简谐振子的相空间

前面我们知道，当做点变换

$$q_i \quad \Rightarrow \quad Q_i = Q_i\left(q,t\right) \tag{1}$$

时， Lagrange 方程（的形式）是不变的

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial L}{\partial Q_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{Q}_i} = 0 \tag{2}$$

这里，变换前后的 Lagrange 函数在数值上是相等的，只是利用(1)的反变换把变量q_i代入而已。不仅如此， Hamilton 方程（的形式）在点变换(1)下也是不变的

$$\left.\begin{aligned} \dot{q}_i &= \frac{\partial H}{\partial p_i} \\ \dot{p}_i &= -\frac{\partial H}{\partial q_i} \end{aligned}\right\} \quad \Rightarrow \quad \left\{\begin{aligned} \dot{Q}_i &= \frac{\partial H^*}{\partial P_i} \\ \dot{P}_i &= -\frac{\partial H^*}{\partial Q_i} \end{aligned}\right. \tag{3}$$

不同的是，采用新的广义坐标时，广义动量由

$$P_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{Q}_i} = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\frac{\partial \dot{q}_k}{\partial \dot{Q}_i} = \frac{\partial q_k}{\partial Q_i}p_k = P_i\left(p,Q,t\right) \tag{4}$$

来定义，因此，相应的新 Hamilton 函数也变为了

$$H^*\left(Q,P,t\right) = \dot{Q}_i P_i - L\left(Q,\dot{Q},t\right) \tag{5}$$

除非坐标变换方程(1)不显含时间，否则它是不同于原来的 Hamilton 函数 $H(q,p,t) = \dot{q}_i p_i - L$ 的（想想为什么？）。

在 Hamilton 力学中点变换只是将$2s$维相空间中的q_i部分变为Q_i，而动量部分只不过是与其相关的变化，除了$q \to Q$之外， $p \to P$不能随意进行。否则就不能保持正则方程不变（也不能保持 Poisson 括号不变），变换后的Q,P代表什么样的物理意义就完全说不清楚了。

那么保持正则方程的形式不变是否就意味着不能考虑比点变换稍稍自由的

变换呢？换句话说，q 和 p 混合在一起的变换是否也有可能保持方程的正则形式呢？在展开一般的讨论之前，我们先来看看具体的例子。为此，讨论一维谐振子比较合适。一维谐振子的 Hamilton 函数由

$$H=\frac{1}{2m}\left(p_x^2+m^2\omega^2x^2\right) \tag{6}$$

给出，在相空间中，$H=E$ 形成一个椭圆。由于椭圆难于讨论，将其变为圆似乎更好一些。尽管如此，单单设 $m\omega x=q$ 是不行的，p_x 也必须作与 $x\to q$ 相对应的变换。因此，首先令

$$q=\alpha x \tag{7}$$

广义动量相应的变为

$$p=\frac{\partial x}{\partial q}p_x=\frac{p_x}{\alpha} \tag{8}$$

因此，Hamilton 函数用 (q,p) 表示就是

$$H=\frac{\alpha^2}{2m}p^2+\frac{m\omega^2}{2\alpha^2}q^2 \tag{9}$$

这样，为了在 qp 平面（新的相空间）内形成圆，就必须

$$\frac{\alpha^2}{2m}=\frac{m\omega^2}{2\alpha^2} \tag{10}$$

即 $\alpha=\sqrt{m\omega}$。也就是说，由 (x,p_x) 向 (q,p) 进行

$$q=\sqrt{m\omega}x,\quad p=\sqrt{\frac{m}{\omega}}\dot{x}=\frac{1}{\sqrt{m\omega}}p_x \tag{11}$$

的变换就行。变换得到的 Hamilton 函数为

$$H=\frac{\omega}{2}\left(p^2+q^2\right) \tag{12}$$

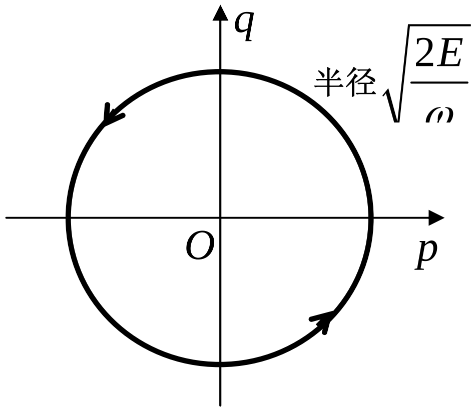
正则方程为

$$\dot{q}=\frac{\partial H}{\partial p}=\omega p,\quad \dot{p}_i=-\frac{\partial H}{\partial q_i}=-\omega q \tag{13}$$

若根据$q=\sqrt{m\omega}x, p=p_x\big/\sqrt{m\omega}$再回到$(x, p_x)$的话，有

$$\dot{x}=\frac{1}{m}p_x, \quad \dot{p}_x=-m\omega^2 x \tag{14}$$

所以，确实与原来的方程相同。



这样一来，运动变成相空间中的圆了，若是能量为E的运动，则其半径为$\sqrt{2E/\omega}$。接着，让我们象图那样取p轴和q轴，于是运动变成了逆时针旋转，在下面的讨论中会比较方便一些。

由$\dot{q}=\omega p$，$\dot{p}_i=-\omega q$马上可知，运动是角速度为ω的匀速圆周运动。如果这样的话，在qp平面内取平面极坐标又将如何呢？为此，我们假定

$$P=\sqrt{p^2+q^2}, \quad Q=\arctan\frac{q}{p} \tag{15}$$

试试看，这样一来，能量可表示为

$$H^*=\frac{\omega}{2}P^2 \tag{16}$$

但由此做成

$$\frac{\partial H^*}{\partial P}=\omega P, \quad -\frac{\partial H^*}{\partial Q}=0 \tag{17}$$

令它们分别等于$\dot{Q},\dot{P}$时，变成了

$$\dot{Q}=\omega P, \quad \dot{P}=0 \tag{18}$$

第二个关系是正确的（没有“径向”运动），但是第一个等式则是错误的。我们知道正确的结论应当是$\dot{Q}=\omega$。实际上，根据上面的定义能得到

$$\dot{Q}=\frac{\dot{q}p-q\dot{p}}{p^2+q^2} \tag{19}$$

所以将上述的结果$\dot{q}=\omega p$，$\dot{p}_i=-\omega q$代入这里，确实有$\dot{Q}=\omega$。因此，即

使象上面这样选择Q是可以的，但象对它那样随意地取共轭动量P则是错误的。或者说，随意地选取P将使得Q和P不再满足正则方程。

这里就需要我们做出选择：要么满足于仅仅讨论点变换，这种变换是保持方程的正则形式不变的；或者讨论相空间中的最一般的变换，而这通常就要求我们找出新变量满足的新形式的方程，例如在我们的例子中，正确的方程显然应该是$\dot{Q}=\partial^2 H/\partial P^2$以及$\dot{P}=\partial H/\partial Q$，它不再是正则方程。当然，我们还可以有第三个更好的选择，也就是说，我们可以讨论比点变换更加自由、同时还能保持方程的正则形式的相空间中的变量变换，而这就要求广义坐标和广义动量的变换必须相互“匹配”。

那么，让我们以$Q=\arctan(q/p)$和$\dot{Q}=\omega$为前提，来看一下怎样决定P和 Hamilton 函数以使得正则方程成立。正则方程的第一式为

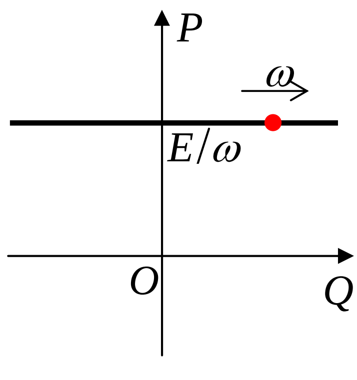
$$\dot{Q}=\frac{\partial H^*}{\partial P}=\omega \tag{20}$$

所以只要设$H^*=\omega P$即可。第二式为

$$\dot{P}=-\frac{\partial H^*}{\partial Q} \tag{21}$$

所以代入$H^*=\omega P$时，$\dot{P}=0$，因此P成为等于恒量，与能量守恒定理不矛盾。那么我们弄清楚了

$$Q=\arctan\frac{q}{p},\quad P=\frac{1}{2}\left(p^2+q^2\right) \tag{22}$$
$$H^*=\omega P$$



是新的变量和用它的 Hamilton 函数。

在这个Q和P做成的相空间中，振子的运动用平行于Q轴的匀速运动来表示。能量不同时，离Q轴的距离改变。相空间内速度ω不是能量的函数，而是共通的。将Q、P用原来的x、p_x写的话，成为

$$Q=\arctan\frac{m\omega x}{p_x},\qquad P=\frac{1}{2m\omega}\left(p_x^2+m^2\omega^2x^2\right) \tag{23}$$

这样，位置和动量混在一起时，那个是位置，那个是动量区别已经变得没有意义了。

随便提一句，如果我们以$P=\sqrt{p^2+q^2}$和$\dot{P}=0$为前提，来决定Q以使其满足正则方程。由于此时

$$H^*=\frac{\omega}{2}P^2 \tag{24}$$

因此

$$\dot{Q}=\frac{\partial H^*}{\partial P}=\omega P \tag{25}$$

显然，新的广义坐标就该取为

$$Q=\sqrt{p^2+q^2}\arctan\frac{q}{p} \tag{26}$$

让我们再稍微考虑一下给出的新广义动量P的意义。一维谐振子的运动用图的一个椭圆来表示，我们来求出这个椭圆所包围的面积。将运动的一个周期中的积分用$\oint$ 来表示时，它可以用

$$\oint p_x dx \tag{25}$$

来计算。我们知道它就是

$$\oint p_x dx = \pi \cdot \sqrt{2mE} \cdot \sqrt{2E/m\omega^2} = 2\pi \frac{E}{\omega} \tag{26}$$

将表示周期性运动的广义坐标q_i和相应的广义动量p_i构成的

$$J_i = \frac{1}{2\pi} \oint p_i dq_i \tag{27}$$

这个量称为作用变量。这里对i不求和。

现在的情况

$$J_x = \frac{1}{2\pi} \oint p_x dx = \frac{E}{\omega} \tag{28}$$

是这个谐振子的作用变量。从(24)第二式可以看出，我们的P只不过是这个作用变量而已！

无论q_i是什么样的量，作用变量J_i必然具有能量乘时间的量纲。这与作用量以及角动量有相同的量纲。这样，将其视为广义动量时，与其对应的广义坐标就具有角度的量纲。因此，将这样的广义坐标叫做角变量，多半用ω_i表示。的确如此，由定义的Q是连接图中动点与原点的直线和p轴形成的角度。

作用变量、角变量也适用于更一般的周期运动，应用于天文学中讨论天体运动的周期等方面，上世纪初刚开始建立量子理论时，与导入量子化条件相关联，对其进行了详细的研究。这超出了我想要讲课的范围，我们仅仅停留在介绍名称的程度。