

Lagrange 乘子法

前面我们讨论了完整约束体系，对于这样的体系不独立坐标可以通过约束方程（或者引入广义坐标）加以消除。如果约束是非完整的，我们就无法通过约束方程达到消除不独立坐标的目的。没有一般性的方法处理非完整约束问题，但是，对于一类特殊的非完整约束，也就是线性微分约束，尽管无法通过约束方程消去不独立坐标，但是我们却可以通过引入 Lagrange 乘子消去不独立的方程。

现在我们就考虑受到约束方程有如下形式的一个力学体系

$$A_{vk} \dot{q}_k + A_{vt} = 0, \quad \text{or} \quad A_{vk} dq_k + A_{vt} dt = 0 \quad (v = 1, 2, \dots, m) \quad (1)$$

这里， n 是坐标的数目， m 是约束的数目，并且 $n > m$ ； A_{vk} 和 A_{vt} 都只是坐标和时间的函数。

无论上面的方程是否可积都不会影响我们后面的讨论：这些讨论对于完整约束和非完整约束同样有效。因此，如果不方便把所有的坐标都化为独立变量，或者如果你想要考虑约束效应，那么，下面推导的 Lagrange 乘子方法也适用于完整约束体系。例如，对于约束 $f_v(q, t) = 0$ ，两边对时间求微商就变为（可积）

微分约束的形式 $\sum_k (\partial f_v / \partial q_k) \dot{q}_k + \partial f_v / \partial t = 0$ （这也正是我们把完整约束有

时也称为可积约束的原因）。这时 $A_{vk} = \partial f_v / \partial q_k$ ， $A_{vt} = \partial f_v / \partial t$ 。

象上一节推导完整约束体系的 Lagrange 方程一样，我们仍然从最小作用原理出发

$$\delta S = \delta \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t) dt = 0 \quad (2)$$

我们假定它对于非完整约束也是正确的。因此，完全类似于以前的推导，我们有

$$\int_{t_1}^{t_2} \left[\left(\frac{\partial L}{\partial q_k} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) \delta q_k \right] dt = 0 \quad (3)$$

这里 q_i 不是独立的，从而变分（或者虚位移） δq_k 也不能任意取值，所以我

们从上面的积分等于零也不再能得到通常形式的 Lagrange 方程。跟上一节不同的是，你无法通过约束方程把不独立的变量消去。为了把变分约化为独立的形式，我将在下面引入可任意选取的 m 个 Lagrange 乘子 λ_v , ($v = 1, 2, \dots, m$)，一般情况下， λ_v 是坐标 q_i 、速度 \dot{q}_i 和时间 t 的函数。由于变分运算是在固定的时间操作的（等时变分），也就是说 $\delta t = 0$ ，因此，变分满足下面的条件（正如完全约束中我们得到虚位移所满足的方程一样的道理）

$$A_{vk} \delta q_k = 0 \quad (4)$$

实际上，这个条件仅仅对于完整约束（当然也就包含可积分的微分约束）才是成立的，而对于一般的不可积线性微分约束，你可以认为我们仅仅考虑限于使得上式成立的那些想象路线，而所谓最小也是在满足个关系的所有路径当中而言的。这个方程左右两边都乘上任意函数 λ_v 也是成立的，把所有这样得到的方程相加（对 v 求和）

$$\lambda_v A_{vk} \delta q_k = 0 \quad (5)$$

或者把求和重新安排并从 t_1 到 t_2 对时间积分

$$\int_{t_1}^{t_2} [(\lambda_v A_{vk}) \delta q_k] dt = 0 \quad (6)$$

现在我手上由两个等于零的积分，(3)和(6)，把这两个积分相加显然也是等于零的

$$\int_{t_1}^{t_2} \left[\left(\frac{\partial L}{\partial q_k} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} + \lambda_v A_{vk} \right) \delta q_k \right] dt = 0 \quad (7)$$

这个积分涉及到 n 个变量 q_k ：其中 m 个 q_k 是不独立的，它们通过约束方程与其它的 q_k 相联系。我们将假设这 m 个不独立变量为 q_k （指标从 1 到 m 取值），而 $n - m$ 个独立变量为 q_k （指标从 $m + 1$ 到 n 取值，这样做并不影响下面分析得到的结论）。由于 m 个 Lagrange 乘子 λ_v 可以取任何函数，因此，我总是可以找到适当的 λ_v 使得下面的方程成立

$$\frac{\partial L}{\partial q_k} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} + \sum_{v=1}^m \lambda_v A_{vk} = 0 \quad (v=1, 2, \dots, m) \quad (8)$$

即方程(7)积分中对应于前面 m 个不独立坐标变分的系数为零。

这样选取 λ_v 之后，方程(7)剩下的积分就是

$$\int_{t_1}^{t_2} dt \sum_{k=m+1}^n \left(\frac{\partial L}{\partial q_k} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} + \sum_{v=1}^m \lambda_v A_{vk} \right) \delta q_k = 0 \quad (9)$$

由于这些 q_k (对于 $k = m+1, \dots, n$) 不再受到任何限制 (根据我们的假定它们是独立的), 因此, 正如以前所熟悉的, 上面积分中每个 q_k 前面的系数都等于零。这些方程连同前面得到的不独立变量的 m 个方程就可以统一表示为

$$\frac{\partial L}{\partial q_k} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} + \lambda_v A_{vk} = 0 \quad (v=1, 2, \dots, n) \quad (10)$$

这 n 个方程涉及 $n+m$ 个未知量: n 个坐标以及 m 个 Lagrange 乘子。 m 个约束方程正好为我们提供了所需要的其余 m 个方程。

Lagrange 乘子 λ_v 有什么样的物理含义呢? 我们知道每一个质点的 Newton 方程可以写为

$$\vec{F}_a + \vec{N}_a - \frac{d\vec{p}_a}{dt} = 0 \quad (11)$$

其中 $\vec{F}_a = \partial L / \partial \vec{r}_a = -\nabla_a U$, 而 $\vec{p}_a = \partial L / \partial \dot{\vec{r}}_a = m_a \dot{\vec{r}}_a$, 因此上式也可以写为

$$\frac{\partial L}{\partial \vec{r}_a} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}_a} + \vec{N}_a = 0 \quad (12)$$

如果把这个等式两边与 $\partial \vec{r}_a / \partial q_k$ 作标量积并对所有的粒子 (即对 a) 求和, 那么

$$\left(\frac{\partial L}{\partial \vec{r}_a} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}_a} \right) \cdot \frac{\partial \vec{r}_a}{\partial q_k} + \vec{N}_a \cdot \frac{\partial \vec{r}_a}{\partial q_k} = 0 \quad (13)$$

上一节我们已经知道第一项等于

$$\frac{\partial L}{\partial q_k} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \quad (14)$$

而第二项则是广义约束力

$$Q'_k = \bar{N}_a \cdot \frac{\partial \bar{r}_a}{\partial q_k} \quad (15)$$

而方程(13)必然与我们前面得到的方程(10)是一样的，所以

$$Q'_k = \lambda_v A_{vk} \quad (16)$$

也就是说，Lagrange 乘子 λ_v 确定了广义约束力，它本身也是问题解的一部分。

最后请大家注意这样一点：关系式(5)意味着

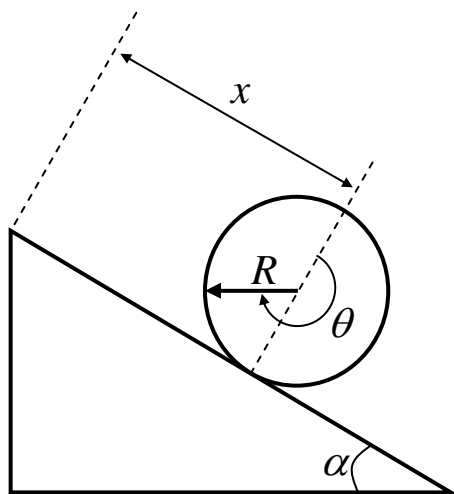
$$Q'_k \delta q_k = 0 \quad (17)$$

也就是说所有约束力的虚功等于零。这可以看作是理想约束假设的一般性的证明。

举一个例子。考虑一个圆盘在倾斜平面上的纯滚动。设圆盘的质量为 m ，半径为 R 。圆盘的动能分为两部分：平移动能和转动动能（实际上就是质心动能和相对于质心的动能，这一点我们在质点组部分已经证明）：

$$T = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} I \dot{\theta}^2 = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{4} m R^2 \dot{\theta}^2 \quad (18)$$

第二部分动能也可以直接计算得到，它等于



$$\begin{aligned} \int \frac{1}{2} v^2 dm &= \int \frac{1}{2} \rho (r \dot{\theta})^2 r dr d\theta \\ &= \frac{1}{2} \rho \dot{\theta}^2 \int r^3 dr d\theta \\ &= \frac{1}{2} \rho \dot{\theta}^2 \cdot \frac{1}{4} R^4 \cdot 2\pi \\ &= \frac{1}{4} \cdot (\rho \pi R^2) R^2 \cdot \dot{\theta}^2 = \frac{1}{4} m R^2 \dot{\theta}^2 \end{aligned}$$

势能为

$$U = -mgx \sin \alpha \quad (19)$$

这里我们假设在斜面顶端圆盘的势能等于零。因此 Lagrange 函数为

$$L = T - U = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{4} m R^2 \dot{\theta}^2 + mgx \sin \alpha \quad (20)$$

约束方程为

$$f(x, \theta) = x - R\theta = 0 \quad (21)$$

由于圆盘作纯滚动，这个体系只有一个自由度，因此我们可以选择 x 或者 θ 作为广义坐标，并利用约束方程将另一个变量消去。但是，我们也可以把 x 和 θ 都当作广义坐标，而利用 Lagrange 乘子法求解这个问题。此时 Lagrange 方程为

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} + \lambda \frac{\partial f}{\partial x} = mg \sin \alpha - m\ddot{x} + \lambda \\ 0 &= \frac{\partial L}{\partial \theta} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} + \lambda \frac{\partial f}{\partial \theta} = 0 - \frac{1}{2} m R^2 \ddot{\theta} - \lambda R \end{aligned} \quad (22)$$

这两个方程连同约束方程 $x = R\theta$ 就可以完全确定未知量 x 、 θ 和 λ 。把约束方程对时间求导得到

$$\ddot{\theta} = \ddot{x}/R \quad (23)$$

代入前面两个方程并作简单的组合就得到

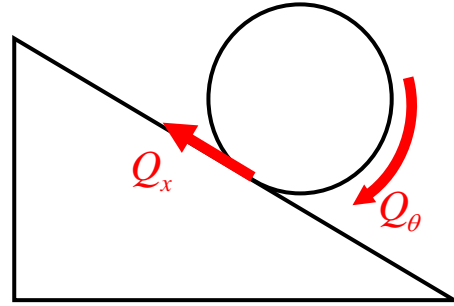
$$\ddot{x} = \frac{2}{3} g \sin \alpha, \quad \ddot{\theta} = \frac{2g}{3R} \sin \alpha, \quad \lambda = -\frac{1}{3} mg \sin \alpha \quad (24)$$

我们注意到如果圆盘沿着斜面无摩擦地向下滑动，那么 $\ddot{x} = g \sin \alpha$ 。因此，滚动约束使得加速度的值减小一个因子 $2/3$ 。

根据前面的定义，广义约束力等于

$$\begin{aligned} Q_x &= \lambda \frac{\partial f}{\partial x} = \lambda = -\frac{1}{3} mg \sin \alpha \\ Q_\theta &= \lambda \frac{\partial f}{\partial \theta} = -\lambda R = \frac{1}{3} mg R \sin \alpha \end{aligned} \quad (25)$$

注意这里 Q_x 正是滚动约束力，它的方向沿着斜面向上（与 x 增加的方向相反），而 Q_θ 则是这个力相对于质心的力矩（其效应使得 θ 增加）。它们是使得圆盘保持沿着平面纯滚动所需要的广义约束力。



如果我们通过方程 $\dot{\theta} = \dot{x}/R$ 把 $\dot{\theta}$ 从 Lagrange 函数中消去

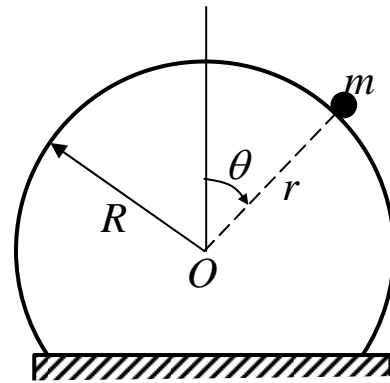
$$L = \frac{3}{4}m\dot{x}^2 + mgx \sin \alpha \quad (26)$$

这时 Lagrange 函数就用一个独立的广义坐标表示了出来，这个坐标的运动方程马上可以得到

$$\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = mg \sin \alpha - \frac{3}{2}m\ddot{x} = 0 \quad (27)$$

与我们前面得到的方程是一样的。尽管这个方法更加简单，但是它却不会告诉你有关约束力的任何信息。

另举一例。考虑固定圆球顶端的一个静止的小珠，小珠的质量为 m ，圆球的半径为 R ，并假设圆球表面是光滑的。现在如果给小珠一个很小的扰动，它就会运动，由于球面的存在，它不能自由下落，而是会沿着球面滑下。但是，在重力场中，小珠也不可能永远在球面上运动，在某个时刻，即当约束力等于零的时候，它就会开始脱离球面，而我们的问题就是找出开始脱离球面时小珠的位置。



这是一个单自由度的问题，因此用一个变量（如角度 θ ）就可以完全确定小珠的位置，但是，为了得到约束力的信息，我们就必须把不独立的那个变量（如径向距离 r ）也保留在 Lagrange 函数中，即

$$L = T - U = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) - mgr \cos \theta \quad (28)$$

而这两个变量所满足的约束方程简单地就是

$$f(r, \theta) = f(r) = r - R = 0 \quad (29)$$

写出带乘子的 Lagrange 方程

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial L}{\partial r} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} + \lambda \frac{\partial f}{\partial r} = m r \dot{\theta}^2 - m g \cos \theta - m \ddot{r} + \lambda = 0 \\ 0 &= \frac{\partial L}{\partial \theta} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} + \lambda \frac{\partial f}{\partial \theta} = m g r \sin \theta - \frac{d}{dt} (m r^2 \dot{\theta}) + 0 = 0 \end{aligned} \quad (30)$$

将约束方程 $r = R$ 代入上式就得到了

$$\lambda = m g \cos \theta - m R \dot{\theta}^2, \quad R \ddot{\theta} = g \sin \theta \quad (31)$$

而第二个方程又可以写为

$$R \dot{\theta} \frac{d\dot{\theta}}{d\theta} = g \sin \theta \quad (32)$$

将此式积分并利用初始条件 $\theta(t=0) = \dot{\theta}(t=0) = 0$ ，就得到了

$$R \dot{\theta}^2 = 2g(1 - \cos \theta) \quad (33)$$

将此关系式再代回到(31)中的第一个方程，我们得到

$$\lambda = m g (3 \cos \theta - 2) \quad (34)$$

在我们的问题中，广义约束力 Q_r 就是球面对小珠所施加的约束力 N_r ，即

$$Q_r = \vec{N} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial r} = \vec{N} \cdot \hat{r} = N_r = \lambda \frac{\partial f}{\partial r} = \lambda = m g (3 \cos \theta - 2) \quad (35)$$

因此，当 $N_r = 0$ 或者说

$$\cos \theta = \frac{2}{3} \quad \text{or} \quad \theta = \arccos \frac{2}{3} \quad (36)$$

时小珠开始脱离球面。至于另一个广义约束力则是这个约束力相对于球心的力矩，当然由于约束力完全是径向的，因此，这个力矩也就是等于零的：

$$Q_\theta = \vec{N} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} = r \vec{N} \cdot \hat{\theta} = \lambda \frac{\partial f}{\partial \theta} = 0 \quad (37)$$

附录：关于虚位移所满足的方程(4)的一点说明

为简单起见，考虑单个约束的情况：

$$g(q, \dot{q}, t) = \sum_{k=1}^n A_k(q, t) \dot{q}_k + B(q, t) = 0 \quad (\text{A1})$$

想象路线满足约束意味着

$$\begin{aligned} \delta g &= g(q + \delta q, \dot{q} + \delta \dot{q}, t) - g(q, \dot{q}, t) \\ &= (\delta A_k) \dot{q}_k + A_k \delta \dot{q}_k + \delta B \\ &= \frac{\partial A_k}{\partial q_i} \dot{q}_k \delta q_i + A_k \delta \dot{q}_k + \frac{\partial B}{\partial q_k} \delta q_k = 0 \end{aligned} \quad (\text{A2})$$

注意到第二项又可以写成

$$\begin{aligned} A_k \delta \dot{q}_k &= A_k \frac{d\delta q_k}{dt} = \frac{d}{dt} (A_k \delta q_k) - \frac{dA_k}{dt} \delta q_k \\ &= \frac{d}{dt} (A_k \delta q_k) - \left(\frac{\partial A_k}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial A_k}{\partial t} \right) \delta q_k \end{aligned} \quad (\text{A3})$$

将它代入(A1)时得到

$$\begin{aligned} \delta g &= \frac{\partial A_k}{\partial q_i} \dot{q}_k \delta q_i - \frac{\partial A_k}{\partial q_i} \dot{q}_i \delta q_k - \frac{\partial A_k}{\partial t} \delta q_k + \frac{\partial B}{\partial q_k} \delta q_k + \frac{d}{dt} (A_k \delta q_k) \\ &= \left(\frac{\partial A_i}{\partial q_k} - \frac{\partial A_k}{\partial q_i} \right) \dot{q}_i \delta q_k - \left(\frac{\partial A_k}{\partial t} - \frac{\partial B}{\partial q_k} \right) \delta q_k + \frac{d}{dt} (A_k \delta q_k) = 0 \end{aligned} \quad (\text{A4})$$

对于可积线性微分约束，由于有（可积条件，这里 t 也应看作一个变量）

$$\frac{\partial A_i}{\partial q_k} = \frac{\partial A_k}{\partial q_i} \quad \text{and} \quad \frac{\partial A_k}{\partial t} = \frac{\partial B}{\partial q_k} \quad (\text{A5})$$

因此(A4)就告诉我们

$$\frac{d}{dt} (A_k \delta q_k) = 0 \quad (\text{A6})$$

或者说

$$A_k \delta q_k = \text{constant} \quad (\text{A7})$$

特别是，由于端点处 δq_k 是等于零的，因此这个常数实际上也是等于零的，即

$$A_k \delta q_k = 0 \quad (\text{A8})$$

这个结论没什么稀奇的，它就是我们在上一节对于完整约束所得到的关系

$$\delta f = f(q + \delta q, t) - f(q, t) = \frac{\partial f}{\partial q_k} \delta q_k = 0 \quad (\text{A9})$$

这里

$$A_k = \frac{\partial f}{\partial q_k}, \quad B = \frac{\partial f}{\partial t} \quad (\text{A10})$$

重要的是，对于不可积线性微分约束，上面的过程实际上表明：想象路线满足约束并不意味着虚位移满足关系(A8)或者(4)！这并不就说明我们前面的讨论出错了，而是说，对于这样的体系，其最小作用原理应该重新表述为：真实运动是沿着满足(4)的想象路线当中作用量取最小值的那条路线行进的。用数学表示就是

$$\begin{cases} \delta S = \delta \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t) dt = 0 \\ \delta q_k(t_1) = \delta q_k(t_2) = 0 \quad \text{and} \quad A_{vk} \delta q_k = 0 \end{cases} \quad (\text{A11})$$