最小作用原理

前面我们看到对于自由的粒子，如果它在t_1时刻位于某处，在t_2时刻位于另一处，那么粒子实际走过的路线是所有可以想象得到的路线当中使得作用量最小的那条路线[图 1*a*]。不过，若粒子受到某种限制以至于它不能在空间中自由运动（比如限制在某一个曲面上粒子的运动，这里的讨论仅仅限于完整约束），你知道，粒子从这里到那里的运动路线必然是曲面上的某条曲线，这条路线一般来说与不受限制时（比如把曲面去掉）粒子运动的那条路线是不同的，也就是说，真实路经并不是所有从这里到那里的路线当中作用量最小的——不受限制情形下粒子所经路线的作用量显然要来得更小。但是，如果你尝试这样一个运动：假设由这里到达那里是沿着曲面这样进行的[图 1*b*]，并且在同一段时间内到达目的地，你会发现这条路线（或者我们所想出的位于曲面内的从这里到那里的任何其他路线）的作用量比起实际运动来要大。换句话说，对于受约束的体系，我们也可以将其动力学规律纳入到最小作用原理的框架内，即真实运动是沿着满足约束的所有可能路线当中作用量取最小的那条路线。

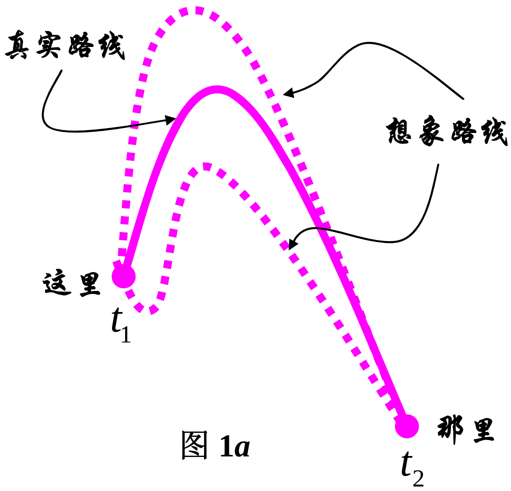


图 **1*a***

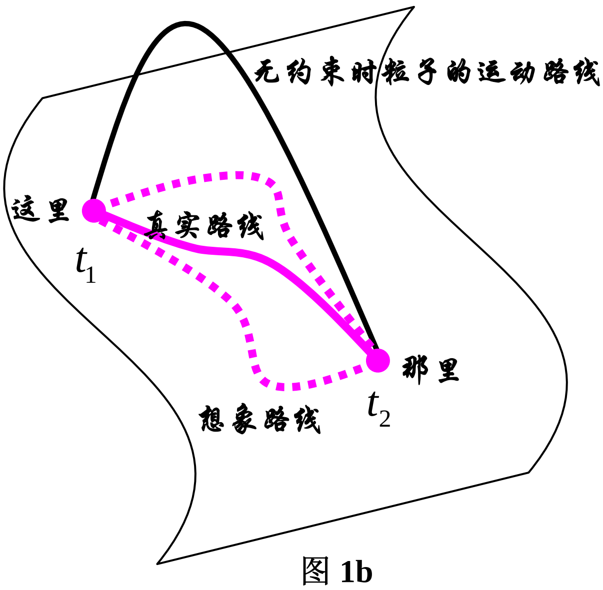


图 **1b**

举一个几何上的例子。在三维空间中给定的任意两点，可以有无穷多条曲线连接它们，而所有这些曲线中，有一条曲线的长度是最短的，我们把它称为直线，并将这个最短的距离称为这两点之间的距离[图 2*a*]。现在，想象一个二维的生活在球面上的扁平生物，在它的世界里，也可以作出无穷多条连接任意两个给定点的曲线，而它也就可以比较所有这些曲线的长度，并把那条具有最短长度的曲线称为“直线”，而这个最短长度则称为这两点之间的“距离”[图 2*b*]。当然在我们的世界里看，这条线并非直线，而是球面上连接它们的那段大圆弧，我们会说，球面上的那个生物之所以会认为这段大圆弧是所有曲线中长度最短的，是因为它或者说它所作的测量是“限制”在球面上的缘故。但是，不得不承认，这段大圆弧确实就是球面上连接这两点的曲线当中长度最短的，把它称为这两点在球面上的距离也是很合理的。

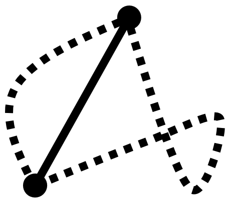


图 2***a***

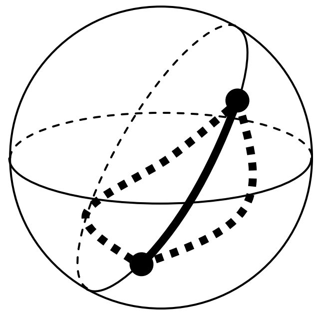


图 2***b***

继续前面的讨论。当我们想要将约束问题纳入到最小作用原理时，首先就要回答这样一个问题：这时候的作用量或者说 Lagrange 函数究竟指的是什么？你可能会说，它就是动能减去势能，动能当然就是体系的总的动能，但是，势能呢？对自由运动的体系，势能当然就是总的势能，它应包含每一个粒子受到的每一个力的贡献，而现在我们的情形却是，譬如一个在球面上运动的粒子，粒子除了受到象重力这样的主动力的作用之外，它还会受到来自球面所施加的约束力的作用（否则粒子就没有理由必须在球面上运动了），而约束力本身的形式在我们还没有解决问题之前是不可能知道的，那么有关约束力的效应又该在 Lagrange 函数中如何得到体现呢？

即便解决了这个问题，因此你就可以讲完整约束体系真实的运动其作用量是最小的，但是当你想要由这个积分的、关于体系整体运动的原理或者假设得到体

系运动的微分动力学方程时，还会遇到一个实际的困难。以单个粒子为例，当我们做变分时最后会得到将每一个δx_i乘某个东西再相加后的积分，它是要等于零的。对于自由粒子，由于三个坐标x_i是独立的，你可仅仅在x_1方向上移动δx_1，而申明它的系数应等于零，这样就得到一个方程，然后又在x_2方向上移动而得到另一个方程，又在x_3方向上得到第三个。也就是说，不同的δx_i是相互独立的，因此你将会得到三个方程。但是如果粒子被限制在譬如某个球面上运动，由于真实运动和尝试路线都是要求满足约束的，即

$$f(\bar{r},t)=0 \quad \text{and} \quad f(\bar{r}+\delta\bar{r},t)=0 \tag{1}$$

这就意味着

$$\delta f = f\left(\bar{r}+\delta\bar{r},t\right)-f\left(\bar{r}\right)=\frac{\partial f}{\partial \bar{r}}\cdot\delta\bar{r}=0 \tag{2}$$

也就是说，由于三个坐标不是独立的，各个δx_i之间也不再是相互独立的了，而是要满足上面的关系。因此，当你在x_1方向上移动δx_1时，一般来说，粒子在x_2方向和/或x_3方向上也将同时移动。数学上，把约束方程求全微分并把“d”换为“δ”（记得$\delta t=0$）就是虚位移满足的方程。几何上，矢量

$$\partial f/\partial\bar{r} \tag{3}$$

的方向沿着t时刻该曲面在点$\bar{r}$处的法向方向（你可以理解为在做虚位移时，约束是被冻结了）。也就是说，虚位移只能在给定时刻曲面的切向上取值（这不过是“满足约束的路线” 的另一种表述）。对于多粒子体系，你可以想象一个$3n$维的欧几里德空间，那么$f\left(\bar{r},t\right)=0$ 就是这个空间中的一个“超曲面”，而条件(2)就是说虚位移$\left(\delta\bar{r}_1,\delta\bar{r}_2,\cdots,\delta\bar{r}_n\right)$（$3n$维空间的一个矢量）是与这个曲面的法向$\left(\partial f/\partial\bar{r}_1,\partial f/\partial\bar{r}_2,\cdots,\partial f/\partial\bar{r}_n\right)$垂直的。

如果各个δx_i不是独立的，那么由$\left(\cdots\right)_i\delta x_i$对时间积分等于零就得不到每一个$\delta x_i$前的系数必然等于零的结论，因为你不再能让譬如$\delta x_2$和$\delta x_3$等于零，

而只让 x_1 变化。也就是说，我们将得不到运动的微分方程。

实际上，这两个问题在某种程度上是同一问题的两个方面，而有关这两个问题回答正是我们前面引入位形空间以及广义坐标的原因。广义坐标是什么？它是为了描述体系位形而引入的任意独立变量，数学上独立意味着它们之间不再满足什么关系，而物理上这就相当于说，体系在位形空间的运动是自由的，因此当你在位形空间描述体系运动时，跟约束有关的任何信息都不可能出现在相关的物理定律中了。对于完整约束体系，你能找到可以用来描述体系位形的独立广义坐标这一事实本身就已经使得这些信息自动消除了（或者说是丢失掉了）。因此，Lagrange 函数是什么呢？它就是动能减去势能：动能是体系的总的动能，而势能则仅由主动力所贡献。对于微分约束，你无法将不独立的坐标消去，因此，即便我们仍然可以假设微分约束体系的运动也是满足最小作用原理的，但是如果你想要由此得到体系运动的微分动力学方程却绝不是一件容易的事情，实际上，除了一些特殊的微分约束（线性微分约束），至今人们还没有找到解决这个问题的一个一般性的办法。

总结一下前面的内容。首先完整约束体系的 Lagrange 函数为

$$\begin{aligned} L &= L\left(\vec{r},\dot{\vec{r}},t\right) = L\left(\vec{r}_1,\cdots,\vec{r}_s,\dot{\vec{r}}_1,\cdots,\dot{\vec{r}}_s,t\right) \\ &= T-U = \sum_{a=1}^{n}\frac{1}{2}m_a\dot{\vec{r}}_a^{\,2} - U\left(\vec{r}_1,\vec{r}_2,\cdots,\vec{r}_n,t\right) \end{aligned} \tag{4}$$

这里，T 是体系总的动能，U 是与主动力对应的势能。当然我们也可以利用变换方程将 Lagrange 函数用 s 个独立的广义坐标和广义速度表示出来

$$L = T-U = L\left(q,\dot{q},t\right) = L\left(\vec{r}\left(q,t\right),\dot{\vec{r}}\left(q,\dot{q},t\right),t\right) \tag{5}$$

现在完整约束体系的最小作用原理就可以表述为：如果体系在 t_1 和 t_2 时刻的位置分别为 $q^{(1)}$ 和 $q^{(2)}$，那么系统真实的运动是沿着使得下面的积分（作用量）

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L\left(q,\dot{q},t\right)dt \tag{6}$$

取最小值，或者说沿着满足

$$\delta S = \delta\int_{t_1}^{t_2} L\left(q,\dot{q},t\right)dt = 0 \tag{7}$$

的路径。当然，我们还应该要求所有路径都有相同的端点，即

$$\delta\vec{r}_a\left(t_1\right)=\delta\vec{r}_a\left(t_2\right)=0,\qquad\left(a=1,2,\cdots,n\right)\tag{8}$$

这等价于要求

$$\delta q_i\left(t_1\right)=\delta q_i\left(t_2\right)=0,\qquad\left(i=1,2,\cdots,s\right)\tag{9}$$

利用变分的法则，作用量的变分就是

$$\int_{t_1}^{t_2}\left(\frac{\partial L}{\partial q_i}\delta q_i+\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_i}\delta\dot{q}_i\right)dt=0\tag{10}$$

由于$\delta\dot{q}_i=d\left(\delta q_i\right)/dt$，对第二项利用分部积分得到

$$\delta S=\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_i}\delta q_i\left(t\right)\Big|_{t_1}^{t_2}+\int_{t_1}^{t_2}\left(\frac{\partial L}{\partial q_i}-\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_i}\right)\delta q_i dt=0\tag{11}$$

条件表明完全积出的这一项（端点项）等于零。因此，我们得到了一个积分，它对于任意的δq_i都等于零，而且又由于这s个函数的变化是互不依赖的，因此你可以令譬如说q_1任意变化，而其他的q_i则不变化（即δq_i等于零），因此就得到了一个方程，对于每一个广义坐标就有一个方程，所以我们就得到了s个方程

$$\frac{\partial L}{\partial q_i}-\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_i}=0,\qquad\left(i=1,\cdots,s\right)\tag{12}$$

这就是我们想要的微分方程，称为 Lagrange 方程。如果知道了一个体系的 Lagrange 函数，这些方程就告诉了体系状态将会如何变化，即告诉了我们加速度、速度和坐标之间的关系。

数学上，它是s个未知函数$q_i\left(t\right)$的s个二阶微分方程构成的方程组，其一般解包含$2s$个任意常数。为了确定这些常数，从而唯一地确定系统的运动，我们还需要知道初始条件，初始条件告诉我们在某个给定时刻系统的状态，例如所有广义坐标和广义速度在初始时刻的数值。

到目前为止，我们还有一个非常重要的问题需要回答，那就是最小作用原理或由它导出的 Lagrange 方程是否正确，也就是它是否与实验相符合。这个问题又可归结为 Lagrange 方程是否与 Newton 定律是否等价。当然，我们可以把不受

约束的体系（自由体系）看作是完整约束体系的一个特例，对于这一情形我们在第一节已经证明了 Lagrange 方程与 Newton 定律的等价性。那么，对于一般的完整约束体系呢？下面我们就来证明它们的等价性。

由于 Newton 方程在迪卡尔坐标系中具有最简单的形式，因此，为了看出 Lagrange 方程和 Newton 方程之间的联系，利用变换方程我们将 Lagrange 函数写为

$$L=L\left(\vec{r},\dot{\vec{r}},t\right)=L\left(\vec{r}\left(q,t\right),\dot{\vec{r}}\left(q,\dot{q},t\right),t\right)=L\left(q,\dot{q},t\right) \tag{13}$$

并把 Lagrange 方程中的各项重新表示为

$$\frac{\partial L}{\partial q_i}=\frac{\partial L}{\partial \vec{r}_a}\cdot\frac{\partial \vec{r}_a}{\partial q_i}+\frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}_a}\cdot\frac{\partial \dot{\vec{r}}_a}{\partial q_i} \tag{14}$$

以及

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}=\frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}_a}\cdot\frac{\partial \dot{\vec{r}}_a}{\partial \dot{q}_i}=\frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}_a}\cdot\frac{\partial \vec{r}_a}{\partial q_i} \tag{15}$$

最后一个等号用到了上一节我们得到的关系 $\partial\dot{\vec{r}}_a/\partial\dot{q}_i=\partial\vec{r}_a/\partial q_i$。把方程(15)两边对时间求微商则得到

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}&=\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}_a}\right)\cdot\frac{\partial \vec{r}_a}{\partial q_i}+\frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}_a}\cdot\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial \vec{r}_a}{\partial q_i}\right)\\&=\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}_a}\right)\cdot\frac{\partial \vec{r}_a}{\partial q_i}+\frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}_a}\cdot\frac{\partial \dot{\vec{r}}_a}{\partial q_i}\end{aligned} \tag{16}$$

这里用到上一节我们得到的另一个关系 $\partial\dot{\vec{r}}_a/\partial q_i=d\left(\partial\vec{r}_a/\partial q_i\right)/dt$。这样我们就可以将 Lagrange 方程重新写为

$$\left(\frac{\partial L}{\partial \vec{r}_a}-\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}_a}\right)\cdot\frac{\partial \vec{r}_a}{\partial q_i}=0,\qquad\left(i=1,2,\cdots,s\right) \tag{17}$$

由于 $\vec{F}_a=\partial L/\partial\vec{r}_a=-\partial U/\partial\vec{r}_a$ 以及 $\vec{p}_a=\partial L/\partial\dot{\vec{r}}_a=m_a\dot{\vec{r}}_a$（不对 a 求和），你发现，方程(17)或者说 Lagrange 方程(12) 正是 Newton 方程

$$\vec{F}_a-\frac{d\vec{p}_a}{dt}=0,\qquad\left(a=1,2,\cdots,n\right) \tag{18}$$

——看作一个 $3n$ 维的矢量方程——分别在由 m 个约束方程所确定的 $s=3n-m$ 维曲面上的 s 个独立变量方向上的“投影”，或者说是在位形空间上的“投影”。对于限制在球面上的一个粒子，那就是 Newton 方程分别在方向 $\hat{\theta}$ 和 $\hat{\varphi}$ 上的投影，你会得到两个方程。这样，我们就证明了所要的结论：Lagrange 方程或者说完整约束体系的最小作用原理是真确的。

但是，这里有一个小小的问题：由于 U 仅仅是所有主动力贡献的势能，因此，$\vec{F}_a=-\partial U/\partial\vec{r}_a$ 也只是作用在粒子 a 上的主动力，而不包含约束力。也就是说，方程(18)并不是"真正"的 Newton 方程，真正的 Newton 方程该是

$$\vec{F}_a+\vec{N}_a-\frac{d\vec{p}_a}{dt}=0 \tag{19}$$

这里我们用 $\vec{N}_a$ 表示作用在粒子 a 上的约束力。而由这些方程我们只能得到：

$$\left(\vec{F}_a+\vec{N}_a-\frac{d\vec{p}_a}{dt}\right)\cdot\frac{\partial\vec{r}_a}{\partial q_i}=0,\qquad (i=1,2,\cdots,s) \tag{20}$$

而不是 Lagrange 方程，或者说方程(17)。

换句话说，只有当

$$\vec{N}_a\cdot\frac{\partial\vec{r}_a}{\partial q_i}=0,\qquad (i=1,2,\cdots,s) \tag{21}$$

时，最小作用原理与 Newton 定律才是等价的。这正是我要讲的！我们把满足这个条件的约束称为理想约束。

理想约束在大多参考书上是通过虚功来定义的，所谓虚功是指力与虚位移的乘积，而理想约束通常则被定义为体系所受约束力作的虚功之和等于零

$$\delta W=\vec{N}_a\cdot\delta\vec{r}_a=0 \tag{22}$$

的约束。

对于完整约束体系，上式中的虚位移可以用独立广义坐标的变分表示，因此就有

$$\delta W=\vec{N}_a\cdot\delta\vec{r}_a=\vec{N}_a\cdot\frac{\partial\vec{r}_a}{\partial q_i}\delta q_i=Q_i'\delta q_i=0 \tag{23}$$

其中

$$Q_i' = \vec{N}_a \cdot \frac{\partial \vec{r}_a}{\partial q_i} \tag{24}$$

称为广义约束力。由于对于任意的δq_i，虚功都等于零，而不同的q_i（从而不同的δq_i）之间是相互独立的，因此，对于完整约束体系而言，理想约束条件——约束力的虚功为零——也可以等价地说成是广义约束力等于零，即$Q_i' = 0$。这正是我们前面得到的条件(21)，也就是导出这些方程的最小作用原理成立的条件。

当然，这就又提出了一个问题：理想约束条件在什么情况下才是成立的？或者说，就我们目前感兴趣的问题来讲，对于怎样的完整约束问题我们才可以使用方程来求解其运动？回答是，对于完整约束体系，你可以完全不考虑理想约束条件，因为此时它是必然满足的。想象一下粒子限制在某个曲面譬如说球面上的运动，在任何一个时刻，主动力在与曲面垂直方向的分力（或者说使得粒子有脱离曲面趋势的主动力分量）必然为约束力所平衡，这就说明了约束力必然是与球面垂直的，也就是说约束力在球面上的投影为零，这一点对于膨胀的球面也是成立的，这种情况下在任一时刻约束力必然是与这一时刻的球面垂直的，而对于一般的完整约束体系，那就是说约束力是与位形空间垂直的。因此，约束力在位形空间的投影——即广义约束力——是等于零的，这样我就证明了最小作用原理是等价于 Newton 定律的，你可以利用最小作用原理或者由它导出的 Lagrange 方程去分析和求解任何完整约束体系的运动。与 Newton 方法相比较，它的好处在于体系受到的约束越多，广义坐标越少，从而需要求解方程的数目也就越少！

这里我想就广义力作一些说明。前面我们定义了广义约束力，同样的，你也可以把

$$Q_i = \vec{F}_a \cdot \frac{\partial \vec{r}_a}{\partial q_i} = -\frac{\partial U}{\partial \vec{r}_a} \cdot \frac{\partial \vec{r}_a}{\partial q_i} = -\frac{\partial U}{\partial q_i} \tag{25}$$

称为广义主动力。特别值得指出的是：当提到广义力时，它就暗含了要对所有力的贡献进行求和，这是一个有关体系受到的所有力的概念，而不会仅仅涉及体系中某个粒子受到的某个力。广义力的概念来源于力的类比：力乘以坐标的变化等

于功；广义力乘以广义坐标的变化等于功：

$$功 = \vec{F}_a \cdot d\vec{r}_a = Q_i dq_i \tag{26}$$

如果广义坐标具有长度量纲，那么广义力就是通常力（沿着该坐标增加方向）的分量，如果广义坐标具有角度量纲，那么广义力就是通常的力矩（沿该坐标增加方向，也就是按照右手螺旋确定的方向）的分量。

举个简单的例子可能会帮助你了解广义力的含义。考虑重力场中粒子的运动。当粒子移动一个小的位移 $d\vec{r}$ 时，重力做得功是 $m\vec{g}\cdot d\vec{r}$ 。在笛卡尔坐标系中，

$$功 = -mg\hat{y}\cdot\left(\hat{x}dx + \hat{y}dy\right) = 0dx - mgdy \tag{27}$$

dx 和 dy 前面的系数正是坐标 x 和 y 对应的广义力

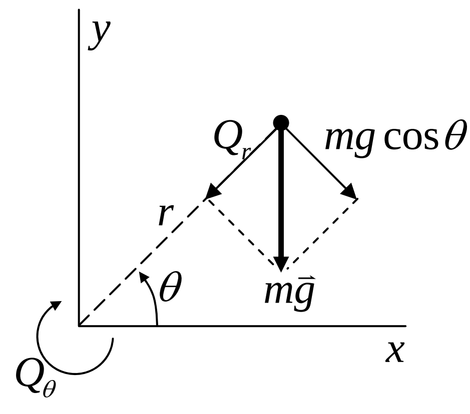
$$\begin{aligned} Q_x &= m\vec{g}\cdot\frac{\partial\vec{r}}{\partial x} = -mg\hat{y}\cdot\hat{x} = 0 \\ Q_y &= m\vec{g}\cdot\frac{\partial\vec{r}}{\partial y} = -mg\hat{y}\cdot\hat{y} = -mg \end{aligned} \tag{28}$$

其中 Q_x 就是重力在水平方向的分量（当然是等于零的），而 Q_y 则是重力在竖直方向上的分量（符号表示它与坐标 y 增加的方向 $\hat{y}$ 相反，即是竖直向下的）。或者你把重力势能用笛卡尔坐标表示就是

$$U = -m\vec{g}\cdot\vec{r} = mgy \tag{29}$$

因此，同样地得到了

$$\begin{aligned} Q_x &= -\frac{\partial U}{\partial x} = 0 \\ Q_y &= -\frac{\partial U}{\partial y} = -mg \end{aligned} \tag{30}$$



在极坐标系中，功表示为

$$\begin{aligned} 功 &= -mgdy = -mgd\left(r\sin\theta\right) \\ &= -mg\sin\theta dr - mgr\cos\theta d\theta \end{aligned} \tag{31}$$

dr 和 $d\theta$ 前面的系数正是坐标 r 和 θ 对应的广义力

$$Q_r = m\vec{g}\cdot\frac{\partial\vec{r}}{\partial r} = -mg\sin\theta,\quad Q_\theta = m\vec{g}\cdot\frac{\partial\vec{r}}{\partial\theta} = -mg\cos\theta \tag{32}$$

或者你把重力势能用极坐标表示就是

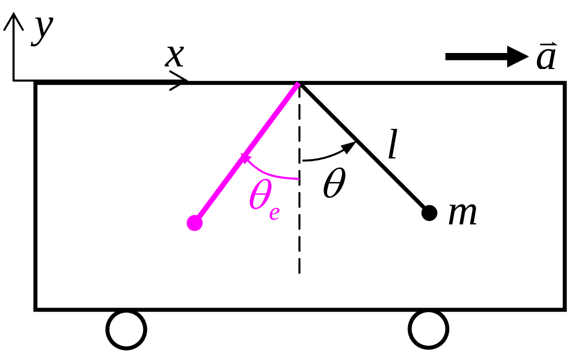
$$U = mgr\sin\theta \tag{33}$$

因此

$$Q_r = -\frac{\partial U}{\partial r} = -mg\sin\theta,\quad Q_\theta = -\frac{\partial U}{\partial\theta} = -mgr\cos\theta \tag{34}$$

Q_r 正是重力在 $\hat{r}$ 方向上的分量，负号表示它与变量 r 增加的方向相反，即是指向原点的；而 Q_θ 在是重力相对于原点的角动量，大小等于重力在 $\hat{\theta}$ 方向上的分量 $mg\cos\theta$ 乘以力臂 r，方向则与变量 θ 增加时按照右手螺旋确定的方向相反，即垂直于黑板并指向里面。

看一个具体的例子。考虑一个系在长为 l 的细绳一端、质量为 m 的物体构成的单摆。摆的悬挂点固定在以恒定加速度 a 运动的小车顶部。



在笛卡尔坐标系中，体系的动能和势能具有最简单的形式

$$T = \frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right)$$
$$U = mgy \tag{35}$$

这里我假设当 $y = 0$ 时势能为零。为了利用 Lagrange 方程求解单摆的运动，必须把 Lagrange 函数用独立的变量如 θ 表示出来（这个体系只有一个自由度）。物体的位置可以表示为

$$\begin{cases} x = v_0 t + \frac{1}{2}at^2 + l\sin\theta \\ y = -l\cos\theta \end{cases} \tag{36}$$

对时间求导得到用广义坐标 θ 和广义速度 $\dot{\theta}$ 表示的速度

$$\begin{cases} \dot{x} = v_0 + at + l\dot{\theta}\cos\theta \\ \dot{y} = l\dot{\theta}\sin\theta \end{cases} \tag{37}$$

因此，Lagrange 函数为

$$\begin{aligned} L &= T - U \\ &= \frac{1}{2}m\left[\left(v_0 + at + l\dot{\theta}\cos\theta\right)^2 + \left(l\dot{\theta}\sin\theta\right)^2\right] + mgl\cos\theta \\ &= \frac{1}{2}m\left(v_0 + at\right)^2 + m\left(v_0 + at\right)l\dot{\theta}\cos\theta + \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 + mgl\cos\theta \end{aligned} \tag{38}$$

由于

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \theta} &= -m\left(v_0 + at\right)l\dot{\theta}\sin\theta - mgl\sin\theta \\ \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} &= ml^2\dot{\theta} + ml\left(v_0 + at\right)\cos\theta \\ \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} &= ml^2\ddot{\theta} + mla\cos\theta - ml\dot{\theta}\left(v_0 + at\right)\sin\theta \end{aligned} \tag{39}$$

因此，利用 Lagrange 方程得到θ所满足的微分方程为

$$\ddot{\theta} = -\frac{g}{l}\sin\theta - \frac{a}{l}\cos\theta \tag{40}$$

下面对这个问题做更细致的讨论。我想要了解一下单摆微振动时的运动情况，譬如我想要知道它作微振动的频率。当然，微振动并不一定意味着θ是一个小角，它的确切含义是指单摆偏离平衡位置的角度是一个小量。因此，为了讨论微振动，我们首先需要知道平衡时单摆所处的位置，设为$\theta = \theta_e$。而平衡意味着$\ddot{\theta} = 0$（想想为什么？），把此关系式代入方程

$$0 = g\sin\theta_e + a\cos\theta_e \tag{41}$$

就得到了平衡时的角度等于

$$\tan\theta_e = -a/g \tag{42}$$

平衡位置如图。这个结论应该是可信的，因为我们知道当小车加速运动时，一个

原本竖直悬挂着的物体会向与运动相反的方向偏离(你也可以利用惯性力分析这个问题)。为了利用微振动条件，我们令$\theta=\theta_e+\eta$，这里η是一个小的角度，它满足方程

$$\begin{aligned}\ddot{\theta}=\ddot{\eta}&=-\frac{g}{l}\sin\left(\theta_e+\eta\right)-\frac{a}{l}\cos\left(\theta_e+\eta\right)\\&=-\frac{g}{l}\left(\sin\theta_e\cos\eta+\cos\theta_e\sin\eta\right)\\&\quad-\frac{a}{l}\left(\cos\theta_e\cos\eta-\sin\theta_e\sin\eta\right)\\&\approx-\frac{g}{l}\left(\sin\theta_e+\eta\cos\theta_e\right)-\frac{a}{l}\left(\cos\theta_e-\eta\sin\theta_e\right)\\&=-\frac{1}{l}\left(g\sin\theta_e+a\cos\theta_e\right)-\frac{1}{l}\left(g\cos\theta_e-a\sin\theta_e\right)\eta\end{aligned}\tag{43}$$

由于考虑的是微振动，因此这里我只保留到η的一阶项。由平衡条件，第一项等于零，因此我们有

$$\ddot{\eta}=-\frac{1}{l}\left(g\cos\theta_e-a\sin\theta_e\right)\eta\tag{44}$$

经过简单的计算，不难从得到$\sin\theta_e$和$\cos\theta_e$的表达式（留给你练习一下），代入上式就得到

$$\ddot{\eta}=-\frac{\sqrt{a^2+g^2}}{l}\eta\tag{45}$$

这代表的是熟悉的谐振子方程，它的频率我们是知道的

$$\omega^2=\frac{\sqrt{a^2+g^2}}{l}\tag{46}$$

你可从以下两个方面知道这个结论几乎不会出错：首先结论中不出现v_0，这是可以预期的，因为你完全可以采用别的惯性参考系，使得小车在初始时刻具有别的速度，而这是不会改变我们得到的物理结论的（Galileo 相对性原理）；其次，你可以看看在一些特殊的极限情形下是否会得出正确的结果，比如$a\to0$时，

$\omega \to \sqrt{g/l}$，这正是通常单摆做微振动的频率，理当如此！

讨论这样一个例子的目的首先是熟悉 Lagrange 方程求解问题的一般步骤，其次，利用这个例子我们也对微振动问题有了一个初步的认识，在后面我们还会将这里的讨论推广，研究多自由度体系的微振动问题。实际上，这个例子可以告诉我们很多的东西。

首先，在我们前面的所有讨论中，实际上是隐含了一个条件的：那就是 Lagrange 函数——或者说动能和势能——是相对于某个惯性系而测量或计算的，否则你将得到完全错误的结论。譬如对于势能为零的粒子，当你在非惯性系中写出它的 Lagrange 函数时，那就是动能，也就是$\frac{1}{2}mv^2$，而使得动能积分取极值的路线则是那条作匀速直线运动的路线，显然在非惯性系中这是错误的。也就是说，尽管对于广义坐标，除了要求它们是独立的并且能完全确定体系的位形之外并无别的特别的条件，你完全可以选择非惯性系中的坐标作为广义坐标，而不管你选取什么样的广义坐标，Lagrange 函数中的动能和势能必须是相对于惯性系而言的。譬如刚才的例子中，如果 x 是粒子相对于某个静止观测者的位置，而 $x' = x - \frac{1}{2}at^2$ 则是相对于某个以加速度 a 运动的观测者测量的位置，那么 Lagrange 函数或者动能等于什么呢

$$L = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 = \frac{1}{2}m\left(\dot{x}' + at\right)^2$$

而 Lagrange 方程为

$$\frac{\partial L}{\partial x'} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}'} = -\frac{d}{dt}\left[m\left(\dot{x}' + at\right)\right] = m\ddot{x}' + ma = 0$$

即相对于加速运动的观测者，粒子是以同样大小而方向相反的加速度在运动。理当如此！

从这个例子我们还得到了 Lagrange 函数的一个非常引入注目的性质：你发现在写出 Lagrange 方程时，Lagrange 函数(38)中的第一项并没有起任何作用，也就是说，无论你将 L 还是 $L' = L - m\left(v_0 + at\right)^2 \big/ 2$ 称为体系的 Lagrange 函数，由它们得到的微分方程都是一样的。实际上，这是 Lagrange 函数的一般特性的

一个特例：设$L\left(q,\dot{q},t\right)$是某个体系的 Lagrange 函数，那么

$$L'\left(q,\dot{q},t\right)=L\left(q,\dot{q},t\right)+\frac{d}{dt}f\left(q,t\right) \tag{47}$$

也将是描述同一体系的一个 Lagrange 函数，也就是说，由它们得到的体系运动的微分方程将是一样的。这是因为

$$\begin{aligned} S' &= \int_{t_1}^{t_2} L'\left(q,\dot{q},t\right)dt = \int_{t_1}^{t_2} L\left(q,\dot{q},t\right)dt + \int_{t_1}^{t_2}\frac{df}{dt}dt \\ &= S + f\left(q^{(2)},t_2\right) - f\left(q^{(1)},t_1\right) \end{aligned} \tag{48}$$

即

$$S' = S + \text{const}. \tag{49}$$

也就是说它们相差一个变分等于零的量。因此，条件$\delta S'=0$和$\delta S=0$是等价的，它们得到的是同样的运动方程。所以，Lagrange 函数可以附加任意一个广义坐标和时间的函数的全微商。这个结论是很重要的，在许多问题的分析中都会用到。

实际上，不难看出，Lagrange 函数还有另外一个不确定性：你可以将 Lagrange 函数乘上任意一个非零的常数因子而不会引起极小路径的改变，从而也就不会影响最后的微分方程。这一个性质也可看作是将坐标或时间重新定了标度。

顺便介绍 Lagrange 函数的另一个性质。考察一个由两部分A和B构成的力学体系，每一部分在孤立情况下的 Lagrange 函数分别为L_A和L_B。现在，假设两部分的距离足够远，以至于它们之间的相互作用可以忽略，这时整个系统的 Lagrange 函数趋于

$$\lim L = L_A + L_B \tag{50}$$

Lagrange 函数的这种可加性反映了这样一个事实：没有相互作用的各个部分中任一部分的运动方程不会包含其他部分的量。

在这一节我们看到，对于完整约束，由于广义约束力等于零，因此，Lagrange 方程是 Newton 方程在位形空间的投影，或者说，Lagrange 方程可以由 Newton 定律导出，这样我们就证明了 Lagrange 方程、从而我们一开始提出的最小作用

原理是正确的。由此，在有些书上你就会看到这样的话“Lagrange 方程与 Newton 定律是等价的”。但是，我们应该非常小心的使用等价这个字眼，因为当我们讲事物 A 与事物 B 等价时，不仅意味着可以由 A 导出 B，而且也同时意味着由 B 也可以导出 A 来。那么我们是否可以由 Lagrange 方程导出 Newton 方程来呢？当然不行！你不可能从$s = 3n - m$个 Lagrange 方程得到 Newton 的$3n$个方程。不过注意到 Lagrange 方程是广义坐标——也就是那些能完全确定体系位置的独立变量——所满足的正确方程，因此，我们讲 Newton 定律和 Lagrange 方程或者最小作用原理等价是就确定体系位形而言的。不等价之处在于，Newton 定律不仅可以告诉我们物体在任意时刻的位置，而且还可以告诉我们有关约束力的信息，而在位形空间中表述的定律中这些信息是不可能出现的，或者说这些信息已经从问题中剔除掉了，这些丢失的信息不仅体现在 Lagrange 函数中的势能仅仅由主动力所贡献，而且也同时表现在广义约束力为零或者说理想约束条件自动满足这一点上。丢失的原因，究其根源是由于在位形空间中，体系的运动是自由的。而这也就暗示我们，如果我们不是在以独立标量为坐标的位形空间中研究问题，而是在包含不独立坐标的空间中对它进行讨论，那么我们就有可能得到有关约束力的信息了。这真是下一节“Lagrange 乘子方法”的精华所在。

附录 A：关于完整约束体系的理想约束条件

为什么对于完整约束体系，所有约束力的虚功之和是自动等于零的？原因是这样的：

对于完整体系，其约束力效应可这样来理解：如果我们考虑第ν个形如

$$f_\nu\left(\vec{r}_1,\cdots\vec{r}_N,t\right)=0 \tag{A1}$$

的约束，那么位矢$\vec{r}_a$的变化所引起的f_ν的改变必然表示由此约束所导致的作用在第a个粒子上的约束力$\vec{N}_{\nu a}$，因此我们有

$$\vec{N}_{\nu a}=\lambda_\nu\frac{\partial f_\nu}{\partial\vec{r}_a} \tag{A2}$$

这里λ_ν是某个未知因子，它的出现是因为对于约束$f_\nu\left(\vec{r}_1,\cdots\vec{r}_N,t\right)=0$我们只知道它准确到某个非零的因子。那么，作用在第$a$个粒子上的总的约束力就是

$$\vec{N}_a=\sum_\nu\vec{N}_{\nu a}=\sum_\nu\lambda_\nu\frac{\partial f_\nu}{\partial\vec{r}_a} \tag{A3}$$

因此，所有约束的虚功为

$$\delta W=\sum_a\vec{N}_a\cdot\delta\vec{r}_a=\sum_{\nu,a}\lambda_\nu\frac{\partial f_\nu}{\partial\vec{r}_a}\cdot\delta\vec{r}_a=\sum_\nu\lambda_\nu\delta f_\nu \tag{A4}$$

这里

$$\delta f_\nu=\sum_a\frac{\partial f_\nu}{\partial\vec{r}_a}\cdot\delta\vec{r}_a \tag{A5}$$

它正是虚位移$\delta\vec{r}_a$所引起的f_ν的改变。由于虚位移是与约束相容的，也就是说，$\delta\vec{r}_a$满足约束，因此必然有

$$\delta f_\nu=0 \tag{A6}$$

由此可以得到

$$\vec{N}_a\cdot\delta\vec{r}_a=0 \tag{A7}$$

从而

$$\delta W = \sum_a \vec{N}_a \cdot \delta \vec{r}_a = 0 \qquad \text{(A8)}$$

所以，对于完整约束，约束力与虚位移垂直，各个约束力的虚功为零，当然所有虚功之和也为零。

附录 B：从最小作用原理直接推导方程(17)

从 Lagrange 方程得到上面的表达式的数学步骤过于繁琐了，实际上，如果你用最小作用原理来做会非常的简单

$$\delta S = \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}_a} \delta \vec{r}_a \Big|_{t_1}^{t_2} + \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial L}{\partial \vec{r}_a} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}_a} \right) \cdot \delta \vec{r}_a dt \qquad \text{(B1)}$$

与

$$\delta S = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i(t) \Big|_{t_1}^{t_2} + \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \delta q_i dt \qquad \text{(B2)}$$

对比，由于端点项实际上是相同的，因此那两个被积项也就必然相同，特别是如果将(B1)中的 $\delta \vec{r}_a$ 表示为 $\delta \vec{r}_a = \frac{\partial \vec{r}_a}{\partial q_i} \delta q_i$ 的话，那就意味着

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \left(\frac{\partial L}{\partial \vec{r}_a} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}_a} \right) \cdot \frac{\partial \vec{r}_a}{\partial q_i} \qquad \text{(B3)}$$

这正是关系式(17)。尽管这样的推导更加简单，不过，象前面那样的推导你是应该逐步习惯并熟练的。