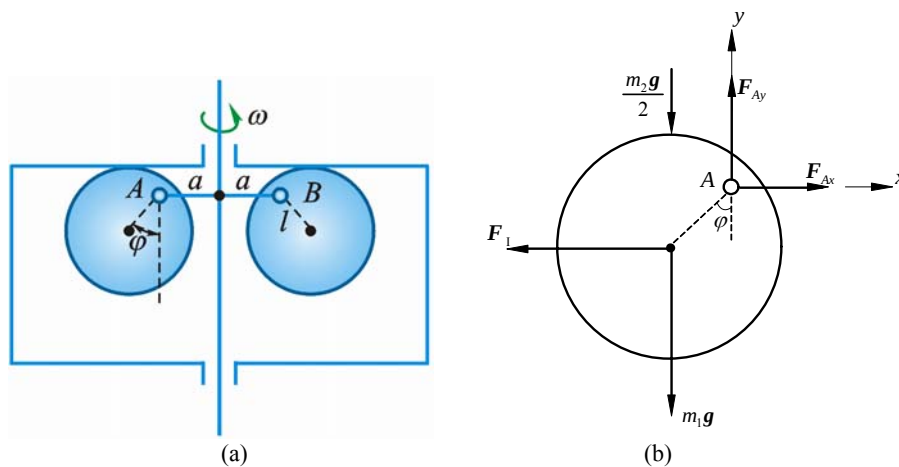


图 14-4

解 取调速器外壳为研究对象，由对称可知壳与圆盘接触处所受约束力为

$$F_N = m_2 g / 2$$

取左圆盘为研究对象，受力如图 14-4b 所示，惯性力为

$$F_I = m_1 \cdot (a + l \sin \varphi) \omega^2$$

由动静法

$$\sum M_A = 0, \quad (m_1 g + \frac{m_2 g}{2}) l \sin \varphi - F_I l \cos \varphi = 0$$

将 F_I 值代入，得

$$\omega^2 = \frac{2m_1 + m_2}{2m_1(a + l \sin \varphi)} g \tan \varphi$$

14-5 曲柄滑道机械如图 14-5a 所示，已知圆轮半径为 r ，对转轴的转动惯量为 J ，轮上作用 1 不变的力偶 M ， ABD 滑槽的质量为 m ，不计摩擦。求圆轮的转动微分方程。

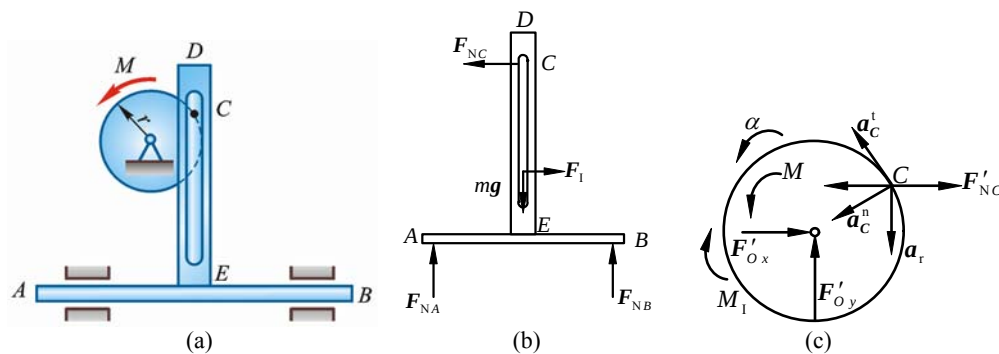


图 14-5

解 取 C 为动点，动系固结于 ABD 滑槽，点 C 的绝对加速度分解为 $\mathbf{a}_a^t$, $\mathbf{a}_a^n$ ，滑槽的加速度为 $\mathbf{a}_e$ ，则

$$\mathbf{a}_e = \mathbf{a}_a^t \sin \varphi + \mathbf{a}_a^n \cos \varphi = r\ddot{\varphi} \sin \varphi + r\dot{\varphi}^2 \cos \varphi$$

其中 φ 为任意角。

取 ABD 滑槽为研究对象，受力分析如图 14-5b 所示。图中惯性力为

$$F_I = mr\ddot{\varphi} \sin \varphi + mr\dot{\varphi}^2 \cos \varphi$$

由动静法：

$$\sum F_x = 0, \quad F_I - F_{NC} = 0$$

解得

$$F_{NC} = m(r\ddot{\varphi} \sin \varphi + r\dot{\varphi}^2 \cos \varphi)$$

取圆轮为研究对象，受力分析如图 c，惯性力偶矩

$$M_I = J\ddot{\varphi}$$

由动静法：

$$\sum M_O = 0, \quad M - M_I - F'_{NC} r \sin \varphi = 0$$

$$(J + mr^2 \sin^2 \varphi) \ddot{\varphi} + mr^2 \dot{\varphi}^2 \cos \varphi \sin \varphi = M$$

14-6 如图 14-6a 所示，长方形匀质平板，质量为 27 kg，由两个销 A 和 B 悬挂。如果突然撤去销 B ，求在撤去销 B 的瞬时平板的角加速度和销 A 的约束力。

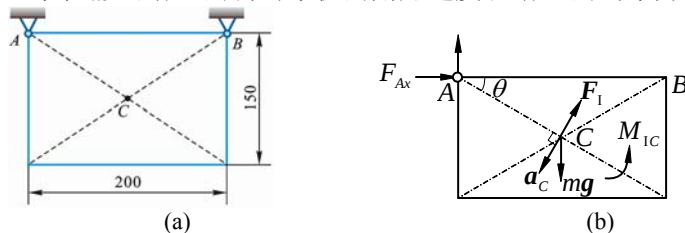


图 14-6

解 取平板为研究对象，突然撤去销 B 的瞬时平板的角速度 $\omega = 0$ ，角加速度 $\alpha \neq 0$ 。平板长 $a = 0.2$ m，平板宽 $b = 0.15$ m。平板对质心 C 的转动惯量为

$$J_C = \frac{m}{12}(a^2 + b^2)$$

平板对 A 的转动惯量为

$$J_A = J_C + m \cdot AC^2 = \frac{m}{3}(a^2 + b^2)$$

把惯性力系向销 A 简化（见图 14-6b）得

$$F_I = ma_C^t = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{2} m \alpha$$

$$M_I = J_A \alpha = \frac{m}{3}(a^2 + b^2) \alpha$$

由动静法：

$$\sum M_A = 0, M_I - mg \cdot \frac{a}{2} = 0 \quad (1)$$

$$\sum F_x = 0, F_{Ax} + F_I \cdot \frac{15}{25} = 0 \quad (2)$$

$$\sum F_y = 0, F_{Ay} + F_I \cdot \frac{20}{25} - mg = 0 \quad (3)$$

把有关量代入上述方程组，由式 (1) 得 $\alpha = 47 \text{ rad/s}^2$ (顺)

由式 (2) 得 $F_{Ax} = -95 \text{ N}$ (与原设反向)

由式 (3) 得 $F_{Ay} = 138 \text{ N}$

讨论：如把惯性力系向质心 C 简化，则平板的惯性力

$$F_I = ma_C^t = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{2} ma$$

平板对其质心的惯性力偶矩为

$$M_{IC} = J_C \alpha = \frac{m}{12} (a^2 + b^2) \alpha$$

由动静法 $\sum M_A = 0, M_{IC} + F_I \cdot \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{2} - mg \cdot \frac{a}{2} = 0$

将有关各量代入，得

$$\alpha = 47 \text{ rad/s}^2$$

可见这 2 种方法均可使用。

14-7 图 14-7a 所示为均质细杆弯成的圆环，半径为 r ，转轴 O 通过圆心垂直于环面， A 端自由， AD 段为微小缺口，设圆环以匀角速度 ω 绕轴 O 转动，环的线密度为 ρ ，不计重力，求任意截面 B 处对 AB 段的约束力。

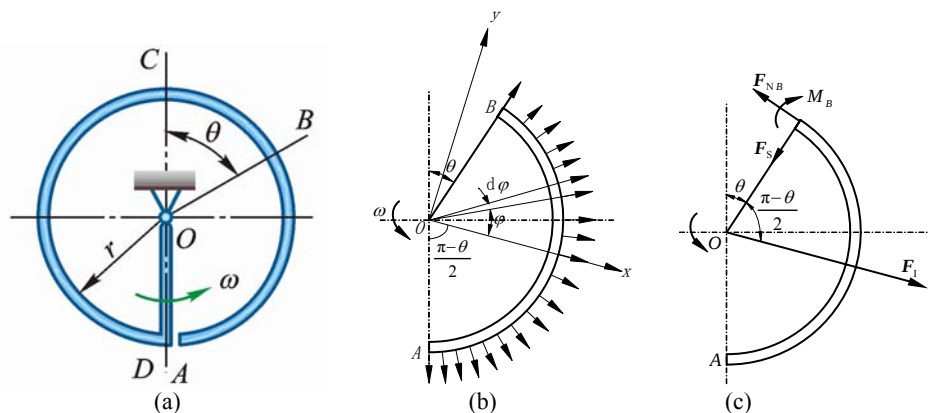


图 14-7

解 (1) 取图 14-7b 所示坐标，分布惯性力向外，由对称性，其合力在轴 y 上投影为 0，
即 $F_{ly} = 0$

$$F_{lx} = \int_{-\frac{\pi-\theta}{2}}^{\frac{\pi-\theta}{2}} r \omega^2 \cdot \rho r \cos \varphi d\varphi = \rho r^2 \omega^2 \cdot 2 \sin \frac{\pi-\theta}{2} = 2 \rho r^2 \omega^2 \cos \frac{\theta}{2}$$

(2) 见图 14-7c

$$\sum M_B = 0, \quad M_B = F_{lx} \cdot r \sin\left(\frac{\pi - \theta}{2}\right) = 2\rho r^3 \omega^2 \cos^2 \frac{\theta}{2} = \rho \omega^2 r^3 (1 + \cos \theta)$$

$$\sum F_t = 0, \quad F_{TB} = F_{lx} \cos\left(\frac{\pi - \theta}{2}\right) = F_{lx} \sin \frac{\theta}{2} = \rho r^2 \omega^2 \sin \theta$$

$$\sum F_n = 0, \quad F_{NB} = F_{lx} \cos \frac{\theta}{2} = \rho \omega^2 r^2 (1 + \cos \theta)$$

14-8 如图 14-8a 所示均质曲杆 $ABCD$ 刚性地连接于铅直转轴上，已知 $CO = OB = b$ ，转轴以匀角速度 ω 转动。欲使 AB 及 CD 段截面只受沿杆的轴向力，求 AB 、 CD 段的曲线方程。

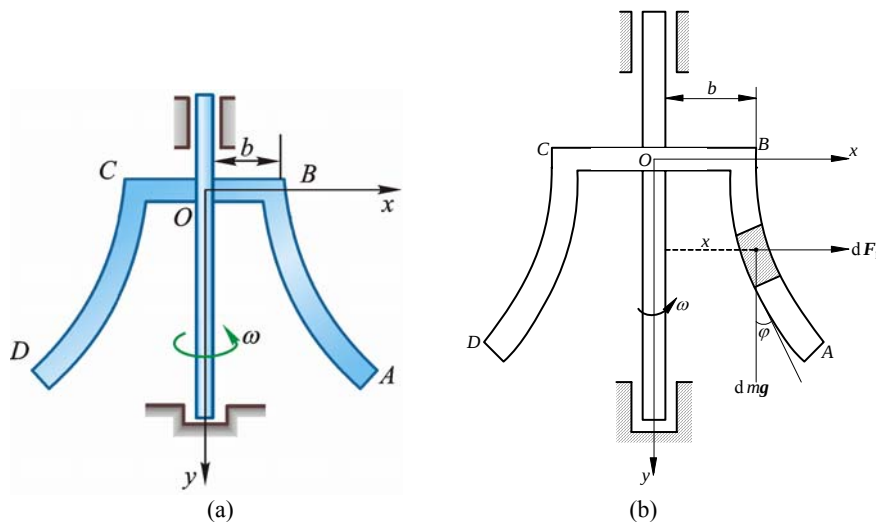


图 14-8

解 在曲杆 AB 段上任取 1 微单元为研究对象，设质量为 dm ，其上有惯性力，

$$dF_R = dm \cdot x \omega^2, \quad \text{重力 } dm g, \quad \text{如图 b.}$$

设重力与切线之夹角为 φ ，按题意 dF_l 与 $dm g$ 的合力沿该切线方向，故应有

$$\tan \varphi = \frac{dF_l}{dm g} = \frac{dm \cdot x \omega^2}{dm g} = \frac{x \omega^2}{g}$$

$$\tan \varphi = \frac{dx}{dy}, \quad \frac{dx}{dy} = \frac{x \omega^2}{g}$$

积分

$$\int_0^y dy = \frac{g}{\omega^2} \int_b^x \frac{dx}{x}$$

$$y = \frac{g}{\omega^2} \ln \frac{x}{b}, \quad \text{或 } \frac{x}{b} = e^{\frac{\omega^2 y}{g}}$$

AB 或 CD 段之曲线方程为

$$x = b e^{\frac{\omega^2 y}{g}}$$

14-9 转速表的简化模型如图 14-9 所示。杆 CD 的两端各有质量为 m 的球 C 和球 D ，杆 CD 与转轴 AB 铰接，质量不计。当转轴 AB 转动时，杆 CD 的转角 φ 就发生变化。设 $\omega = 0$ 时， $\varphi = \varphi_0$ ，且弹簧中无力。弹簧产生的力矩 M 与转角 φ 的关系为 $M = k(\varphi - \varphi_0)$ ， k 为弹簧刚度。求角速度 ω 与角 φ 之间的关系。

解 取 2 球及杆 CD 为研究对象如图 14-9b 所示，由动静法

$$\sum M_x = 0, \quad M - 2F_l \cdot l \cos \varphi = 0$$

其中

$$F_l = m \cdot l \sin \varphi \cdot \omega^2$$

代入前式得

$$k(\varphi - \varphi_0) - 2 \cdot m \cdot l \sin \varphi \cdot \omega^2 \cdot l \cos \varphi = 0$$

$$\omega = \sqrt{\frac{k(\varphi - \varphi_0)}{ml^2 \sin 2\varphi}}$$

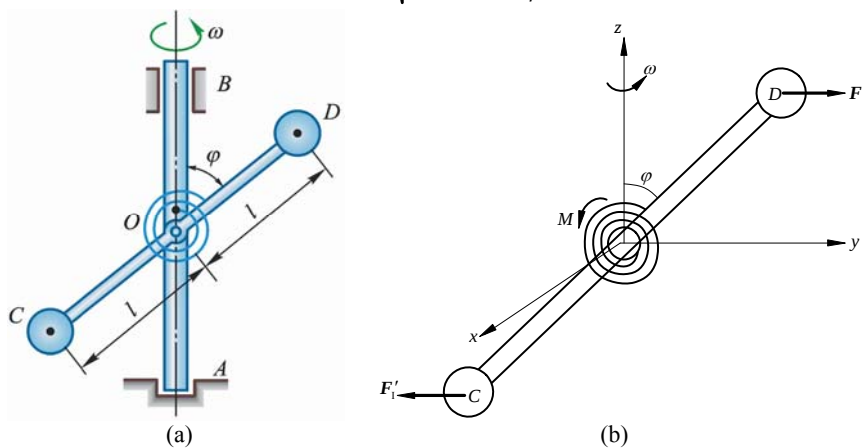


图 14-9

14-10 轮轴质心位于 O 处，对轴 O 的转动惯量为 J_O 。在轮轴上系有两个物体，质量各为 m_1 和 m_2 。若此轮轴依顺时针转向转动，求轮轴的角加速度 α 和轴承 O 的动约束力。

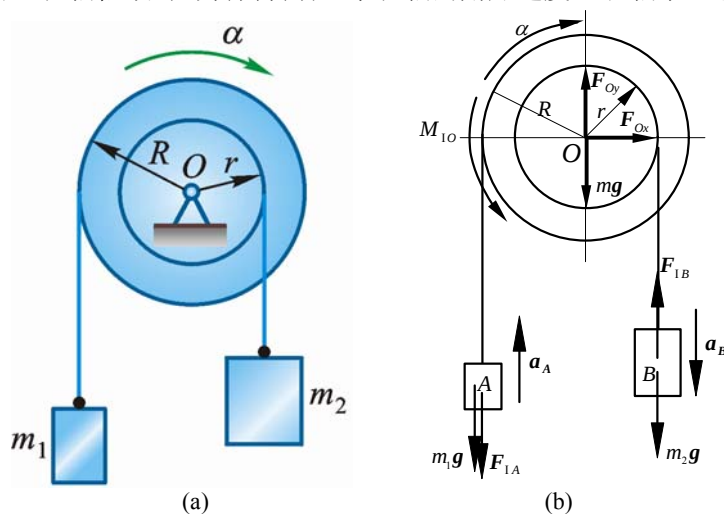


图 14-10

解 整个系统为研究对象。设 m 为轮轴质量，图 14-10b 中 F_{Ox} ， F_{Oy} 只表示 O 处动约束力。

$$F_{1A} = m_1 a_A = m_1 R \alpha$$

$$F_{1B} = m_2 a_B = m_2 r \alpha$$

$$M_{1O} = J \alpha$$

由动静法：

$$\sum M_O = 0$$

$$m_1 g R + F_{1A} \cdot R + M_{1O} + F_{1B} \cdot r - m_2 g r = 0$$

即

$$m_1 g R + m_1 g R^2 \alpha + J \alpha + m_2 r^2 \alpha - m_2 g r = 0$$

$$(J + m_1 R^2 + m_2 r^2) \alpha = (m_2 r - m_1 R) g$$

$$\alpha = \frac{(m_2 r - m_1 R)}{(J + m_1 R^2 + m_2 r^2)} g$$

轴 O 动约束力与惯性力相平衡：

$$\sum F_x = 0, \quad F_{Ox} = 0$$

$$\sum F_y = 0, \quad F_{Oy} + F_{IB} - F_{IA} = 0$$

$$F_{Oy} = m_1 R \alpha - m_2 r \alpha = (m_1 R - m_2 r) \alpha = \frac{-(m_2 r - m_1 R)^2}{J + m_1 R^2 + m_2 r^2} g$$

14-11 如图 14-11a 所示，质量为 m_1 的物体 A 下落时，带动质量为 m_2 的均质圆盘 B 转动，不计支架和绳子的重量及轴上的摩擦， $BC = a$ ，盘 B 的半径为 R 。求固定端 C 的约束力。

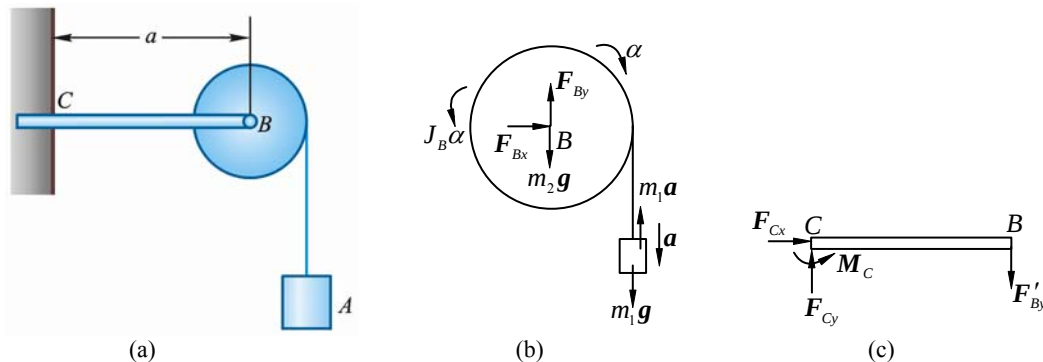


图 14-11

解 (1) 见图 14-11b

$$\sum M_B = 0, \quad J_B \alpha + m_1 a \cdot R - m_1 g R = 0, \quad \frac{1}{2} m_2 R^2 \cdot \frac{a}{R} + m_1 R a - m_1 R g = 0$$

$$a = \frac{2m_1}{m_2 + 2m_1} g$$

$$\sum F_x = 0, \quad F_{Bx} = 0$$

$$\sum F_y = 0, \quad F_{By} - m_2 g + m_1 a - m_1 g = 0, \quad F_{By} = \frac{3m_1 m_2 + m_2^2}{2m_1 + m_2} g$$

(2) 见图 14-11c

$$\sum F_x = 0, \quad F_{Cx} = 0$$

$$\sum F_y = 0, \quad F_{Cy} = \frac{3m_1 m_2 + m_2^2}{2m_1 + m_2} g$$

$$\sum M_C = 0, \quad M_C = \frac{(3m_1 + m_2)m_2}{2m_1 + m_2} a g$$

14-12 如图 14-12a 所示，电动绞车提升 1 质量为 m 的物体，在主动轴上作用有 1 矩为 M 的主动力偶。已知主动轴和从动轴连同安装在这两轴上的齿轮以及其他附属零件的转动惯量分别为 J_1 和 J_2 ；传动比 $z_2 : z_1 = i$ ；吊缠绕在鼓轮上，此轮半径为 R 。设轴承的摩擦和吊索的质量均略去不计，求重物的加速度。

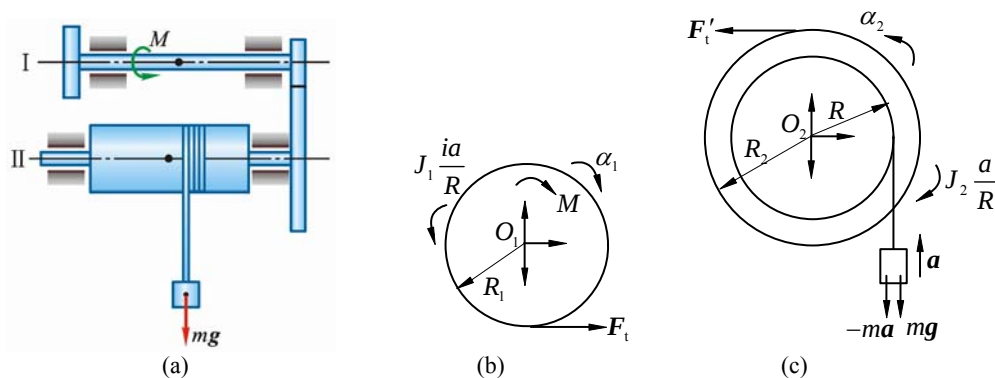


图 14-12

解 (1) 如图 14-12b 所示 (O_1 处受力未标注, 因计算中用不到, 下同)

$$\sum M_{O_1} = 0, \quad F_1 R_1 + J_1 \frac{ia}{R} - M = 0 \quad (1)$$

(2) 如图 14-12c 所示

$$\sum M_{O_2} = 0, \quad F_1 R_2 - J_2 \frac{a}{R} - m(a + g) = 0 \quad (2)$$

$$R_2 = iR_1 \quad (3)$$

式 (1)、(2)、(3) 联立, 解得
$$a = \frac{(iM - mgR)R}{mR^2 + i^2 J_1 + J_2} \quad (\uparrow)$$

14-13 如图 14-13a 所示, 为升降重物用的叉车, B 为可动圆滚 (滚动支座), 叉头 DBC 用铰链 C 与铅直导杆连接。由于液压机构的作用, 可使导杆在铅直方向上升或下降, 因而可升降重物。已知叉车连同铅直导杆的质量为 1500 kg , 质心在 G_1 ; 叉头与重物的共同质量为 800 kg , 质心在 G_2 。如果叉头向上加速度使得后轮 A 的约束力等于零, 求这时滚轮 B 的约束力。

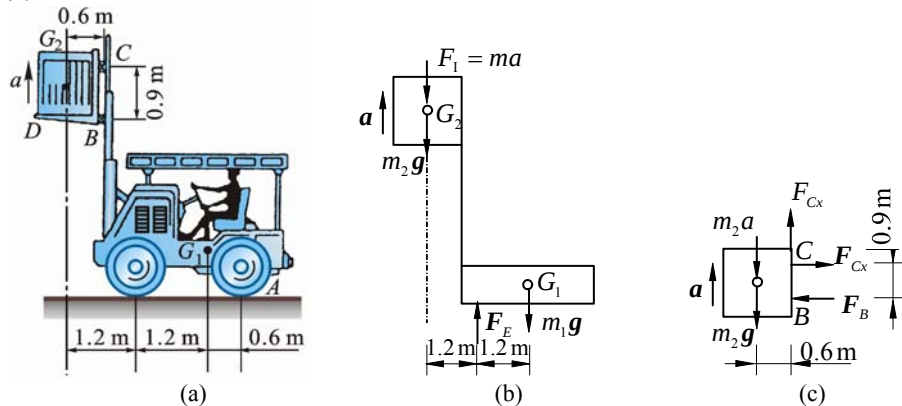


图 14-13

解 (1) 整体平衡, 受力如图 14-13b 所示

$$\sum M_E = 0, \quad m_2(a + g) = m_1 g, \quad 800(a + g) = 1500g, \quad a = \frac{7}{8}g$$

(2) 受力如图 14-13c 所示, 平衡

$$\sum M_C = 0, \quad 0.9F_B = m_2(a + g) \times 0.6$$

$$F_B = \frac{2}{3}m_2(a + g) = \frac{2}{3} \times 800 \times \left(\frac{7}{8} + 1\right) \times 9.8 = 9.8 \times 10^3 \text{ N} = 9.8 \text{ kN}$$

14-14 当发射卫星实现星箭分离时, 打开卫星整流罩的 1 种方案如图 14-14a 所示。先由释放机构将整流罩缓慢送到图示位置, 然后令火箭加速, 加速度为 a , 从而使整流罩向外转。当其质心 C 转到位置 C' 的时候, O 处铰链自动脱开, 使整流罩离开火箭。设整流罩质量为 m , 对轴 O 的回转半径为 ρ , 质心到轴 O 的距离 $OC = r$ 。问整流罩脱落时, 角速度为多大?

解 忽略重力影响, 惯性力 F_{IC} 做功

$$W = F_{IC}r = mar$$

动能

$$T_2 = \frac{1}{2}J_0\omega^2 = \frac{1}{2}m\rho^2\omega^2, \quad T_1 = 0$$

动能定理

$$T_2 = W, \quad \frac{1}{2}m\rho^2\omega^2 = mar$$

$$\omega = \frac{1}{\rho} \sqrt{2ar}$$

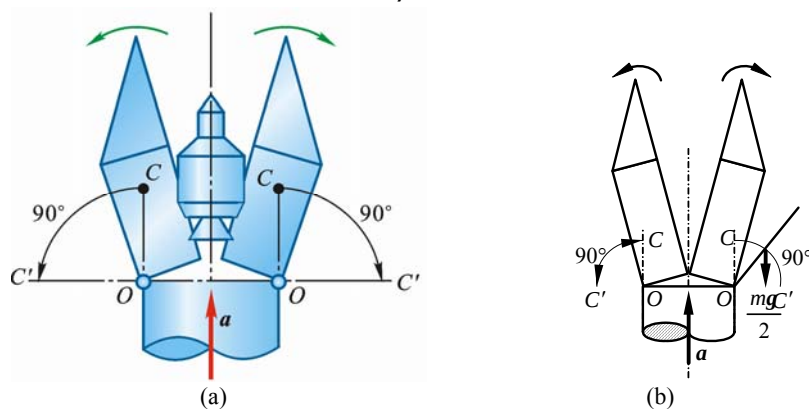


图 14-14

14-15 如图 14-15a 所示，曲柄 OA 质量为 m_1 ，长为 r ，以等角速度 ω 绕水平的 O 轴反时针方向转动。曲柄 OA 推动质量为 m_2 的滑杆 BC ，使其沿铅垂方向运动。忽略摩擦，求当曲柄与水平方向夹角 30° 时的力偶矩 M 及轴承 O 的约束力。

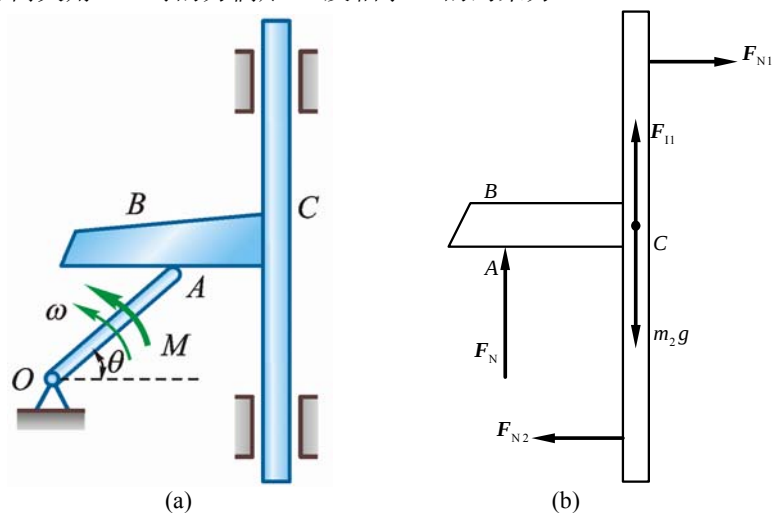


图 14-15

解 取曲柄 OA 上点 A 为动点，动系固结于滑杆 BC ，则

$$a_e = a_a \sin 30^\circ = \frac{1}{2} r \omega^2$$

(1) 取滑杆 BC 为研究对象，受力如图 14-15b 所示，由动静法

$$\sum F_y = 0, F_N + F_{11} - m_2 g = 0$$

式中

$$F_{11} = m_2 a_e = m_2 r \omega^2 / 2$$

解得

$$F_N = m_2 g - \frac{m_2}{2} r \omega^2$$

(2) 取曲柄 OA 为研究对象，由动静法

$$\sum M_O = 0, \quad M - F_N \cdot r \frac{\sqrt{3}}{2} - m_1 g \frac{r}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 0$$

$$M = \frac{\sqrt{3}}{4} [r(m_1 g + 2m_2 g) - m_2 r^2 \omega^2]$$

$$\sum F_x = 0, \quad -F_{Ox} + F_1 \frac{\sqrt{3}}{2} = 0, \quad F_1 = m_1 \cdot \frac{r \omega^2}{2}$$

$$F_{Ox} = \frac{\sqrt{3}}{4} m_1 r \omega^2$$

$$\sum F_y = 0, \quad F_{Oy} - F_N + F_1 \cdot \frac{1}{2} - m_1 g = 0$$

$$F_{Oy} = m_1 g + m_2 g - \frac{m_1 + 2m_2}{4} r \omega^2$$

14-16 曲柄摇杆机构的曲柄 OA 长为 r ，质量 m ，在力偶 M （随时间而变化）驱动下以匀角速度 ω_0 转动，并通过滑块 A 带动摇杆 BD 运动。 OB 铅垂， BD 可视为质量为 $8m$ 的均质等直杆，长为 $3r$ 。不计滑块 A 的质量和各处摩擦；如图 14-16a 所示瞬时， OA 水平、 $\theta = 30^\circ$ 。求此时驱动力偶矩 M 和 O 处约束力。

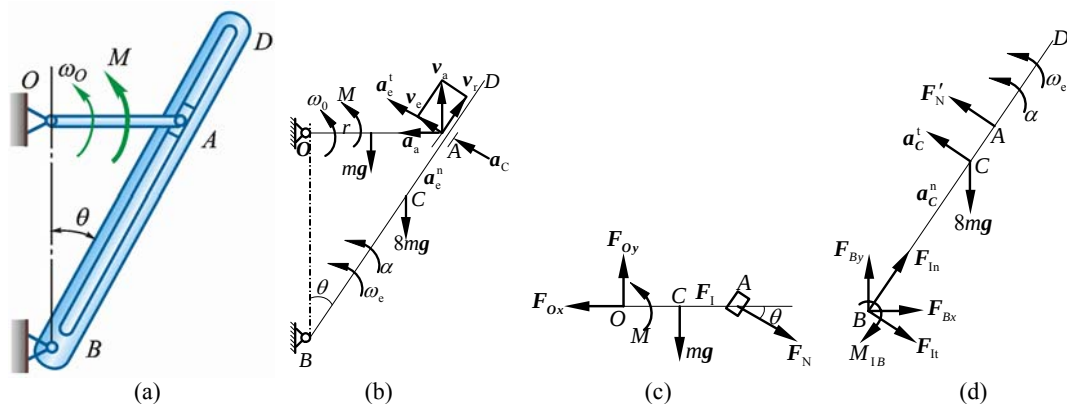


图 14-16

解 (1) 如图 14-16b 所示， OA 上 A 为动点，动系固结于 BD 。

$$v_a = r\omega_0$$

$$v_e = \frac{1}{2}v_a = \frac{1}{2}r\omega_0$$

$$v_r = \frac{\sqrt{3}}{2}v_a = \frac{\sqrt{3}}{2}r\omega_0$$

$$\omega_e = \frac{v_e}{2r} = \frac{\omega_0}{4}$$

$$a_c = 2\omega_e v_r = 2 \cdot \frac{\omega_0}{4} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} r \omega_0 = \frac{\sqrt{3}}{4} r \omega_0^2$$

$$a_a = r\omega_0^2$$

$$\mathbf{a}_a = \mathbf{a}_e^n + \mathbf{a}_e^t + \mathbf{a}_r + \mathbf{a}_c$$

$$a_a \cos \theta = a_e^t + a_c$$

$$a_e^t = r\omega_0^2 \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{4} r \omega_0^2 = \frac{\sqrt{3}}{4} r \omega_0^2$$

$$\alpha = \frac{a_e^t}{2r} = \frac{\sqrt{3}}{8} \omega_0^2$$

(2) 如图 14-16d 所示，杆 BD

$$\sum M_B = 0, \quad -M_{IB} - 8mg \cdot \frac{3r}{2} \cdot \frac{1}{2} + F'_N \cdot 2r = 0$$

$$M_{IB} = J_B \alpha = \frac{1}{3} 8m \cdot (3r)^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{8} \omega_0^2 = 3\sqrt{3} r^2 \omega_0^2 m$$

$$F'_N = 3mg + \frac{3}{2} \sqrt{3} mr \omega_0^2$$

(3) 如图 14-16c 所示

$$\sum M_O = 0, \quad M - mg \cdot \frac{r}{2} - F_N \sin \theta \cdot r = 0$$

$$M = \frac{1}{2} mgr + r \sin \theta \cdot (3mg + \frac{3}{2} \sqrt{3} mr \omega_0^2) = 2mgr + \frac{3\sqrt{3}}{4} mr^2 \omega_0^2$$

$$\sum F_x = 0, \quad -F_{Ox} + F_1 + F_N \cos \theta = 0,$$

$$F_{Ox} = F_N \cos \theta + F_1 = (3mg + \frac{3\sqrt{3}}{2} mr \omega_0^2) \frac{\sqrt{3}}{2} + m \frac{r}{2} \omega_0^2 = \frac{3\sqrt{3}}{2} mg + \frac{11}{4} mr \omega_0^2$$

$$\sum F_y = 0, \quad F_{Oy} - mg - F_N \sin \theta = 0$$

$$F_{Oy} = mg + F_N \sin \theta = mg + (3mg + \frac{3\sqrt{3}}{2} mr \omega_0^2) \cdot \frac{1}{2} = \frac{5}{2} mg + \frac{3\sqrt{3}}{4} mr \omega_0^2$$

14-17 如图 14-17a 所示，均质板质量为 m ，放在 2 个均质圆柱滚子上，滚子质量皆为 $\frac{m}{2}$ ，其半径均为 r 。如在板上作用 1 水平力 F ，并设滚子无滑动，求板的加速度。

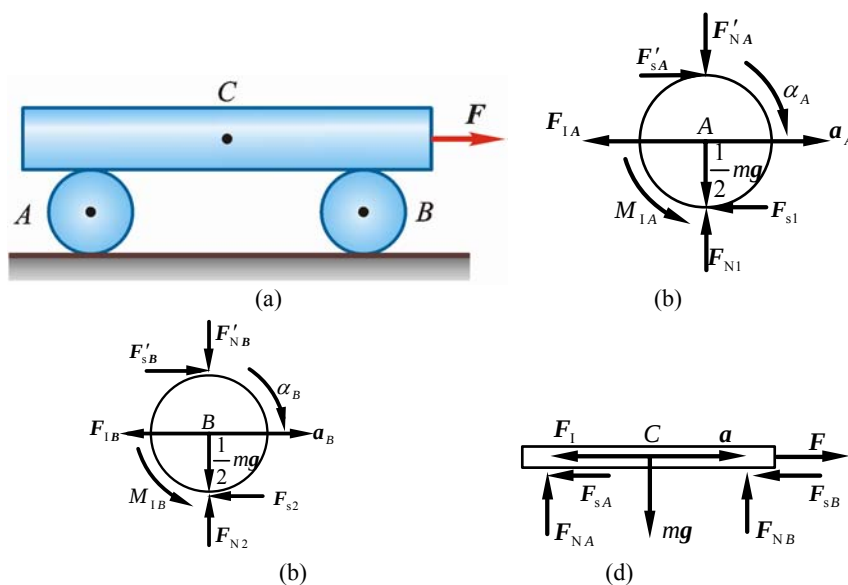


图 14-17

解 设板的加速度为 a ，则滚子中心的加速度为 $\frac{a}{2}$ 。

(1) 取圆柱 A 为研究对象，见图 14-17b，其惯性力和惯性力矩为

$$F_{lA} = \frac{m}{2} \cdot \frac{a}{2} = \frac{m}{4} a, \quad M_{lA} = \frac{1}{2} \left(\frac{m}{2} r^2 \right) \cdot \left(\frac{a}{2r} \right) = \frac{m}{8} ra \quad (1)$$

由动静法

$$\sum M_D = 0, \quad F_{lA} \cdot r + M_{lA} - F'_A \cdot 2r = 0 \quad (2)$$

式 (1) 代入式 (2)，解得

$$F'_A = \frac{3m}{16} a \quad (3)$$

(2) 取圆柱 B 为研究对象，见图 14-17c，同理可得

$$F'_B = \frac{3m}{16}a \quad (4)$$

(3) 取板为研究对象，见图 14-17d，惯性力为

$$F_I = ma \quad (5)$$

由动静法

$$F - F_I - F_A - F_B = 0$$

式 (3)、(4)、(5) 代入上式，得

$$a = \frac{8F}{11m}$$

14-18 铅垂面内曲柄连杆滑块机构中，均质直杆 $OA = r$ 、 $AB = 2r$ ，质量分别为 m 和 $2m$ ，滑块质量为 m 。曲柄 OA 匀速转动，角速度为 ω_0 。在图 14-18a 所示瞬时，滑块运行阻力为 F 。不计摩擦，求滑道对滑块的约束力及 OA 上的驱动力偶矩 M_0 。

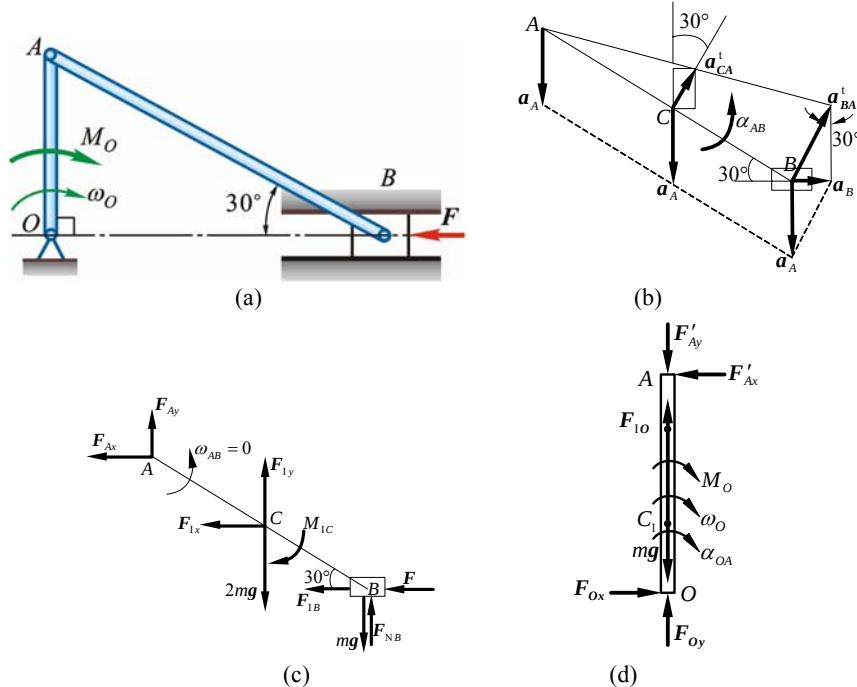


图 14-18

解 研究对象： $OA + AB +$ 滑块 B 组成的系统。

(1) AB 加速度分析如图 14-18b 所示

$$a_A = r\omega_0^2, \quad \omega_{AB} = 0 \quad (\text{瞬时平移})$$

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_B &= \mathbf{a}_A + \mathbf{a}_{BA}^t + \mathbf{a}_{BA}^n \\ \text{方向} &\rightarrow \quad \downarrow \quad \perp AB \quad BA \\ \text{大小} &\quad ? \quad R\omega_0^2 \quad ? \quad 0 \end{aligned}$$

$$a_{BA}^t = \frac{a_A}{\cos 30^\circ} = \frac{2}{\sqrt{3}}r\omega_0^2, \quad \alpha_{AB} = \frac{a_{BA}^t}{2r} = \frac{\omega_0^2}{\sqrt{3}}$$

$$a_B = \frac{1}{2}a_{BA}^t = \frac{1}{\sqrt{3}}r\omega_0^2, \quad a_{CA}^t = \frac{1}{2}a_{BA}^t = \frac{1}{\sqrt{3}}r\omega_0^2$$

$$\mathbf{a}_{Cx} + \mathbf{a}_{Cy} = \mathbf{a}_A + \mathbf{a}_{CA}^t$$

$$a_{Cx} = \frac{1}{2} \cdot a_{CA}^t = \frac{r\omega_0^2}{2\sqrt{3}} \quad (\rightarrow), \quad a_{Cy} = a_{CA}^t \cos 30^\circ - a_A = -\frac{r\omega_0^2}{2} \quad (\downarrow)$$

(2) AB 受力 (含惯性力、惯性力矩) 如图 14-18c 所示，图中

$$F_{Ix} = 2ma_{Cx} = m \frac{r\omega_0^2}{\sqrt{3}} \quad (\leftarrow)$$

$$F_{Iy} = 2m \cdot \frac{r\omega_0^2}{2} = mr\omega_0^2 \quad (\uparrow)$$

$$M_{IC} = J_C \alpha_{AB} = \frac{1}{12} 2m(2r)^2 \cdot \frac{\omega_0^2}{\sqrt{3}} = \frac{2mr^2}{3\sqrt{3}} \omega_0^2$$

$$F_{IB} = ma_B = \frac{m}{\sqrt{3}} r \omega_0^2$$

$$\sum M_A = 0$$

$$-M_{IC} - F_{Ix} \cdot \frac{r}{2} - 2mg \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} r + F_{Iy} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} r - F \cdot r - F_{IB} \cdot r - mg \cdot 2r \cos 30^\circ + F_{NB} \cdot 2r \cos 30^\circ = 0$$

$$-\frac{2mr^2\omega_0^2}{3\sqrt{3}} - \frac{mr^2}{2\sqrt{3}}\omega_0^2 - \sqrt{3}mgr + \frac{\sqrt{3}}{2}mr^2\omega_0^2 - Fr - \frac{m}{\sqrt{3}}r^2\omega_0^2 - \sqrt{3}mgr + \sqrt{3}rF_{NB} = 0$$

$$-\frac{4\sqrt{3}}{18}mr^2\omega_0^2 - 2\sqrt{3}mgr - Fr + \sqrt{3}rF_{NB} = 0$$

$$F_{NB} = 2mg + \frac{\sqrt{3}}{3}F + \frac{2}{9}mr\omega_0^2$$

$$\sum F_x = 0, \quad F_{Ax} - F_{Ix} - F_{IB} - F = 0$$

$$F_{Ax} = \frac{m}{\sqrt{3}}r\omega_0^2 + \frac{m}{\sqrt{3}}r\omega_0^2 + F = \frac{2}{\sqrt{3}}mr\omega_0^2 + F$$

(3) 杆 OA 受力如图 14-18d 所示，图中 $\alpha_{OA} = 0$

$$\sum M_O = 0, \quad F'_{Ax} \cdot r - M_0 = 0, \quad M_0 = \left(\frac{2}{\sqrt{3}}mr\omega_0^2 + F \right) r$$

14-19 如图 14-19a 所示，磨刀砂轮 I 质量 $m_1 = 1 \text{ kg}$ ，其偏心距 $e_1 = 0.5 \text{ mm}$ ，小砂轮 II 质量 $m_2 = 0.5 \text{ kg}$ ，偏心距 $e_2 = 1 \text{ mm}$ 。电动机转子 III 质量 $m_3 = 8 \text{ kg}$ ，无偏心，带动砂轮旋转，转速 $n = 3000 \text{ r/min}$ 。求转动时轴承 A、B 的附加动约束力。

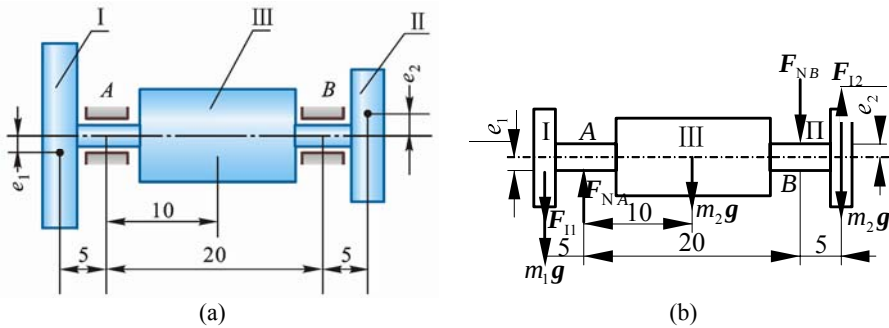


图 14-19

解 取整个系统为研究对象，受力如图 14-19b 所示。

因为转速 $n = \text{常量}$ ，所以角加速度 $\alpha = 0$ ，惯性力偶矩 $M_I = 0$

$$F_{I1} = m_1 e_1 \omega^2 = \left[1 \times 0.5 \times 10^{-3} \left(\frac{3000\pi}{30} \right)^2 \right] \text{ N} = 5\pi^2 \text{ N}$$

$$F_{I2} = m_2 e_2 \omega^2 = \left[0.5 \times 1 \times 10^{-3} \left(\frac{3000\pi}{30} \right)^2 \right] \text{ N} = 5\pi^2 \text{ N}$$

因 F_{11} 与 F_{12} 大小相等、方向相反，故组成 1 力偶， F_{NA} 、 F_{NB} 也必成 1 力偶，方向如图 14-19b 所示。

由动静法

$$\sum M = 0$$

得

$$F_{NA} = F_{NB} = \frac{0.3}{0.2} F_{11} = 15 \times 5\pi^2 = 74\text{N}$$

14-20 3 圆盘 A、B 和 C 质量各为 12 kg，共同固结在轴 x 上，其位置如图 14-20a 所示。若盘 A 质心 G 距轴 5 mm，而盘 B 和 C 的质心在轴上。今若将两个皆为 1 kg 的均衡质量分别放在盘 B 和 C 上，问应如何放置可使物系达到动平衡？

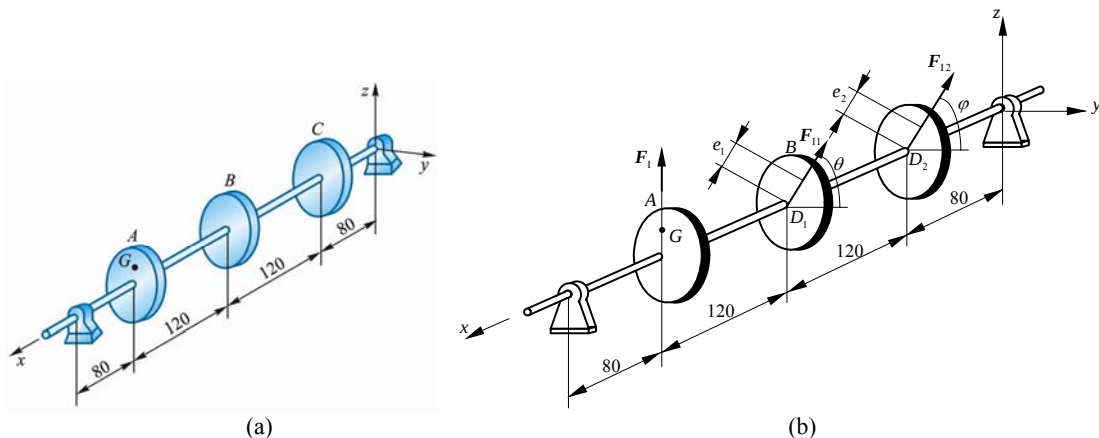


图 14-20

解 取整个系统为研究对象，设 D_1 、 D_2 各为两平衡质量的质心，偏心距分别为 e_1 及 e_2 mm，偏心方向与 y 方向的夹角分别为 θ 、 φ ，转轴角速度为 ω ，则惯性力大小分别为

$$F_1 = 12 \times \frac{5}{1000} \omega^2 = \frac{6\omega^2}{100} \text{ N}$$

$$F_{11} = 1 \cdot \frac{e_1}{1000} \omega^2 = \frac{e_1 \omega^2}{1000} \text{ N}$$

$$F_{12} = 1 \cdot \frac{e_2}{1000} \omega^2 = \frac{e_2 \omega^2}{1000} \text{ N}$$

F_1 平行于 z 轴， F_{11} 与 y 轴夹角为 θ ， F_{12} 与 y 轴夹角为 φ 。

根据动静法，系统达到动平衡时，惯性力系应为平衡力系，于是有

$$\sum F_y = 0, \quad F_{11} \cos \theta + F_{12} \cos \varphi = 0 \quad (1)$$

$$\sum F_z = 0, \quad F_1 + F_{11} \sin \theta + F_{12} \sin \varphi = 0 \quad (2)$$

$$\sum M_y = 0, \quad 320F_1 + F_{11} \sin \theta \cdot 200 + F_{12} \sin \varphi \cdot 80 = 0 \quad (3)$$

$$\sum M_z = 0, \quad F_{11} \cos \theta \cdot 200 + F_{12} \cos \varphi \cdot 80 = 0 \quad (4)$$

把 F_1 、 F_{11} 、 F_{12} 代入上述式子，解得

$$\theta = -\frac{\pi}{2}, \varphi = \frac{\pi}{2}, e_1 = 120 \text{ mm}, e_2 = 60 \text{ mm}$$

可见动平衡时，点 D_1 、 D_2 到轴的距离分别为

$$e_1 = 120 \text{ mm}, e_2 = 60 \text{ mm}$$

D_1 、 D_2 在 G 与轴构成的平面内， D_1 与 G 在轴的相反两侧， D_2 与 G 在轴的同侧。

第 15 章 虚位移原理

15-1 如图 15-1a 所示曲柄式压缩机的销钉 B 上作用有水平力 F ，此力位于平面 ABC 内。作用线平分 $\angle ABC$ 。设 $AB = BC$ ， $\angle ABC = 2\theta$ ，各处摩擦及杆重不计，求对物体的压缩力。

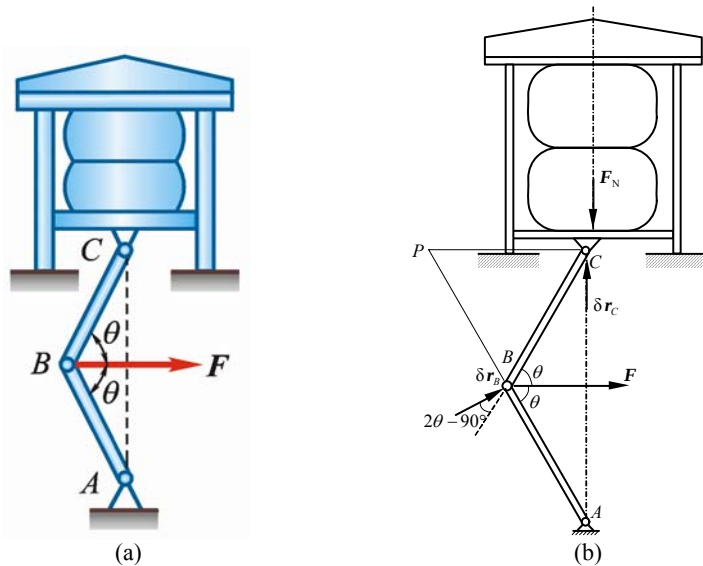


图 15-1

解 令 B 有虚位移 $\delta \mathbf{r}_B \perp AB$ ，而 C 有铅直向上的虚位移 $\delta \mathbf{r}_C$ ，如图 15-1b 所示。将 $\delta \mathbf{r}_B$ 及 $\delta \mathbf{r}_C$ 向 BC 方向投影，为简单起见，以 δr_B 表示 $\delta \mathbf{r}_B$ 的绝对值 $|\delta \mathbf{r}_B|$ ，以 δr_C 表示 $|\delta \mathbf{r}_C|$ ，则有

$$\delta r_C \cos(90^\circ - \theta) = \delta r_B \cos(2\theta - 90^\circ)$$

即

$$\frac{\delta r_B}{\delta r_C} = \frac{1}{2 \cos \theta} \quad (1)$$

由虚位移原理得

$$F \delta r_B \sin \theta - F_N \delta r_C = 0$$

$$\frac{\delta r_B}{\delta r_C} = \frac{F_N}{F \sin \theta} \quad (2)$$

式 (1) 代入 (2)，得

$$F_N = \frac{F}{2} \tan \theta$$

15-2 在压缩机的手轮上作用 1 力偶，其力偶矩为 M 。手轮轴的两端各有螺距同为 h 、但方向相反的螺纹。螺纹上各套有 1 个螺母 A 和 B ，这两个螺母分别与长为 a 的杆相铰接，四杆形成菱形框，如图 15-2a 所示。此菱形框的点 D 固定不动，而点 C 连接在压缩机的水平压板上。求当菱形框的顶角等于 2θ 时，压缩机对被压物体的压力。

解 (1) 令手轮沿力偶方向有虚角位移 $\delta \varphi$ ，则螺母 A 有虚位移 $\delta \mathbf{r}_A$ ， C 点有虚位移 $\delta \mathbf{r}_C$ ，方向如图。由虚位移原理得

$$-F_N \delta r_C + M \delta \varphi = 0$$

即

$$\frac{\delta r_C}{\delta \varphi} = \frac{M}{F_N} \quad (1)$$

(2) 求 δr_C 与 $\delta \varphi$ 之关系：先找 $\delta \mathbf{r}_A$ 与 $\delta \varphi$ 的关系，设 δx_A 为 $\delta \mathbf{r}_A$ 沿轴 AB 的分量，则

$$\frac{\delta \varphi}{2\pi} = \frac{\delta x_A}{h}, \delta x_A = \frac{h}{2\pi} \delta \varphi$$

$$\delta x_A = \frac{\delta x_A}{\cos \theta} = \frac{h}{2\pi \cos \theta} \delta \varphi \quad (2)$$

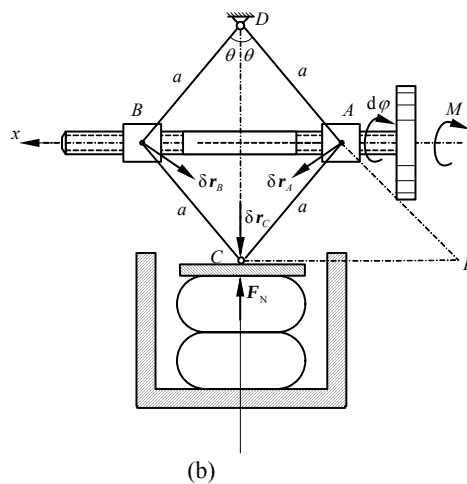
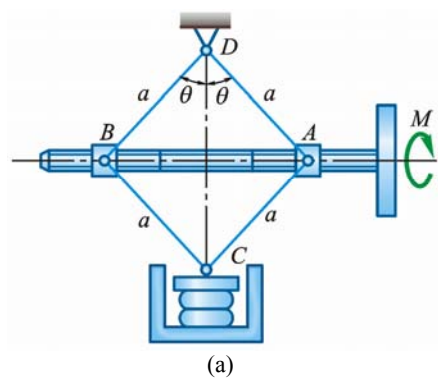


图 15-2

(3) 再找 δr_C 与 δr_A 的关系，设点 O 为杆 AC 虚速度瞬心，则

$$\frac{\delta r_A}{\delta r_C} = \frac{OA}{OC} = \frac{a}{2a \sin \theta} = \frac{1}{2 \sin \theta}$$

$$\delta r_C = 2 \sin \theta \delta r_A = 2 \sin \theta \cdot \frac{h}{2\pi \cos \theta} \delta \varphi$$

$$\frac{\delta r_C}{\delta \varphi} = \frac{h}{\pi} \tan \theta \quad (3)$$

式 (3) 代入式 (1) 得

$$F_N = \frac{\pi M}{h} \cot \theta$$

15-3 挖土机挖掘部分示意如图 15-3a。支臂 DEF 不动， A 、 B 、 D 、 E 、 F 为铰链，液压油缸 AD 伸缩时可通过连杆 AB 使挖斗 BFC 绕 F 转动， $EA = FB = a$ 。当 $\theta_1 = \theta_2 = 30^\circ$ 时，杆 $AE \perp DF$ ，此时油缸推力为 F 。不计构件重量，求此时挖斗可克服的最大阻力矩 M 。

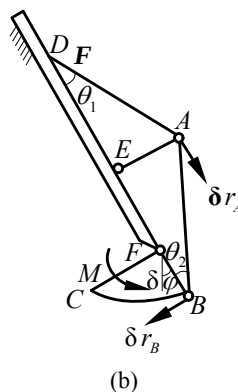
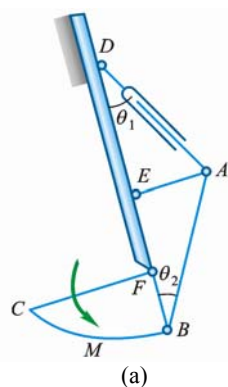


图 15-3

解 由虚位移原理：

$$F \cos \theta_1 \cdot \delta r_A - M \delta \varphi = 0 \quad (1)$$

式中

$$\delta \varphi = \frac{\delta r_B}{a} \quad (2)$$

A 、 B 的虚位移向 AB 投影，得

$$\delta r_A \cos \theta_2 = \delta r_B \sin \theta_2$$

$$\delta r_A = \delta r_B \tan \theta_2 \quad (3)$$

式 (2)、(3) 代入式 (1) 得

$$F \cos \theta_1 \cdot \tan \theta_2 \cdot \delta r_B - M \cdot \frac{\delta r_B}{a} = 0$$

$$\theta_1 = \theta_2 = 30^\circ, M = Fa \sin \theta_2, M = \frac{1}{2} Fa$$

15-4 如图 15-4a 所示，远距离操纵用的夹钳为对称结构。当操纵杆 EF 向右移动时，两块夹板就会合拢将物体夹住。已知操纵杆的拉力为 F ，在图示位置两夹板正好相互平行，求被夹物体所受的压力。

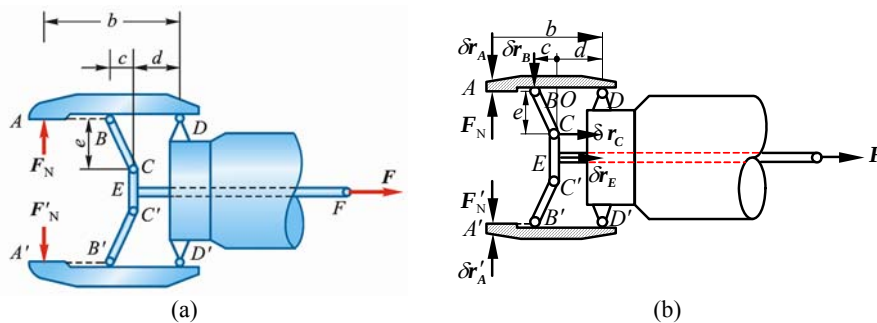


图 15-4

解 令杆 CEC' 有水平向右虚位移 δr_E ，则点 A 有向下的虚位移 δr_A ，点 A' 有向上的虚位移 $\delta r'_A$ ，因结构对称， $\delta r_A = \delta r'_A$ ，点 O 为杆 BC 虚位移瞬心，如图 15-4b 所示。各虚位移间有如下的关系：

$$\frac{\delta r_A}{\delta r_B} = \frac{b}{c+d}, \quad \delta r_C = \delta r_E, \quad \frac{\delta r_B}{\delta r_C} = \frac{c}{e}$$

故

$$\frac{\delta r_A}{\delta r_E} = \frac{\delta r_A}{\delta r_B} \cdot \frac{\delta r_B}{\delta r_C} = \frac{b}{c+d} \cdot \frac{c}{e} \quad (1)$$

由虚位移原理

$$-F_N \delta r_A - F'_N \delta r'_A + F \delta r_E = 0$$

$$\frac{\delta r_A}{\delta r_E} = \frac{F}{2F_N} \quad (2)$$

由式 (1)、(2) 得

$$F_N = \frac{F e(c+d)}{2 bc}$$

15-5 在图 15-5a 所示机构中，当曲柄 OC 绕轴 O 摆动时，滑块 A 沿曲柄滑动，从而带动杆 AB 在铅直导槽 K 内移动。已知： $OC = a$ ， $OK = l$ ，在点 C 处垂直于曲柄作用 1 力 F_1 ；而在点 B 沿 BA 作用 1 力 F_2 。求机构平衡时 F_2 与 F_1 的关系。

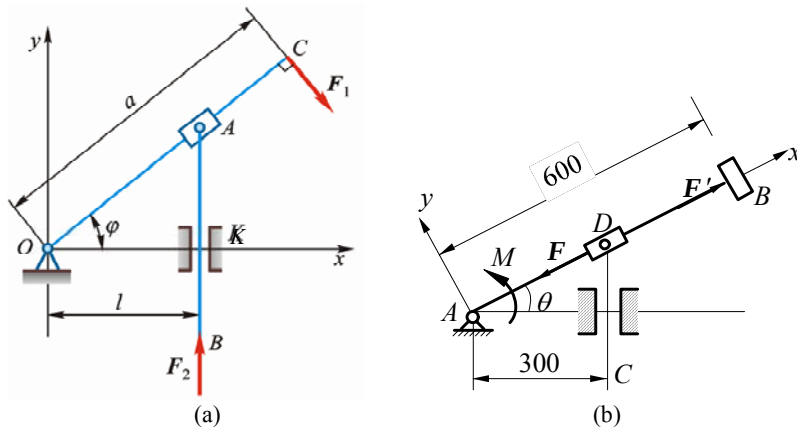


图 15-5

解 用解析法解，选取 φ 为广义坐标，则滑块 A 的约束方程为

$$y_A = l \tan \varphi, \quad \delta y_A = l \sec^2 \varphi \delta \varphi \quad (1)$$

由虚位移原理

$$(-F_1 a) \delta \varphi + F_2 \delta y_A = 0 \quad (2)$$

式 (1) 代入式 (2)，得

$$-F_1 a \delta \varphi + F_2 l \sec^2 \varphi \delta \varphi = 0$$

因 $\delta \varphi \neq 0$ ，于是有

$$-F_1 a + F_2 l \sec^2 \varphi = 0, \quad F_1 = \frac{F_2 l}{a \cos^2 \varphi}$$

15-6 在图 15-6a 所示机构中，曲柄 OA 上作用 1 力偶，其矩为 M ，另在滑块 D 上作用水平力 F 。机构尺寸如图 15-6a 所示。求当机构平衡时，力 F 与力偶矩 M 的关系。

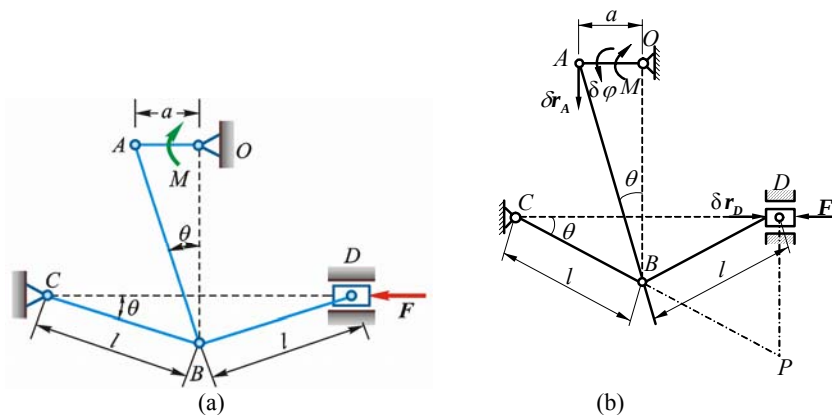


图 15-6

解 令滑块 D 有虚位 δr_D ，则点 B 有虚位移 δr_B ，点 A 有虚位移 δr_A ，杆 OA 有虚位移 $\delta \varphi$ ，如图 15-6b 所示。由虚位移原理

$$-M \delta \varphi + F \delta r_D = 0$$

即

$$\frac{\delta r_D}{\delta \varphi} = \frac{M}{F} \quad (1)$$

找各虚位移间关系：因点 E 为杆 BD 的虚速度瞬心，故

$$\frac{\delta r_D}{\delta r_B} = \frac{ED}{EB} = \frac{2l \sin \theta}{l} = 2 \sin \theta$$

将 δr_A 及 δr_B 沿 AB 方向投影得

$$\delta r_A \cos \theta = \delta r_B \cos 2\theta$$

即

$$\frac{\delta r_B}{\delta r_A} = \frac{\cos \theta}{\cos 2\theta}$$

$$\frac{\delta r_D}{a \delta \varphi} = \frac{\delta r_D}{\delta r_A} = \frac{\delta r_D}{\delta r_B} \frac{\delta r_B}{\delta r_A} = \frac{2 \sin \theta \cos \theta}{\cos 2\theta} = \tan 2\theta$$

得

$$\frac{\delta r_D}{\delta \varphi} = a \tan 2\theta \quad (2)$$

由式 (1)、(2) 得

$$F = \frac{M}{a} \cot 2\theta$$

15-7 如图 15-7a 所示滑套 D 套在光滑直杆 AB 上，并带动杆 CD 在铅直滑道上滑动，已知 $\theta = 0^\circ$ 时弹簧为原长，弹簧刚度系数为 5 kN/m 。求在任意位置平衡时，应加多大的力偶矩 M ？

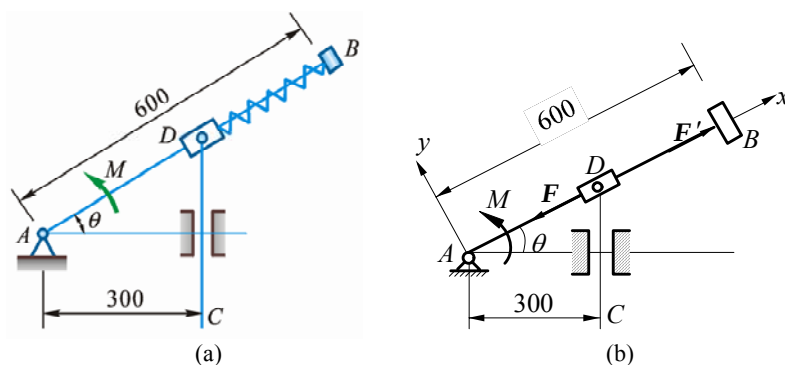


图 15-7

解 解除弹簧约束，代之以弹性力 F 及 F' 。已知 $\theta = 0$ 时，弹簧原长为 0.3 m ，在任意角 θ 时，弹簧

$$DB = AB - AD = (0.6 - \frac{0.3}{\cos \theta})$$

此时弹簧的缩短量为

$$\delta = 0.3 - DB = (\frac{0.3}{\cos \theta} - 0.3)$$

弹性力

$$F = F' = k(\frac{0.3}{\cos \theta} - 0.3)$$

取 x 轴沿杆 AB ，设点 D 沿杆的坐标为 x_D ，选取 θ 为广义坐标，则滑块 D 的约束方程为

$$x_D = \frac{0.3}{\cos \theta}, \quad \delta x_D = \frac{0.3 \sin \theta}{\cos^2 \theta} \delta \theta$$

另外有

$$x_B = \text{常量}, \quad \delta x_B = 0$$

由虚位移原理

$$(-F) \delta x_D + M \delta \theta = 0$$

把 F 及 δx_D 的表达式代入上式得

$$-k(\frac{0.3}{\cos \theta} - 0.3) \cdot \frac{0.3 \sin \theta}{\cos^2 \theta} \delta \theta + M \delta \theta = 0$$

$$M = k \cdot 0.3(\frac{1}{\cos \theta} - 1) \cdot \frac{0.3 \sin \theta}{\cos^2 \theta}$$

把 $k = 5000 \text{ N/m}$ 代入求得

$$M = 450 \frac{\sin \theta (1 - \cos \theta)}{\cos^3 \theta} \text{ N} \cdot \text{m}$$

15-8 如图 15-8a 所示，两等长杆 AB 与 BC 在点 B 用铰链连接，又在杆的 D 、 E 两点连 1 弹簧。弹簧的刚性系数为 k ，当距离 AC 等于 a 时，弹簧内拉力为零。如在点 C 作用 1 水平力 F ，杆系处于平衡，求距离 AC 之值。

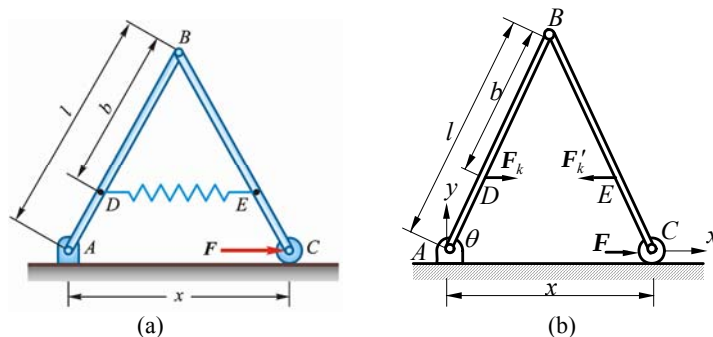


图 15-8

解 解除弹簧约束，计算弹性力，设弹簧原长为 L_0 。当 $AC = a$ 时，

$$\frac{l_0}{a} = \frac{b}{l}, \quad L_0 = \frac{b}{l}a$$

同理可得变形后的弹簧长度为

$$l = \frac{b}{l}x$$

弹簧变形量为

$$\frac{b}{l}(x-a)$$

则弹性力

$$F_1 = F'_1 = k \frac{b}{l}(x-a) \quad (1)$$

作坐标系 Axy ，设 $\angle BAC = \theta$ ，取 θ 为广义坐标如图 15-8b 所示，则

$$x_C = 2l \cos \theta, x_D = (l-b) \cos \theta, x_E = (l+b) \cos \theta$$

求坐标的变分：

$$\delta x_C = -2l \sin \theta \delta \theta, \delta x_D = -(l-b) \sin \theta \delta \theta, \delta x_E = -(l+b) \sin \theta \delta \theta$$

由虚位移原理

$$F_1 \delta x_D + (-F'_1) \delta x_E + F \delta x_C = 0$$

故有

$$[-F_1(l-b) + F'_1(l+b) - 2Fl] \sin \theta \delta \theta = 0$$

因

$$\sin \theta \neq 0, \delta \theta \neq 0$$

故

$$-F_1(l-b) + F'_1(l+b) - 2Fl = 0 \quad (2)$$

由式 (1)、(2) 得

$$x = a + \frac{F}{k} \left(\frac{l}{b} \right)^2$$

15-9 在图 15-9a 所示机构中，曲柄 AB 和连杆 BC 为均质杆，具有相同的长度和重量 W_1 。滑块 C 的重量为 W_2 ，可沿倾角为 θ 的导轨 AD 滑动。设约束都是理想的，求系统在铅垂面内的平衡位置。

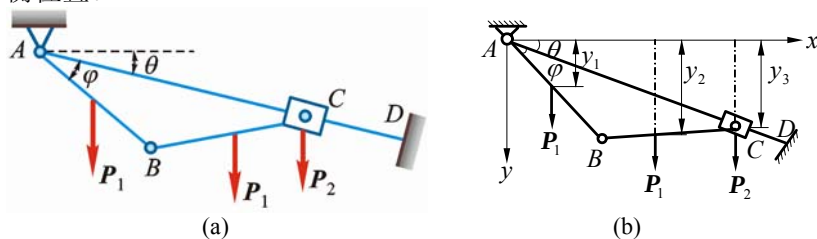


图 15-9

解 取 φ 为广义坐标，另作坐标系 Axy ，设 $AB = BC = l$ ，因

$$y_1 = \frac{l}{2} \sin(\theta + \varphi)$$

$$y_2 = AC \sin \theta + \frac{l}{2} \sin(\varphi - \theta) = 2l \cos \varphi \sin \theta + \frac{l}{2}(\varphi - \theta)$$

$$y_C = AC \sin \theta = 2l \cos \varphi \sin \theta$$

对坐标的变分：

$$\delta y_1 = \frac{l}{2} \cos(\theta + \varphi) \delta \varphi$$

$$\delta y_2 = \left[-2l \sin \varphi \sin \theta + \frac{l}{2} \cos(\varphi - \theta) \right] \delta \varphi$$

$$\delta y_C = -2l \sin \varphi \sin \theta \delta \varphi$$

由虚位移原理

$$P_1 \delta y_1 + P_1 \delta y_2 + P_2 \delta y_C = 0$$

$$\text{即} \quad \left\{ P_1 \left[\frac{l}{2} \cos(\theta + \varphi) - 2l \sin \varphi \sin \theta + \frac{l}{2} \cos(\varphi - \theta) \right] - 2P_2 l \sin \varphi \sin \theta \right\} \delta \varphi = 0$$

因 $\delta \varphi \neq 0$ ，故有

$$P_1 \left[\frac{l}{2} \cos(\theta + \varphi) - 2l \sin \varphi \sin \theta + \frac{l}{2} \cos(\varphi - \theta) \right] - 2P_2 l \sin \varphi \sin \theta = 0$$

$$\text{即} \quad \frac{P_2}{P_1} = \frac{\cos \theta \cos \varphi - 2 \sin \theta \sin \varphi}{2 \sin \theta \sin \varphi} = \frac{1}{2} \cot \theta \cot \varphi - 1$$

$$\text{故} \quad \tan \varphi = \frac{P_1}{2(P_1 + P_2)} \cot \theta$$

15-10 如图 15-10a 所示机构，在力 F_1 与 F_2 作用下在图示位置平衡，不计各构件自重与各处摩擦， $OD = BD = l_1$ ， $AD = l_2$ 。求 F_1/F_2 的值。

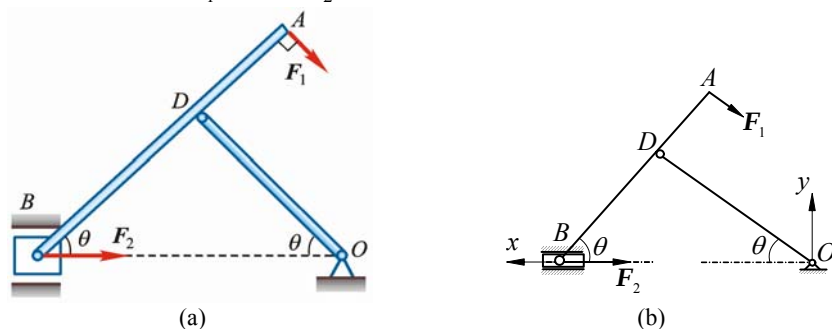


图 15-10

解 如图 15-10b 所示

$$x_B = 2l_1 \cos \theta, \quad \delta x_B = -2l_1 \sin \theta \cdot \delta \theta$$

$$x_A = (l_1 - l_2) \cos \theta, \quad \delta x_A = -(l_1 - l_2) \sin \theta \cdot \delta \theta$$

$$y_A = (l_1 + l_2) \sin \theta, \quad \delta y_A = (l_1 + l_2) \cos \theta \cdot \delta \theta$$

代入虚功方程，得

$$(-F_2) \delta x_B + (-F_1 \sin \theta) \delta x_A + (-F_1 \cos \theta) \delta y_A = 0$$

$$\text{即} \quad 2l_1 F_2 \sin \theta \cdot \delta \theta + F_1 (l_1 - l_2) \sin^2 \theta \cdot \delta \theta - F_1 (l_1 + l_2) \cos^2 \theta \cdot \delta \theta = 0$$

$$\frac{F_1}{F_2} = \frac{2l_1 \sin \theta}{l_1 + l_2 \cos 2\theta}$$

15-11 如图 15-11a 所示均质杆 AB 长为 $2l$ ，1 端靠在光滑的铅直墙壁上，另 1 端放在固定光滑曲面 DE 上。欲使细杆能静止在铅直平面的任意位置，问曲面的曲线 DE 的形式是怎样的？

解 作坐标系 Dxy ，由于杆 AB 只受主动力 P 作用，根据虚位移原理

$$P \delta y_C = 0, \quad P \neq 0, \quad \delta y_C = 0$$

故 $y_C = \text{常量}$

杆在铅直位置时

$$y_{C0} = l, \quad y_C = l$$

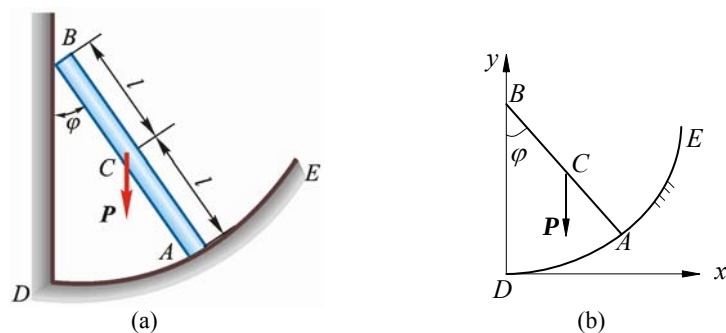


图 15-11

杆在任意位置时

$$y_C = y_A + l \cos \varphi,$$

即 $l = y_A + l \cos \varphi$

$$y_A = l(1 - \cos \varphi)$$

$$x_A = 2l \sin \varphi$$

消去 φ 得 DE 曲线方程

$$\frac{x_A^2}{4l^2} + \frac{(l - y_A)^2}{l^2} = 1$$

由方程知, DE 曲线为中心在 $(0, l)$ 长短半轴分别为 $2l$ 和 l 的椭圆的 1 部分。如坐标系 Dxy 向上平移 l 距离, 则 DE 曲线方程与教材答案一致。

15-12 跨度为 l 的折迭桥由液压油缸 AB 控制铺设, 如图 15-12a 所示。在铰链 C 处有 1 内部机构, 保证两段桥身与铅垂线的夹角均为 θ 。如果两段相同的桥身重量都是 P , 质心 G 位于其中点, 求平衡时液压油缸中的力 F 和角 θ 之间的关系。

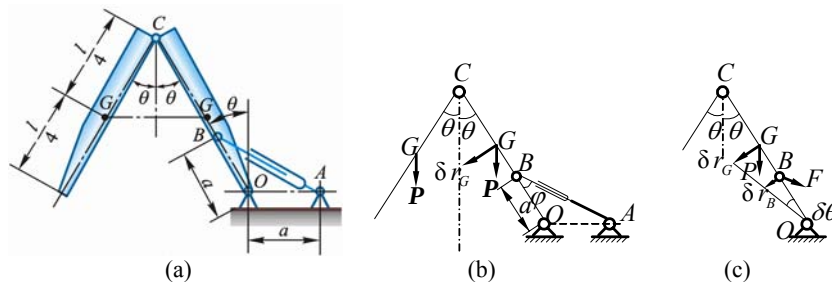


图 15-12

解 如图 15-12b 所示

$$\varphi = \frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}$$

由虚功原理, 得

$$2 \cdot P \delta r_G \sin \theta - F \delta r_B \sin \varphi = 0$$

式中

$$\delta r_B = \frac{a}{l/4} \delta r_G$$

从而有

$$2P \delta r_G \sin \theta - F \cdot \frac{4a}{l} \delta r_G \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}\right) = 0$$

$$F = \frac{lP \sin \theta}{2a \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}\right)} = \frac{\sqrt{2}lP \sin \theta \sqrt{1 + \sin \theta}}{2a \cos \theta}$$

$$F = \frac{\sqrt{2}lP}{2a} \tan \theta \sqrt{1 + \sin \theta}$$

15-13 半径为 R 的滚子放在粗糙水平面上, 连杆 AB 的两端分别与轮缘上的点 A 和滑块 B 处铰接。现在滚子上施加矩为 M 的力偶, 在滑块上施加力 F , 使系统处于图 15-13a 所

示位置处平衡。设力 F 为已知，滚子有足够大的重力 P ，忽略滚动摩擦，不计滑块和各铰链处的摩擦，不计杆 AB 与滑块的重力。求力偶矩 M 以及滚子与地面间的摩擦力 F_s 。

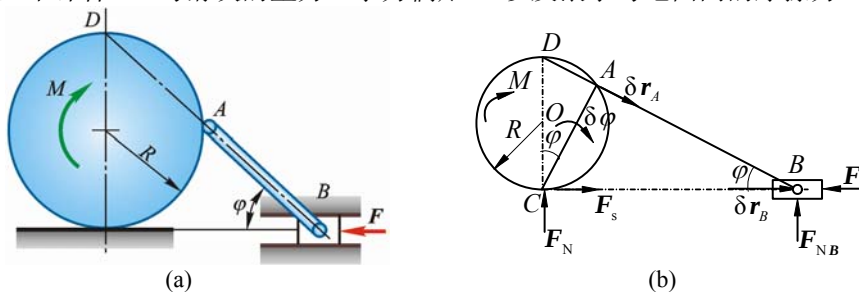


图 15-13

解 由已知可知，滚子只滚不滑，给滚子虚位移 $\delta\varphi$ （如图 15-13b），则

$$\delta r_A = 2R \cos \varphi \delta\varphi \quad (1)$$

由虚位移（虚速度）投影，得

$$\delta r_A = \delta r_B \cos \varphi \quad (2)$$

由式 (1)、(2) 得

$$\delta r_B = 2R \cos \varphi \quad (3)$$

做功力为 M 、 F ，虚功方程为

$$M\delta\varphi - F\delta r_B = 0 \quad (4)$$

式 (3) 代入式 (4)，得

$$M = 2RF$$

再由平衡：

$$\sum F_x = 0, \quad F_s = F$$

15-14 杆系在铅垂面内平衡， $AB = BC = l$ ， $CD = DE$ ，且 AB 、 CE 为水平， CB 为铅垂。均质杆 CE 和刚度为 k_1 的拉压弹簧相连，重力为 P 的均质杆 AB 左端有 1 刚度为 k_2 的螺线弹簧。在杆 BC 上作用有水平的线性分布载荷，其最大载荷集度为 q 。不计杆 BC 的重力，求平衡时水平弹簧的变形量 Δ 和螺线弹簧的扭转角 φ 。

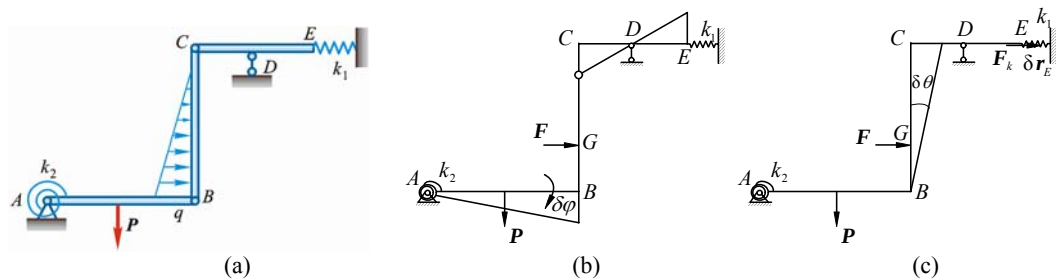


图 15-14

解 此为 2 自由度系统：

(1) 杆 AB 转 $\delta\varphi$ ，杆 BC 不转 ($\delta\theta = 0$)，见图 15-14b，则做功力只有 k_2 弹簧力和 P 。由虚功方程，得

$$-k_2\varphi\delta\varphi + P \cdot \frac{l}{2}\delta\varphi = 0$$

所以弹簧的转角

$$\varphi = \frac{Pl}{2k_2}$$

(2) 杆 AB 不转 ($\delta\varphi = 0$)，杆 BC 转 $\delta\theta$ ，见图 15-14c，则

$$\delta r_E = l\delta\theta$$

代入虚功方程，得

$$\int_0^l (q - \frac{q}{l}x)x\delta\theta dx - k_1\Delta \cdot l\delta\theta = 0$$

$$\left(\frac{q}{2}x^2 - \frac{q}{3l}x^3\right)\bigg|_0^l - k_1\Delta \cdot l = 0$$

$$\frac{q}{2}l^2 - \frac{q}{3l}l^3 - k_1l \cdot \Delta = 0$$

所以水平弹簧变形量

$$\Delta = \frac{ql}{6k_1}$$

15-15 用虚位移原理求图 15-15a 所示桁架中杆 3 的内力。

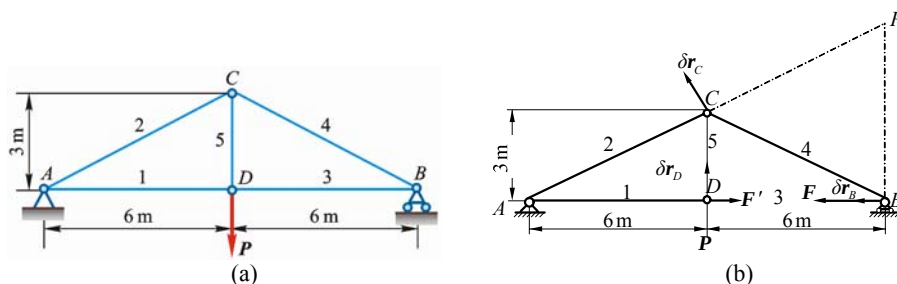


图 15-15

解 将杆 BD 解除代之以力 F 及 F' 。

令点 C 有虚位移 δr_C ，则点 B 必有虚位移 δr_B ，点 D 必有虚位移 δr_D ，如图 15-15b 所示。

由虚位移原理得

$$F\delta r_B + F'\delta r_D \cos 90^\circ - P\delta r_D = 0$$

即

$$\frac{\delta r_D}{\delta r_B} = \frac{F}{P} \quad (1)$$

由图 15-15b 知，三角形 ACD 的转轴在点 A ，故杆 CB 的瞬心在点 E ，故

$$\frac{\delta r_D}{\delta r_C} = \frac{AD}{AC}, \quad \frac{\delta r_C}{\delta r_B} = \frac{EC}{EB}$$

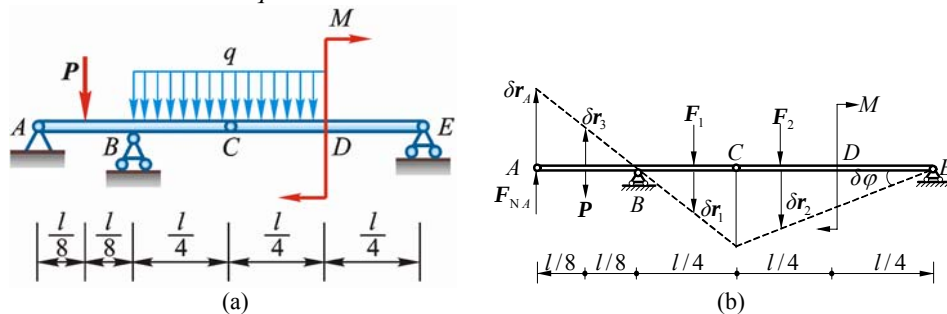
所以

$$\frac{\delta r_D}{\delta r_B} = \frac{\delta r_D}{\delta r_C} \cdot \frac{\delta r_C}{\delta r_B} = \frac{6}{\sqrt{6^2 + 3^2}} \cdot \frac{\sqrt{6^2 + 3^2}}{6} = 1 \quad (2)$$

由式 (1)，(2) 得

$$F = F' = P \text{ (拉)}$$

15-16 组合梁由铰链 C 连接 AC 和 CE 而成，载荷分布如图 15-16a 所示。已知跨度 $l = 8 \text{ m}$ ， $P = 4900 \text{ N}$ ，均布力 $q = 2450 \text{ N/m}$ ，力偶矩 $M = 4900 \text{ N} \cdot \text{m}$ 。求支座约束力。



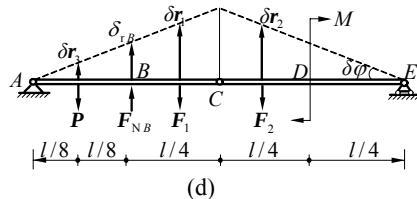
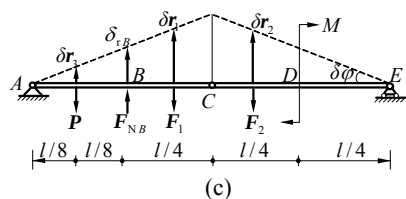


图 15-16

解 (1) 把均布载荷化作集中力

$$F_1 = F_2 = \frac{ql}{4}$$

解除支座 A 的垂直方向约束，以力 F_{NA} 代之。令点 A 有向上的虚位移 δr_A ，则各力作用点处有相应的虚位移如图 15-16b 所示。由几何关系

$$\delta r_1 = \delta r_3 = \frac{1}{2} \delta r_A, \quad \delta r_2 = \frac{3}{4} \delta r_A, \quad \frac{l}{2} \delta \varphi = \delta r_A, \quad \delta \varphi = \frac{2}{l} \delta r_A$$

由虚位移原理：

$$F_{NA} \delta r_A - P \delta r_3 + F_1 \delta r_1 + F_2 \delta r_2 - M \delta \varphi = 0$$

即

$$(F_{NA} - \frac{P}{2} + \frac{F_1}{2} + \frac{3}{4} F_2 - \frac{2M}{l}) \delta r_A = 0$$

$$F_{NA} - \frac{P}{2} + \frac{ql}{4} \cdot \frac{1}{2} + \frac{ql}{4} \cdot \frac{3}{4} - \frac{2M}{l} = 0$$

把数据代入，解得

$$F_{NA} = -2450 \text{ N} \quad (\text{负号表示与原设反向})$$

(2) 解除约束 B，代之以力 F_{NB} ，且虚位移如图 15-16c 所示。由几何关系

$$\delta r_1 = \frac{3}{2} \delta r_B, \quad \delta r_2 = \frac{3}{2} \delta r_B, \quad \delta r_3 = \frac{1}{2} \delta r_B, \quad \delta \varphi = \frac{4}{l} \delta r_B$$

由虚位移原理：

$$F_{NB} \delta r_B - P \delta r_3 - F_1 \delta r_1 - F_2 \delta r_2 + M \delta \varphi = 0$$

把以上各式代入上式得

$$F_{NB} - \frac{P}{2} - \frac{ql}{4} \cdot \frac{3}{2} - \frac{ql}{4} \cdot \frac{3}{2} + M \cdot \frac{4}{l} = 0$$

解得

$$F_{NB} = 14700 \text{ N}$$

(3) 解除约束 E，代之以力 F_{NE} ，且虚位移如图 d。由虚位移原理：

$$F_{NE} \delta r_E - F_2 \delta r_2 - M \delta \varphi = 0$$

而

$$\delta r_2 = \frac{1}{4} \delta r_E, \quad \delta \varphi = \frac{2}{l} \delta r_E$$

代入上式得

$$F_{NE} - \frac{ql}{4} \cdot \frac{1}{4} - \frac{2M}{l} = 0$$

解得

$$F_{NE} = 2450 \text{ N}$$