

2 离散傅立叶变换 (DFT)

2.1 傅氏变换的几种形式

2.1 傅氏变换的几种形式

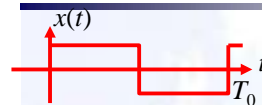
1) 连续时间周期信号

$x(t)$ 为周期信号, 周期为 T_0 , 表达为一系列正弦谐波序列的线性组合,

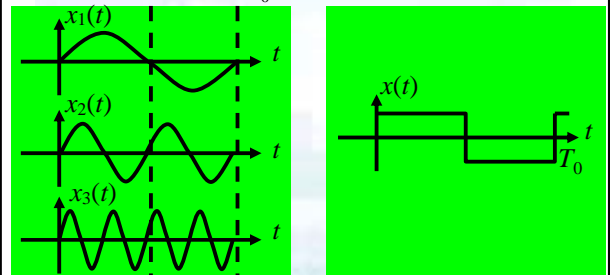
$$x(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} X(m\Omega_0) e^{jm\Omega_0 t}$$

这里 $\Omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$ 为 $x(t)$ 的基本频率 (基频)

2.1 傅氏变换的几种形式



谐波合成



2.1 傅氏变换的几种形式

连续时间周期信号的傅氏变换对:

$$\begin{cases} X(m\Omega_0) = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t) e^{-jm\Omega_0 t} dt \\ x(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} X(m\Omega_0) e^{jm\Omega_0 t} \end{cases}$$

$X(m\Omega_0)$ 为 $x(t)$ 的频谱强度, 谱线
时域连续、周期; 频域离散、非周期

2.1 傅氏变换的几种形式

2) 连续时间非周期信号

$$\begin{cases} X(j\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\Omega t} dt \\ x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\Omega) e^{j\Omega t} d\Omega \end{cases}$$

$X(j\Omega)$: 频谱密度函数

时域连续、非周期; 频域连续、非周期

2.1 傅氏变换的几种形式

3) 离散时间非周期信号

$$\begin{cases} X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\omega n} \\ x(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega \end{cases}$$

对连续信号在时域的取样： $T, \Omega_s = \frac{2\pi}{T}$

$$X(e^{j\Omega T}) = \frac{1}{T} \sum_{m=-\infty}^{\infty} X[j(\Omega - m\Omega_s)]$$

时域离散、非周期；频域连续、周期

2.1 傅氏变换的几种形式

4) 离散时间周期信号

$$\begin{cases} \tilde{X}(k) = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}nk} \\ \tilde{x}(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}(k) e^{j\frac{2\pi}{N}kn} \end{cases}$$

- (1) 因为 $x(n)$ 离散, X 为周期的
(2) $x(n)$ 又是周期的, X 必然离散

2.1 傅氏变换的几种形式

$$X \text{ 的周期 } \Omega_s = \frac{2\pi}{T}$$

$$X \text{ 离散, 基频 } \Omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = \frac{2\pi}{NT}$$

$$1 \text{ 个周期内的谱线数 } M = \frac{\Omega_s}{\Omega_0} = N.$$

时域与频域中的点数均为 N

$$\text{用数字域频率表示基频 } \omega_0 = \frac{2\pi}{N}$$

2.1 傅氏变换的几种形式

引入记号 $W_N = e^{-j\frac{2\pi}{N}}$ (指数因子, 旋转因子)

$$\text{则 } \begin{cases} \tilde{X}(k) = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}(n) W_N^{nk} \\ \tilde{x}(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}(k) W_N^{-kn} \end{cases}$$

时域离散、周期；频域离散、周期

2.1 傅氏变换的几种形式

离散傅立叶级数的主要性质

$$\tilde{X}(k) = DFS[\tilde{x}(n)]$$

(1) 线性 $DFS[a\tilde{x}_1(n) + b\tilde{x}_2(n)] = a\tilde{X}_1(k) + b\tilde{X}_2(k)$

(2) 移位, 时域 $DFS[\tilde{x}(n+m)] = W_N^{-mk} \tilde{X}(k)$

频域 $IDFS[\tilde{X}(k+l)] = W_N^{nl} \tilde{x}(n)$

2.1 傅氏变换的几种形式

(3) 周期卷积

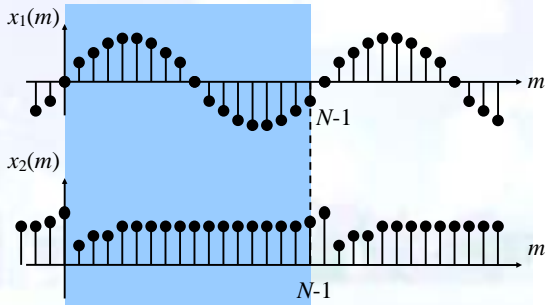
关于周期序列卷积的定义：

$$\tilde{x}(n) = \sum_{m=0}^{N-1} \tilde{x}_1(m) \tilde{x}_2(n-m)$$

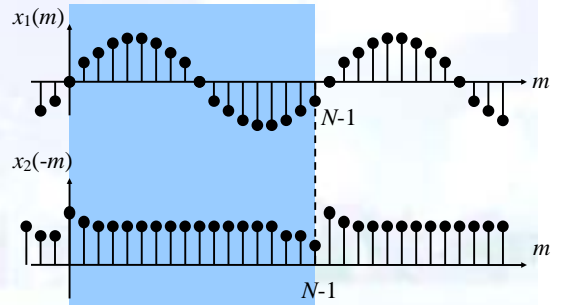
$\tilde{x}_1(n), \tilde{x}_2(n)$ 具有相同的周期 N

$\tilde{x}(n)$ 的周期也为 N (N 个有效值)

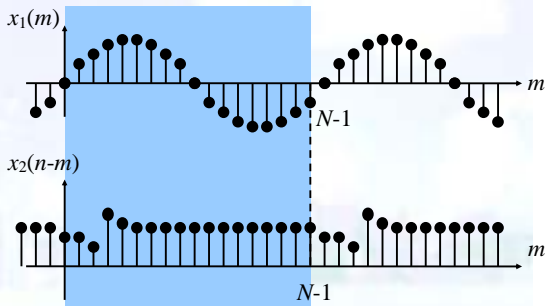
2.1 傅氏变换的几种形式



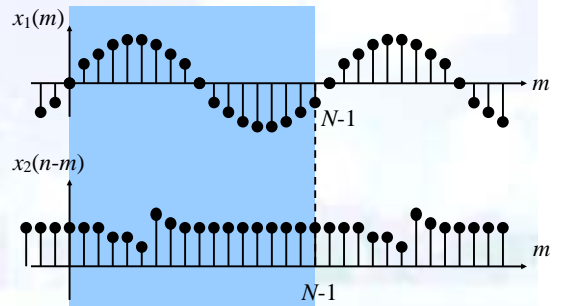
2.1 傅氏变换的几种形式



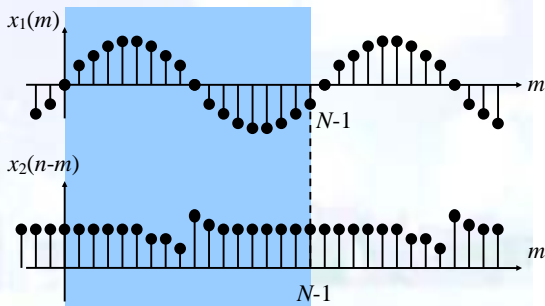
2.1 傅氏变换的几种形式



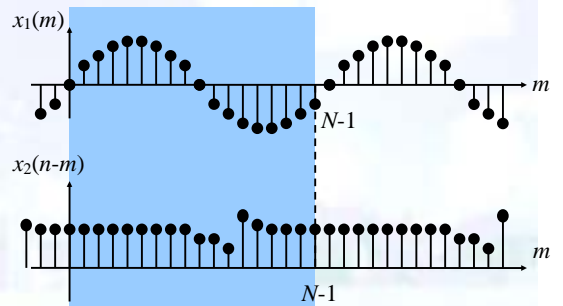
2.1 傅氏变换的几种形式



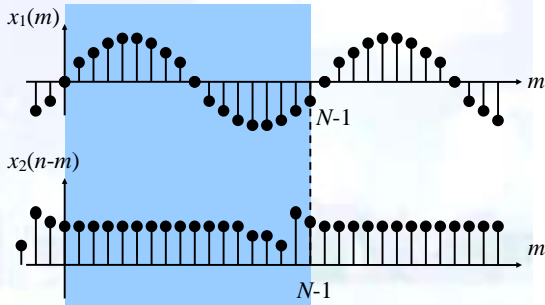
2.1 傅氏变换的几种形式



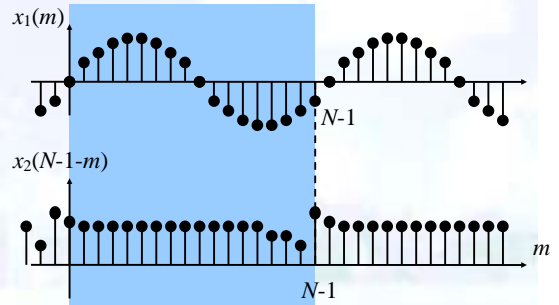
2.1 傅氏变换的几种形式



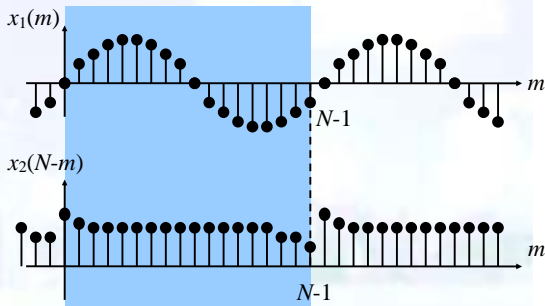
2.1 傅氏变换的几种形式



2.1 傅氏变换的几种形式



2.1 傅氏变换的几种形式



2.1 傅氏变换的几种形式

与有限长序列线性卷积区别：

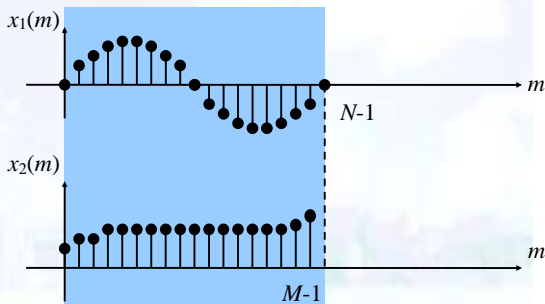
$x_1(n)$ 序列长 N , $x_2(n)$ 序列长 M ,

$$x(n) = \sum_{k=0}^N x_1(k)x_2(n-k)$$

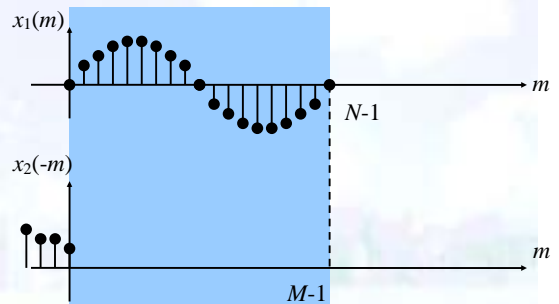
$n=0, 1, 2, \dots, N+M-2$

$N+M-1$ 个有效值

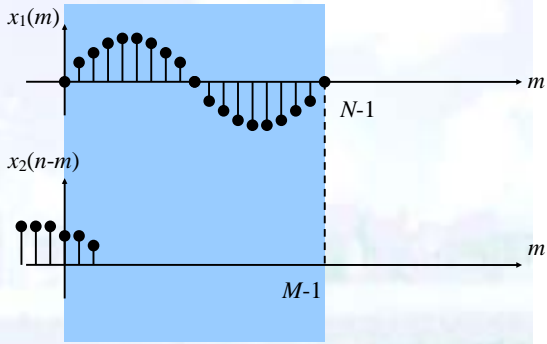
2.1 傅氏变换的几种形式



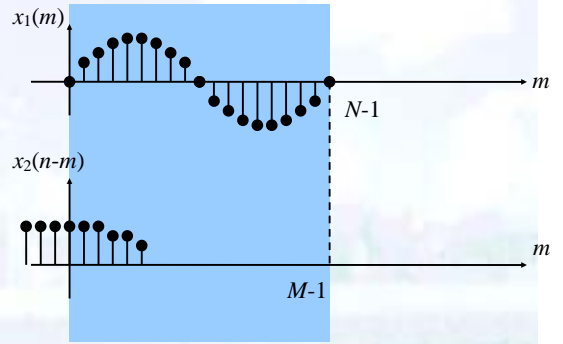
2.1 傅氏变换的几种形式



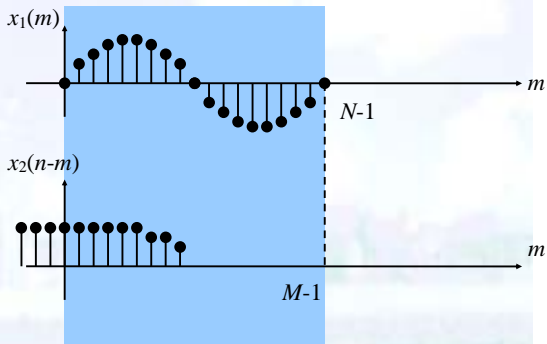
2.1 傅氏变换的几种形式



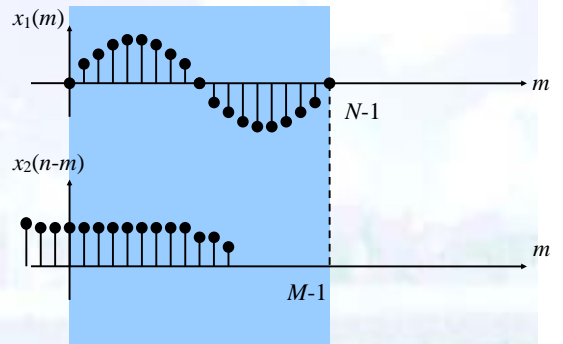
2.1 傅氏变换的几种形式



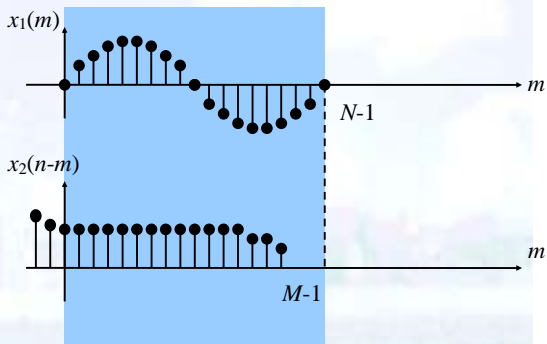
2.1 傅氏变换的几种形式



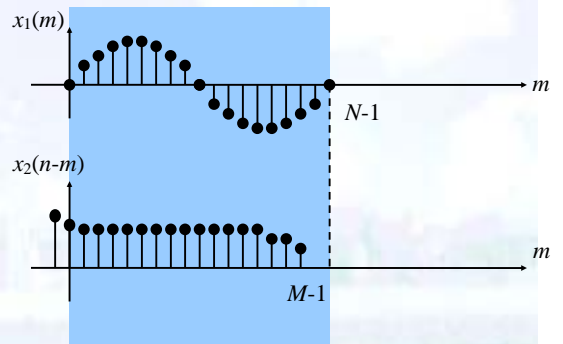
2.1 傅氏变换的几种形式



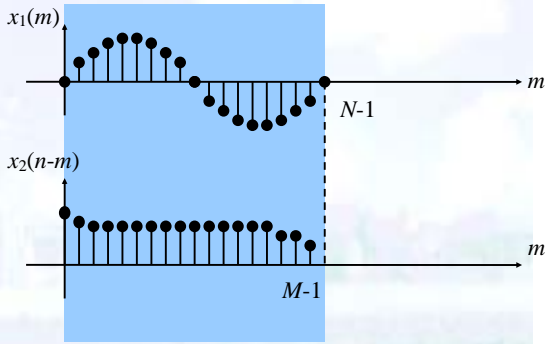
2.1 傅氏变换的几种形式



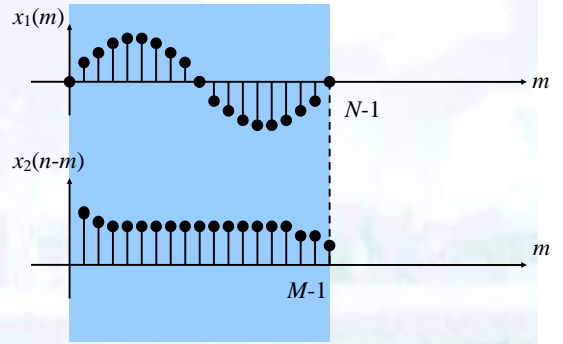
2.1 傅氏变换的几种形式



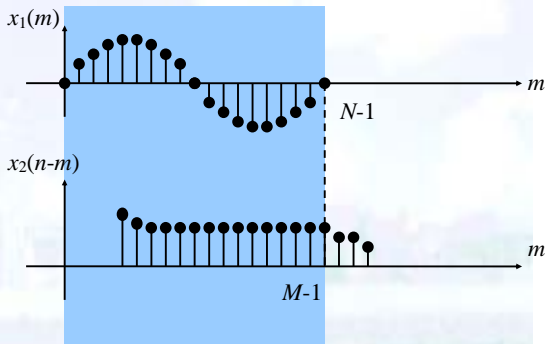
2.1 傅氏变换的几种形式



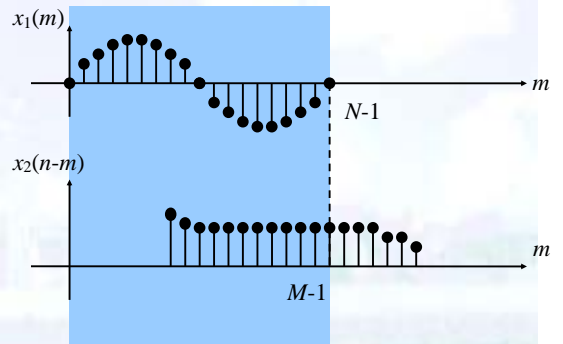
2.1 傅氏变换的几种形式



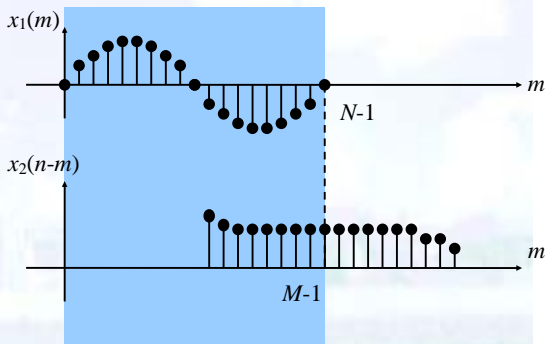
2.1 傅氏变换的几种形式



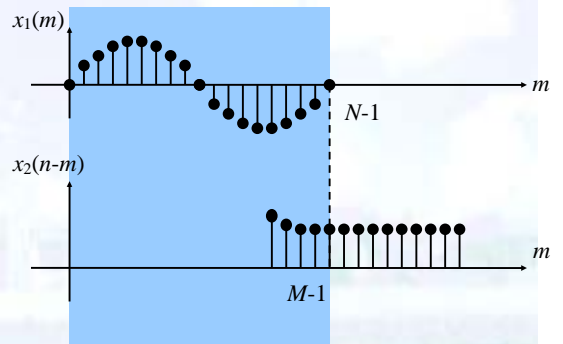
2.1 傅氏变换的几种形式



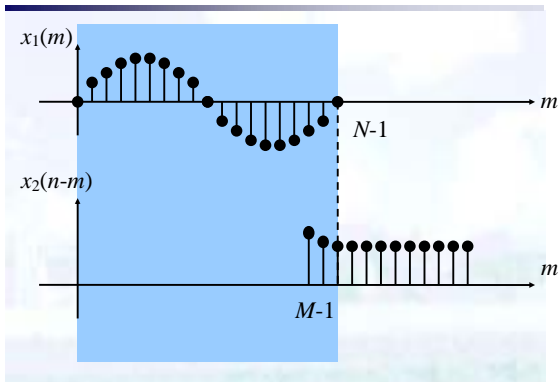
2.1 傅氏变换的几种形式



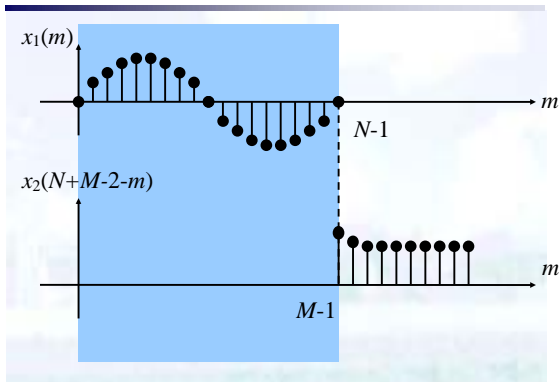
2.1 傅氏变换的几种形式



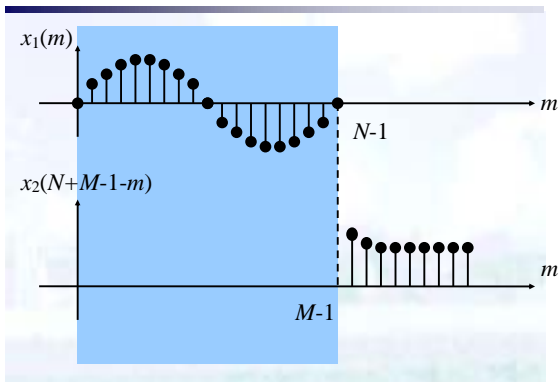
2.1 傅氏变换的几种形式



2.1 傅氏变换的几种形式



2.1 傅氏变换的几种形式



2.1 傅氏变换的几种形式

周期卷积的性质

时域卷积，若 $\tilde{x}_3(n) = \sum_{m=0}^{N-1} \tilde{x}_1(m)\tilde{x}_2(n-m)$

$$\text{则 } \tilde{X}_3(k) = \tilde{X}_1(k) \cdot \tilde{X}_2(k)$$

频域卷积，若 $\tilde{x}_3(n) = \tilde{x}_1(n) \cdot \tilde{x}_2(n)$

$$\text{则 } \tilde{X}_3(k) = \frac{1}{N} \sum_{l=0}^{N-1} \tilde{X}_1(l)\tilde{X}_2(k-l)$$

2.1 傅氏变换的几种形式

(4) 对称性质

共轭对称分量 $x_e(n) = \frac{1}{2}(x(n) + x^*(-n))$

$$x_e(-n) = x_e^*(n)$$

共轭反对称分量 $x_o(n) = \frac{1}{2}(x(n) - x^*(-n))$

$$x_o(-n) = -x_o^*(n)$$

$$x(n) = x_e(n) + x_o(n)$$

2.1 傅氏变换的几种形式

$$\begin{aligned} DFS[\tilde{x}^*(n)] &= \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{x}^*(n)W_N^{nk} \\ &= \left[\sum_{k=0}^{N-1} \tilde{x}(n)W_N^{n(-k)} \right]^* \\ &= \tilde{X}^*(-k) \end{aligned}$$

$$\therefore \tilde{x}^*(n) \leftrightarrow \tilde{X}^*(-k)$$

$$\text{同理, } \tilde{x}^*(-n) \leftrightarrow \tilde{X}^*(k)$$

2.1 傅氏变换的几种形式

$$\begin{aligned} DFS[\tilde{x}_e(n)] &= \frac{1}{2} DFS[\tilde{x}(n)] + \frac{1}{2} DFS[\tilde{x}^*(-n)] \\ &= \frac{1}{2} X(k) + \frac{1}{2} X^*(k) \\ &= \text{Re}\{X(k)\} \end{aligned}$$

$$\therefore \tilde{x}_e(n) \leftrightarrow \text{Re}\{\tilde{X}(k)\}$$

$$\text{同理, } \tilde{x}_o(n) \leftrightarrow j \text{Im}\{\tilde{X}(k)\}$$

2.1 傅氏变换的几种形式

$$\begin{aligned} DFS[\text{Re}\{\tilde{x}(n)\}] &= \frac{1}{2} DFS[\tilde{x}(n)] + \frac{1}{2} DFS[\tilde{x}^*(n)] \\ &= \frac{1}{2} \tilde{X}(k) + \frac{1}{2} \tilde{X}^*(-k) \\ &= \tilde{X}_e(k) \end{aligned}$$

$$\therefore \text{Re}\{\tilde{x}(n)\} \leftrightarrow \tilde{X}_e(k)$$

$$\text{同理, } j \text{Im}\{\tilde{x}(n)\} \leftrightarrow \tilde{X}_o(k)$$

2.1 傅氏变换的几种形式

结果汇总

$$\tilde{x}^*(n) \leftrightarrow \tilde{X}^*(-k)$$

$$\tilde{x}^*(-n) \leftrightarrow \tilde{X}^*(k)$$

$$\tilde{x}_e(n) \leftrightarrow \text{Re}\{\tilde{X}(k)\}$$

$$\tilde{x}_o(n) \leftrightarrow j \text{Im}\{\tilde{X}(k)\}$$

$$\text{Re}[\tilde{x}(n)] \leftrightarrow \tilde{X}_e(k)$$

$$j \text{Im}[\tilde{x}(n)] \leftrightarrow \tilde{X}_o(k)$$

2.1 傅氏变换的几种形式

实序列 $x(n)$

$$\text{Re}[\tilde{X}(-k)] = \text{Re}[\tilde{X}(k)] \quad \text{实部偶为函数}$$

$$\text{Im}[\tilde{X}(-k)] \leftrightarrow -\text{Im}[\tilde{X}(k)] \quad \text{虚部为奇函数}$$

$$|\tilde{X}(-k)| = |\tilde{X}(k)|$$

$$\arg[\tilde{X}(-k)] = -\arg[\tilde{X}(k)]$$

2.2 离散傅立叶变换的定义及性质 (DFT)

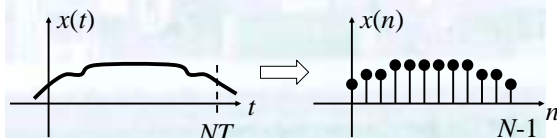
2.2 离散傅立叶变换的定义及性质 (DFT)

(1) 对连续时间信号 $x(t)$ 取样

取样周期 T , 样本长度 N

得到有限长序列 $x(n)$:

$$x(n) = \begin{cases} x(nT), & n = 0, 1, 2, \dots, N-1 \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$



2.2 离散傅立叶变换的定义及性质 (DFT)

(2)计算 $x(n)$ 的频谱

根据DTFT,

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-j\omega n}$$

$X(e^{j\omega})$ 以 2π 为周期, 且连续

2.2 离散傅立叶变换的定义及性质 (DFT)

将其离散化, 2π 周期内取 M 个点: $\omega_k = \frac{2\pi}{M}k$

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-j\frac{2\pi}{M}nk} \quad k = 0, 1, 2, \dots, M-1$$

$X(k)$: 有限长序列的离散谱, 以 M 为周期。

2.2 离散傅立叶变换的定义及性质 (DFT)

关于 M 的选取:

根据DFS的性质, $X(k)$ 对应于的时域的周期序列 $x'(n)$ 为

$$x'(n) = \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} X(k)e^{j\frac{2\pi}{M}kn}$$

将 $X(k) = \sum_{m=0}^{N-1} x(m)e^{-j\frac{2\pi}{M}mk}$ 代入

2.2 离散傅立叶变换的定义及性质 (DFT)

$$\begin{aligned} x'(n) &= \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} \left[\sum_{m=0}^{N-1} x(m)e^{-j\frac{2\pi}{M}mk} \right] e^{j\frac{2\pi}{M}kn} \\ &= \sum_{m=0}^{N-1} x(m) \left[\frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} e^{j\frac{2\pi}{M}(n-m)k} \right] \end{aligned}$$

2.2 离散傅立叶变换的定义及性质 (DFT)

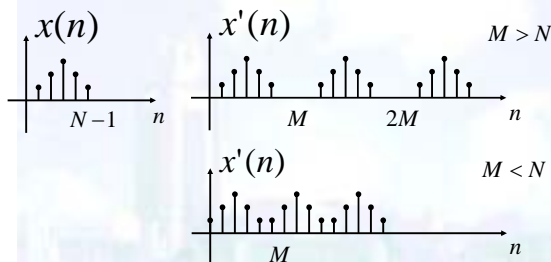
正弦函数的正交性,

$$\frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} e^{j\frac{2\pi}{M}(n-m)k} = \begin{cases} 1 & m = n + rM \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

$$\therefore x'(n) = \sum_{r=-\infty}^{\infty} x(n + rM)$$

r 为任意整数

2.2 离散傅立叶变换的定义及性质 (DFT)



在时域形成周期延拓 $M > N$ 间隔若干零点
 $M < N$ 发生混叠失真

2.2 离散傅立叶变换的定义及性质 (DFT)

一般地, 取 $M=N$

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-j\frac{2\pi}{N}nk} \quad k = 0, 1, 2, \dots, N-1,$$

$$\sum_{k=0}^{N-1} X(k)e^{j\frac{2\pi}{N}nk} = \sum_{k=0}^{N-1} \left[\sum_{m=0}^{N-1} x(m)e^{-j\frac{2\pi}{N}mk} \right] e^{j\frac{2\pi}{N}nk}$$

$$= Nx(n)$$

$$\therefore x(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k)e^{j\frac{2\pi}{N}nk}$$

2.2 离散傅立叶变换的定义及性质 (DFT)

离散时间信号DFT变换对:

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-j\frac{2\pi}{N}nk}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, N-1,$$

$$x(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k)e^{j\frac{2\pi}{N}nk}, \quad n = 0, 1, 2, \dots, N-1$$

在形式上, DFT可以看作是对DFS取主值区间

2.2 离散傅立叶变换的定义及性质 (DFT)

DFT的性质:

(1) 线性

若 $x_1(n) \leftrightarrow X_1(k)$, $x_2(n) \leftrightarrow X_2(k)$

则 $ax_1(n) + bx_2(n) \leftrightarrow aX_1(k) + bX_2(k)$

2.2 离散傅立叶变换的定义及性质 (DFT)

(2) 对称定理

若 $X(k) = \text{DFT}[x(n)]$

则 $\text{DFT}[X(k)] = Nx(-k)$

即

$$x(n) \xrightarrow{\text{DFT}} X(k) \xrightarrow{\text{DFT}} Nx(-k)$$

2.2 离散傅立叶变换的定义及性质 (DFT)

(3) 序列的圆周移位 (循环移位)

圆周移位的定义

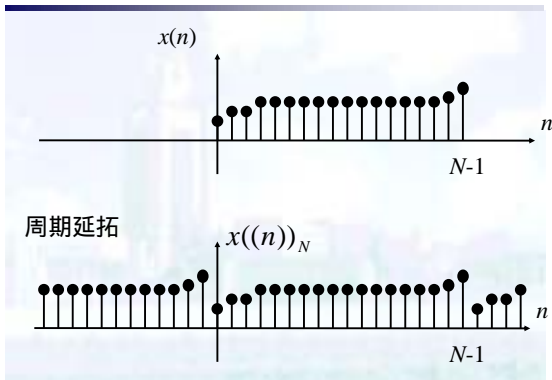
有限长序列 $x(n)$ 右移 m 位:

$$x_1(n) = x((n+m))_N R_N(n)$$

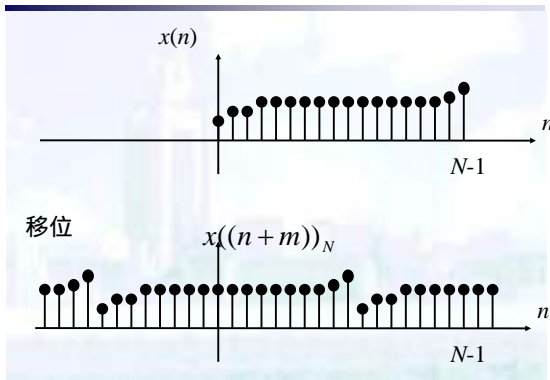
2.2 离散傅立叶变换的定义及性质 (DFT)



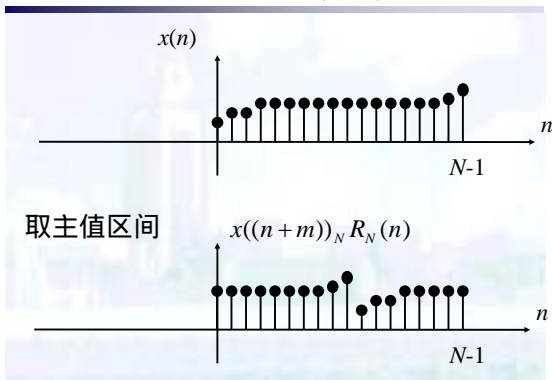
2.2 离散傅立叶变换的定义及性质 (DFT)



2.2 离散傅立叶变换的定义及性质 (DFT)



2.2 离散傅立叶变换的定义及性质 (DFT)



2.2 离散傅立叶变换的定义及性质 (DFT)

有限长序列圆周移位定理

时域移位

$$\text{若 } x_1(n) = x((n+m))_N R_N(n)$$

$$\text{则 } X_1(k) = W_N^{-km} X(k)$$

谱线幅度不变, 但有相位移动

2.2 离散傅立叶变换的定义及性质 (DFT)

有限长序列圆周移位定理

频率移位

$$\text{若 } X_1(k) = X((k+l))_N R_N(k)$$

$$\text{则 } x_1(n) = W_N^{nl} x(n)$$

序列 $x(n)$ 调制到频率 l 上

2.2 离散傅立叶变换的定义及性质 (DFT)

(4) 圆周卷积

$$x_1(n) \otimes x_2(n) = \sum_{m=0}^{N-1} x_1(m) x_2((n-m))_N R_N(m)$$

$$\text{若 } x_3(n) = x_1(n) \otimes x_2(n)$$

$$\text{则 } X_3(k) = X_1(k) \cdot X_2(k)$$

$$\text{若 } x_3(n) = x_1(n) \cdot x_2(n)$$

$$\text{则 } X_3(k) = X_1(k) \otimes X_2(k)$$

圆周卷积后仍为有限长序列, 长为 N

2.2 离散傅立叶变换的定义及性质 (DFT)

对比：有限长序列线性卷积

$x_1(n)$ 序列长 N ， $x_2(n)$ 序列长 M ，

$$x(n) = \sum_{k=0}^N x_1(k)x_2(n-k)$$

$n=0,1,2, \dots, N+M-2$

2.2 离散傅立叶变换的定义及性质 (DFT)

与圆周卷积的等价关系

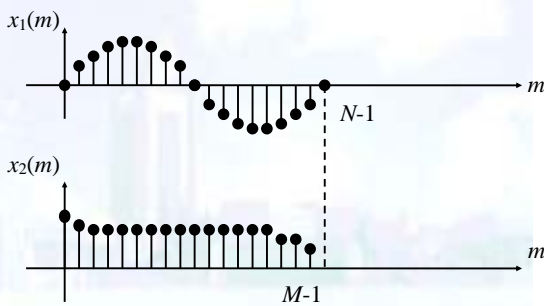
$$x'_1(n) = \begin{cases} x_1(n), & n = 0,1,2,\dots, N-1 \\ 0, & n = N,\dots, N+M-2 \end{cases}$$

$$x'_2(n) = \begin{cases} x_2(n), & n = 0,1,2,\dots, M-1 \\ 0, & n = N,\dots, N+M-2 \end{cases}$$

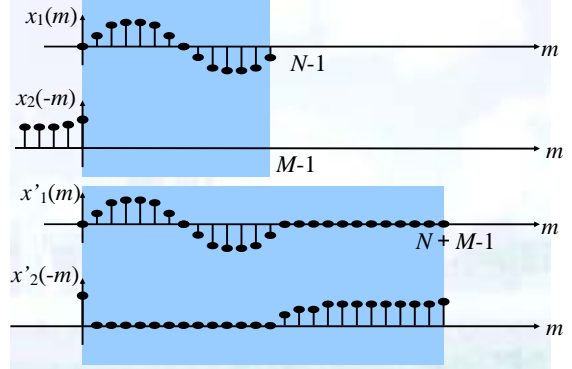
$$\text{则 } x'_1(n) \otimes x'_2(n) = \sum_{k=0}^N x_1(k)x_2(n-k)$$

$n=0,1,2, \dots, N+M-2$

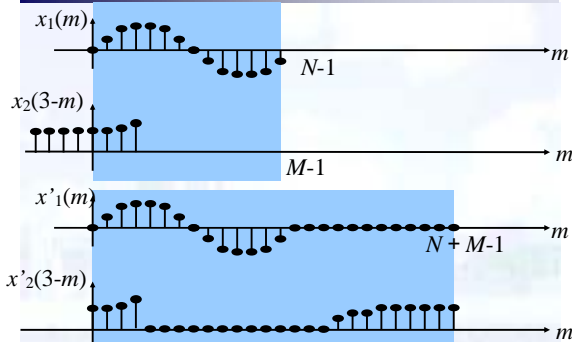
2.2 离散傅立叶变换的定义及性质 (DFT)



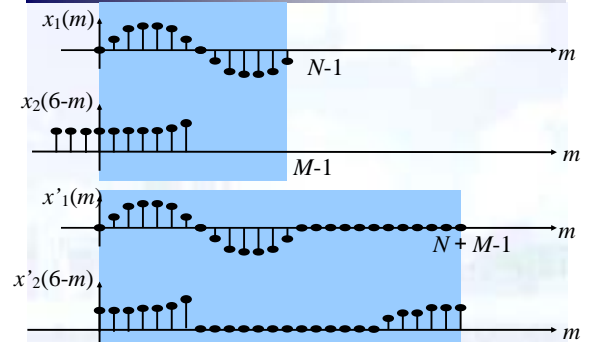
2.2 离散傅立叶变换的定义及性质 (DFT)



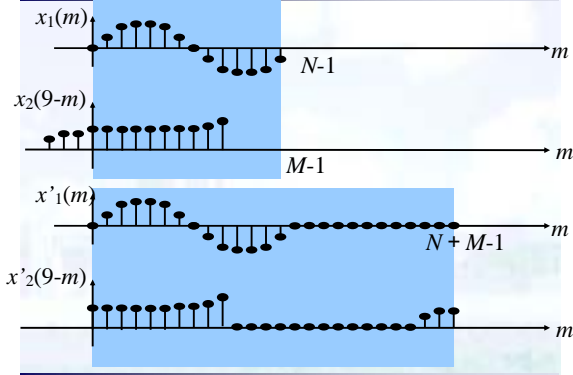
2.2 离散傅立叶变换的定义及性质 (DFT)



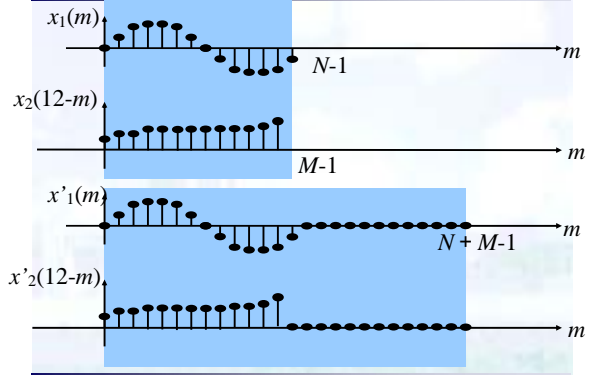
2.2 离散傅立叶变换的定义及性质 (DFT)



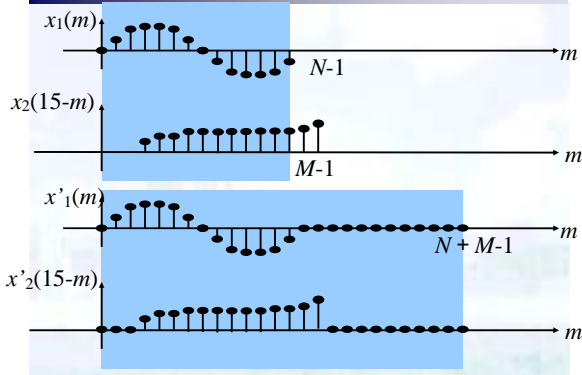
2.2 离散傅立叶变换的定义及性质 (DFT)



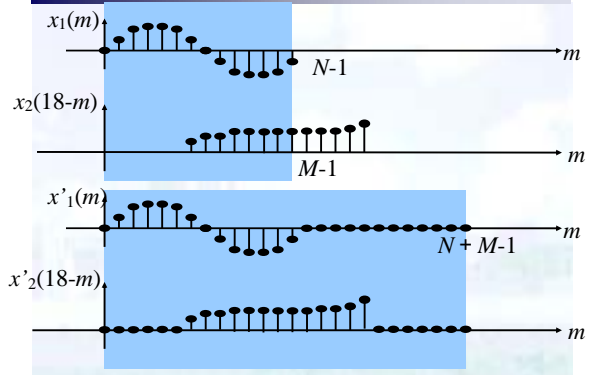
2.2 离散傅立叶变换的定义及性质 (DFT)



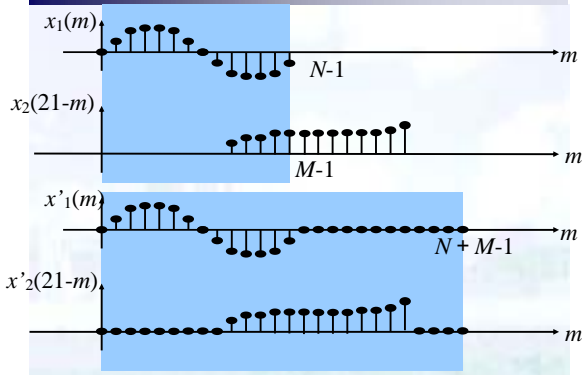
2.2 离散傅立叶变换的定义及性质 (DFT)



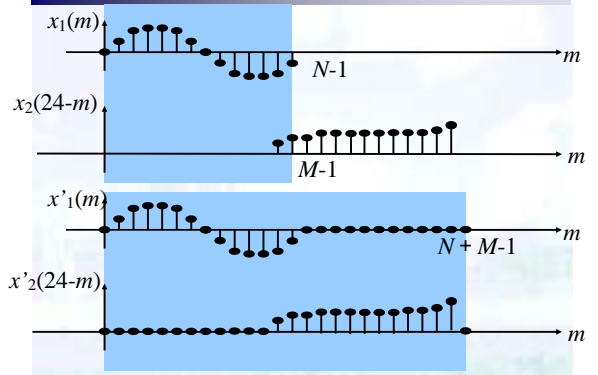
2.2 离散傅立叶变换的定义及性质 (DFT)



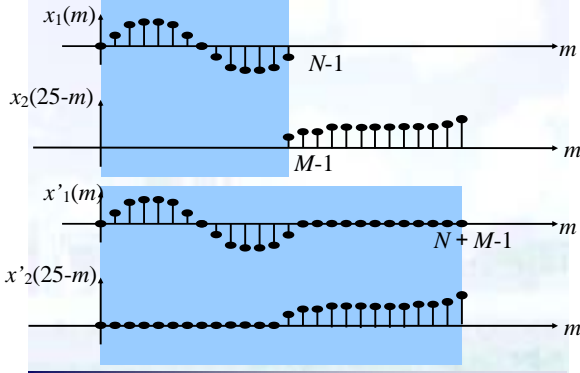
2.2 离散傅立叶变换的定义及性质 (DFT)



2.2 离散傅立叶变换的定义及性质 (DFT)



2.2 离散傅立叶变换的定义及性质 (DFT)



2.2 离散傅立叶变换的定义及性质 (DFT)

(5) 圆周相关定理

若序列 $x_1(n)$ 、 $x_2(n)$ 的圆周相关为

$$x_3(n) = \sum_{l=0}^{N-1} x_1(l)^* x_2((l+n))_N R_N(l)$$

$$\text{则 } X_3(k) = X_1^*(k) X_2(k)$$

当时 $x_1(n)=x_2(n)$ ，称为自相关：

$$X_3(k) = |X(k)|^2$$

2.2 离散傅立叶变换的定义及性质 (DFT)

(6) Parseval 定理

$$\sum_{n=0}^{N-1} |x(n)|^2 = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} |X(k)|^2$$

利用圆周相关定理，取 $x(n)=x_1(n)=x_2(n)$

$$\begin{aligned} x_3(n) &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X^*(k) X(k) W_N^{-nk} \\ &= \sum_{l=0}^{N-1} x(l)^* x((l+n))_N R_N(l) \end{aligned}$$

2.2 离散傅立叶变换的定义及性质 (DFT)

(7) DFT 的奇偶性与对称性

对有限长序列 $x(n)$ ，定义：

$$\text{周期性共轭对称 } x[((N-n))]_N = x^*(n)$$

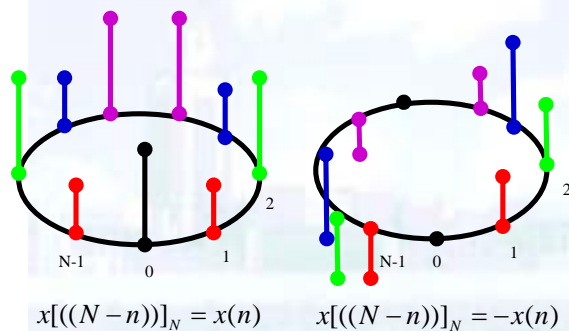
$$\text{周期性共轭反对称 } x[((N-n))]_N = -x^*(n)$$

$$\text{周期性偶对称 } x[((N-n))]_N = x(n)$$

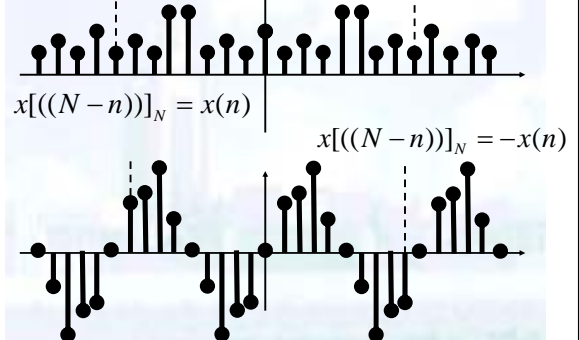
$$\text{周期性奇对称 } x[((N-n))]_N = -x(n)$$

以上定义对 $X(k)$ 也适用。

2.2 离散傅立叶变换的定义及性质 (DFT)



2.2 离散傅立叶变换的定义及性质 (DFT)



2.2 离散傅立叶变换的定义及性质 (DFT)

记 $x(N-n)$ 为 $x(N-n)_N$

1) 奇偶序列的DFT保持奇偶性不变

若 $x(N-n) = \pm x(n)$

则 $X(N-k) = \pm X(k)$

2) 共轭复序列 $x^*(n) \leftrightarrow X^*(N-k)$

2.2 离散傅立叶变换的定义及性质 (DFT)

3) 复数序列的实部与虚部

$$x(n) = x_r(n) + jx_i(n)$$

$x_r(n) \leftrightarrow X_{ep}(k)$ 周期性共轭对称分量

$jx_i(n) \leftrightarrow X_{op}(k)$ 周期性共轭反对称分量

$$X(k) = X_{ep}(k) + X_{op}(k)$$

$$X_{ep}(N-k) = X_{ep}^*(k)$$

$$X_{op}(N-k) = -X_{op}^*(k)$$

2.2 离散傅立叶变换的定义及性质 (DFT)

推论：

实序列 $x(n) \leftrightarrow X(k)$ 共轭对称

虚序列 $jx(n) \leftrightarrow X(k)$ 共轭反对称

2.2 离散傅立叶变换的定义及性质 (DFT)

利用对称性质，节省DFT计算量：

两个实序列 $x_1(n), x_2(n)$

令 $x(n) = x_1(n) + jx_2(n)$ ，计算DFT，得 $X(k)$

根据对称性，有

$$X_1(k) = \frac{1}{2}[X(k) + X^*(N-k)]$$

$$X_2(k) = \frac{1}{2j}[X(k) - X^*(N-k)]$$

2.2 离散傅立叶变换的定义及性质 (DFT)

实偶序列 $x(n)$ ，周期性偶对称 $x(N-n) = x(n)$

$x(n)$ 实序列 $\rightarrow X(k) = X_{ep}(k)$

有 $X_{ep}(N-k) = X_{ep}^*(k)$

$x(n)$ 偶对称 $\rightarrow X_{ep}(N-k) = X_{ep}(k)$

故有 $X_{ep}(k) = X_{ep}^*(k)$

$\therefore X(k)$ 为实偶序列。

一般地，

$x(n)$	实偶	实奇	虚偶	虚奇
$X(k)$	实偶	虚奇	虚偶	实奇

2.2 离散傅立叶变换的定义及性质 (DFT)

(9) 延长序列的DFT

若 $x(n)$ 长为 N ，定义

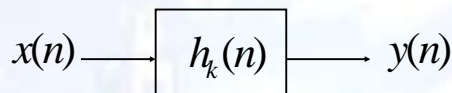
$$g(n) = \begin{cases} x(n) & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0 & N \leq n \leq L-1, L > N \end{cases}$$

则 $G(k) = X\left(\frac{N}{L}k\right), k = 0, 1, 2, \dots, L-1.$

2.3 DFT的滤波特性

2.3 DFT的滤波特性

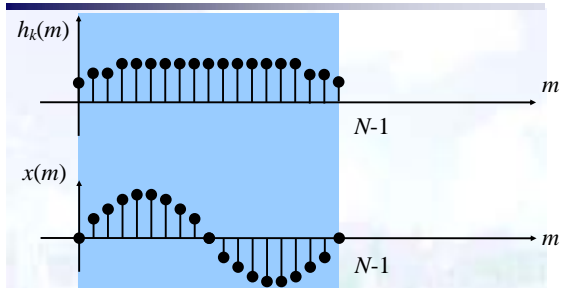
考虑一有限长序列 $x(n)$ 通过有限响应滤波器



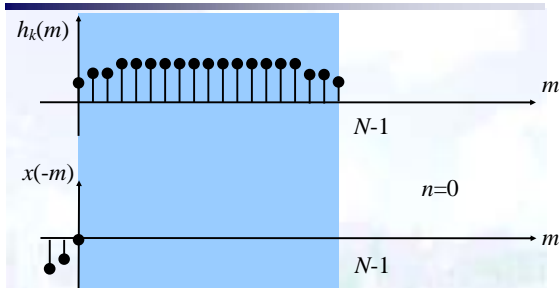
$$h_k(n) = \begin{cases} W_N^{(N-1-n)k} & n = 0, 1, 2, \dots, N-1 \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

$$y(n) = \sum_{m=0}^{N-1} h_k(m) x(n-m)$$

2.3 DFT的滤波特性

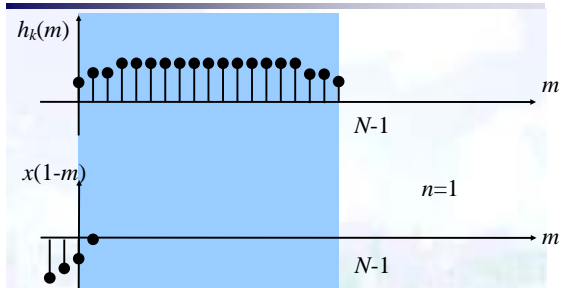


2.3 DFT的滤波特性



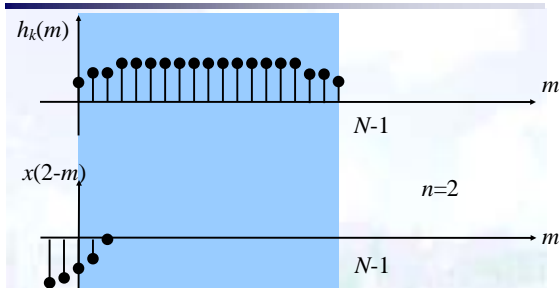
$$y(0) = h_k(0)x(0)$$

2.3 DFT的滤波特性



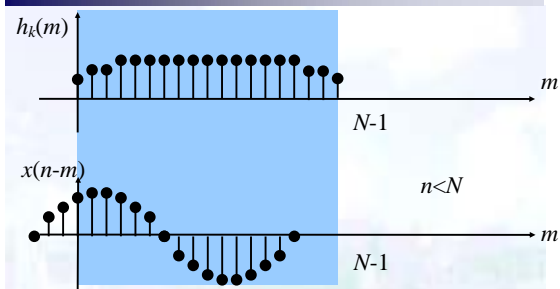
$$y(1) = h_k(0)x(1) + h_k(1)x(0)$$

2.3 DFT的滤波特性



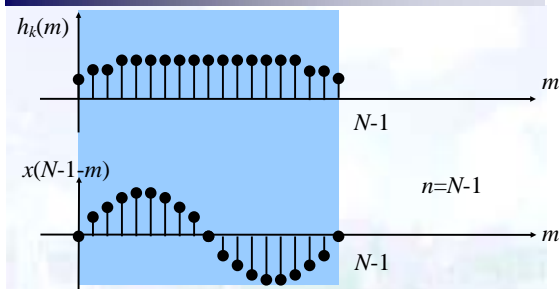
$$y(2) = h_k(0)x(2) + h_k(1)x(1) + h_k(2)x(0)$$

2.3 DFT的滤波特性



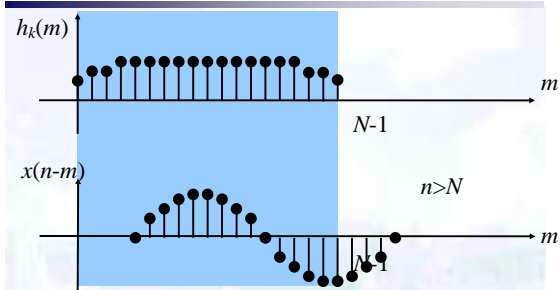
$$y(n) = h_k(0)x(n) + \dots + h_k(n-1)x(1) + h_k(n)x(0)$$

2.3 DFT的滤波特性



$$y(N-1) = \sum_{m=0}^{N-1} h_k(m)x(N-1-m)$$

2.3 DFT的滤波特性



$$y(n) = h_k(n-N+1)x(N-1) + \dots + h_k(N-1)x(n-N+1)$$

2.3 DFT的滤波特性

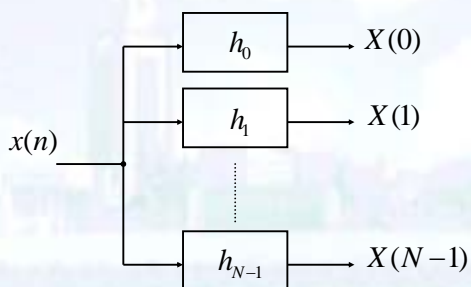
在 $n=N-1$ 时刻的输出为

$$\begin{aligned} y(N-1) &= \sum_{m=0}^{N-1} h_k(m)x(N-1-m) \\ &= \sum_{m=0}^{N-1} x(m)h_k(N-1-m) \\ &= \sum_{m=0}^{N-1} x(m)W_N^{mk} \\ &= X(k) \end{aligned}$$

序列 $x(n)$ 的DFT的一个值 $X(k)$ ，相当于把 $x(n)$ 加载到滤波器 $h_k(n)$ 上，在 $(N-1)$ 时刻的输出。

2.3 DFT的滤波特性

一个完整的DFT相当于 N 个特性不同的滤波器



2.3 DFT的滤波特性

$h_k(n)$ 的频域特性分析

对 $h_k(n)$ 作 Z 变换，

$$\begin{aligned} H_k(z) &= \sum_{n=0}^{N-1} h_k(n)z^{-n} \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} W_N^{(N-1-n)k} z^{-n} \\ &= W_N^{(N-1)k} \cdot \frac{1 - z^{-N} W_N^{-Nk}}{1 - z^{-1} W_N^{-k}} \end{aligned}$$

2.3 DFT的滤波特性

将 $W_N = e^{-j\frac{2\pi}{N}}$ 及 $z = e^{j\omega}$ 代入

得频域的幅度特性

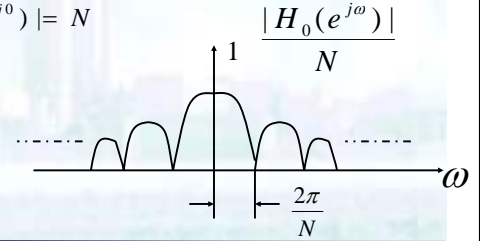
$$|H_k(e^{j\omega})| = \left| \frac{\sin \frac{N}{2}(\omega - \frac{2\pi}{N}k)}{\sin \frac{1}{2}(\omega - \frac{2\pi}{N}k)} \right|$$

2.3 DFT的滤波特性

特别地, $k=0$,

$$|H_0(e^{j\omega})| = \left| \frac{\sin \omega N / 2}{\sin \omega / 2} \right|$$

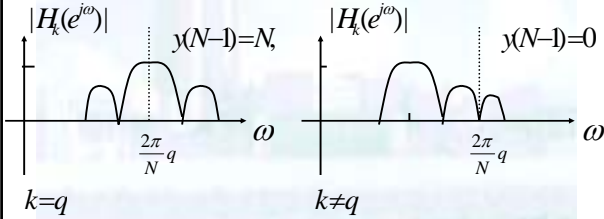
$$|H_0(e^{j0})| = N$$



2.3 DFT的滤波特性

选频特性

$$x(n) = e^{j\frac{2\pi}{N}qn} \quad \text{频率: } \frac{2\pi}{N}q$$



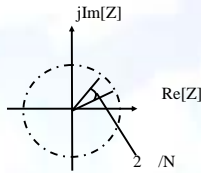
2.4 DFT与Z变换

2.4 DFT与Z变换

DFT是对Z变换在单位圆上的N点取样

$$X(z_k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)z^{-n} \Big|_{z=e^{j\frac{2\pi}{N}k}}$$

$$= \sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-j\frac{2\pi}{N}nk} \quad k = 0, 1, 2, \dots, N-1.$$



对Z变换的取样, 同样N点取样, 可以有不同的取法。上述取法, $Z_0=1$

2.4 DFT与Z变换

由取样值(即DFT)可近似重建Z变换

$$X(z) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)z^{-n} \quad \text{其中} x(n) \text{由IDFT给出}$$

$$X(z) = \sum_{k=0}^{N-1} X(k)\phi_k(z)$$

$$\text{内插函数} \quad \phi_k(z) = \frac{1}{N} \cdot \frac{1-z^{-N}}{1-W_N^{-k}z^{-1}}$$

2.4 DFT与Z变换

$$\begin{aligned} X(z) &= \sum_{n=0}^{N-1} \left(\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) W_N^{-kn} \right) z^{-n} \\ &= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} X(k) \sum_{k=0}^{N-1} (W_N^{-k} \cdot z^{-1})^n \\ &= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} X(k) \cdot \frac{1 - z^{-N}}{1 - W_N^{-k} z^{-1}} \end{aligned}$$

2.4 DFT与Z变换

在取样点 $z_k = e^{j\frac{2\pi}{N}k}$, $X(z_k) = X(k)$,

重建值就是取样值本身

在取样点之外, 可由内插公式近似求得任意一点 $X(z)$ 的值。

2.4 DFT与Z变换

在单位圆上有

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{k=0}^{N-1} X(k) \phi_k(e^{j\omega})$$

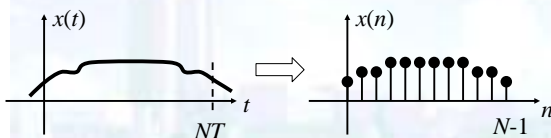
$x(n)$ 的频率响应也可由有限的DFT点来近似恢复重建

2.5 DFT分析要点

2.5 DFT分析要点

DFT对信号的分析过程

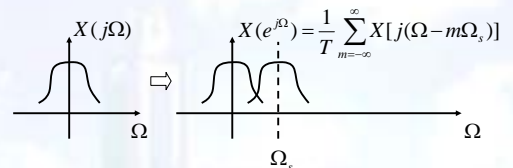
时域: 1) 离散化; 2) 信号截短, N 点



频域: $X(e^{j\omega})$ 离散化, $\Rightarrow X(k)$

2.5 DFT分析要点

一、时域取样



取样率控制:

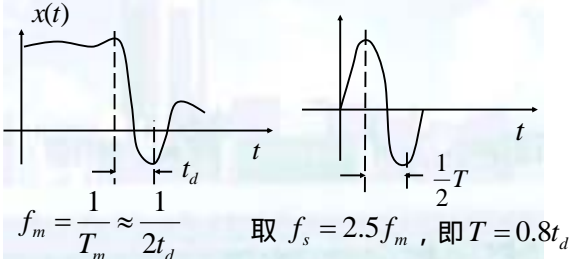
- 1) 取样率过低, 导致频谱混迭;
- 2) 较密的取样导致频域频谱周期延长;
- 3) 时域取样率 2倍信号最高频率

2.5 DFT分析要点

时域取样频率的确定

1) 频率未知信号

找出变化最快的相邻2点，以近似确定最高频率



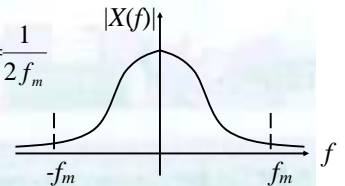
2.5 DFT分析要点

2) 频带无限信号

取 f_m , 使得总能量的98%左右落在频带宽度 $(-f_m, f_m)$ 内

$$\int_{-f_m}^{f_m} |X(f)|^2 df = 0.98 \int_{-\infty}^{\infty} |X(f)|^2 df$$

取 f_m 为最高频率 $T = \frac{1}{2f_m}$



2.5 DFT分析要点

二、频域取样

考虑连续信号 $x(t) \xleftrightarrow{F} X(j\Omega)$

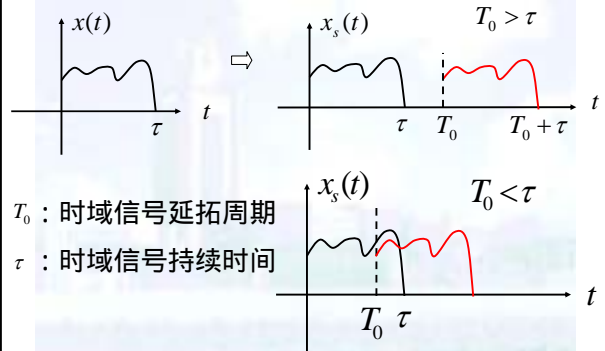
对 $X(j\Omega)$ 以取样间隔 Ω_0 进行取样:

$$X_s(j\Omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(j\Omega) \delta(\Omega - k\Omega_0)$$

$$\Rightarrow x_s(t) = \frac{1}{\Omega_0} \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(t - kT_0) \quad T_0 = \frac{2\pi}{\Omega_0}$$

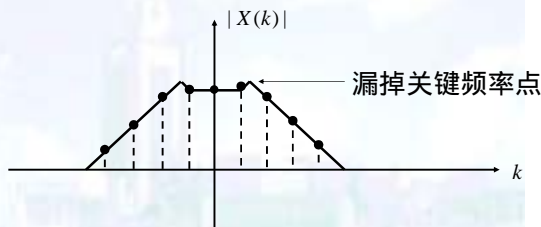
频率取样造成时域信号的周期延拓

2.5 DFT分析要点



2.5 DFT分析要点

造成时域混迭，在频域上的解释：栅栏效应



频域采样密度不够而导致

2.5 DFT分析要点

频域取样定理

时间受限信号，时长 τ ，当频域取样间隔满足

$$\Omega_0 \leq \frac{2\pi}{\tau}$$

能够从频谱样点 $X(jk\Omega_0)$ 恢复原连续频谱，

$$X(j\Omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(jk\Omega_0) \cdot \frac{\sin\left(\frac{\Omega}{\Omega_0} - k\right)\pi}{\left(\frac{\Omega}{\Omega_0} - k\right)\pi}$$

2.5 DFT分析要点

控制因素：频域取样间隔 Ω_0

频域取样导致时域信号周期延拓，
栅栏效应是否发生取决于频域取样密度

2.5 DFT分析要点

DFT情形

时域信号 $x(t)$ 时长有限，形成抽样序列 $x(n)$ ，
长度 $NT =$

$$\text{频谱周期 } \Omega_s = \frac{2\pi}{T}$$

频域取样点数仍为 N ，则频域取样间隔为

$$\Omega_0 = \frac{\Omega_s}{N} = \frac{2\pi}{NT} = \frac{2\pi}{\tau}$$

$$\text{时域信号延拓周期 } T_0 = \frac{2\pi}{\Omega_0} = NT$$

2.5 DFT分析要点

三、时域上的取样参数： T 与 N

1) 频域分辨率 $\Omega_0 = \frac{\Omega_s}{N} = \frac{2\pi}{NT}$

取决于时域信号采样范围 NT

- T 一定，增加采样点数 N ，
- = 》时域信号采样范围增大
- = 》频域分辨率提高

有限长序列补零处理，可提高频域分辨率，
不提供额外信息量

2.6 DFT的频谱泄漏问题

2.6 DFT的频谱泄漏问题

考虑正弦信号，频率 ω_1 $x(t) = e^{j\omega_1 t}$

对其取样

$$x(n) = e^{j\omega_1 nT} = e^{j\omega_1 n}, \quad \omega_1 = \Omega_1 T$$

作DFT,

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} e^{j(\omega_1 - \frac{2\pi}{N}k)n} = \frac{1 - e^{j\omega_1 N}}{1 - e^{j(\omega_1 - \frac{2\pi}{N}k)}}$$

2.6 DFT的频谱泄漏问题

若 $\omega_1 = \frac{2\pi}{N}q$, q 为正整数，

$$\text{则 } X(k) = \begin{cases} N & k = q \pmod{N} \\ 0 & k \neq q \pmod{N} \end{cases}$$

信号 $x(t)$ 的频率经过DFT后被正确分析。

$$\omega_1 = \frac{2\pi}{N} \cdot q \text{ 意味着什么?}$$

2.6 DFT的频谱泄漏问题

根据定义：

$$\Omega_1 = \frac{\omega_1}{T} = \frac{2\pi}{NT} \cdot q = \frac{2\pi}{T_0} \cdot q, \quad T_0 = NT \text{ 为样本长度。}$$

另一方面 $\Omega_1 = \frac{2\pi}{T_1}$ T_1 为正弦信号 $x(t)$ 的周期

$$\text{即 } T_0 = qT_1$$

对周期信号，取样本长度为信号周期的整数倍，DFT能够正确分析频率。

2.6 DFT的频谱泄漏问题

若 $\omega_1 \neq \frac{2\pi}{N} \cdot q$ 样本长度不是信号周期的整数倍

$$X(k) = \frac{e^{j\frac{1}{2}\omega_1 N} \sin \frac{1}{2}\omega_1 N}{e^{j(\omega_1 - \frac{2\pi}{N}k)} \sin \frac{1}{2}(\omega_1 - \frac{2\pi}{N}k)} \neq 0$$

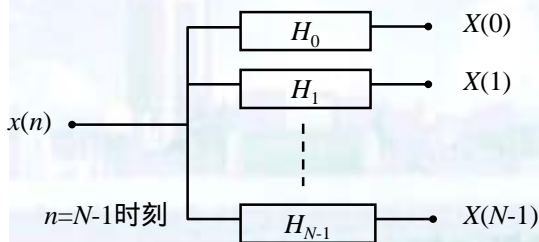
$$k=0, 1, 2, \dots, N-1$$

DFT不能够正确分析频率，各滤波器均有输出，产生频谱泄漏现象。

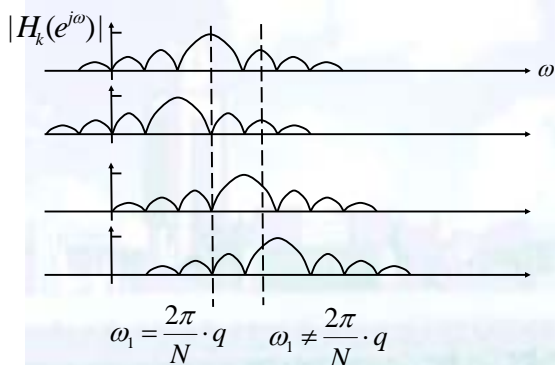
泄漏现象的发生：对信号的不当截断而引起

2.6 DFT的频谱泄漏问题

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-j\frac{2\pi}{N}nk} \quad K=0, 1, \dots, N-1$$

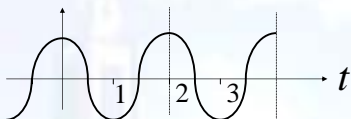


2.6 DFT的频谱泄漏问题



2.6 DFT的频谱泄漏问题

例： $x(t) = \cos \pi t$ $T_0 = 2$ $T_1 = 3$



从 $[0, T_0]$ 截取信号进行分析。

1) 把所截取的信号当作周期信号，

$$X(m\Omega_0) = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} \cos \pi t e^{-jm\Omega_0 t} dt$$

2.6 DFT的频谱泄漏问题

i) 取 $T_0 = 2$ ，得 $\Omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = \pi$ ，

$$X(m\Omega_0) = \frac{1}{2} \int_0^2 \cos \pi t e^{-jm\pi t} dt$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{2} & m = \pm 1 \\ 0 & m \neq \pm 1 \end{cases} \quad T_1 = 2,$$

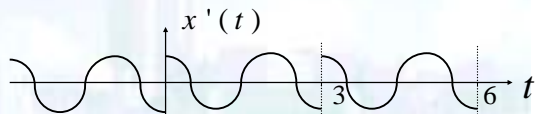
\therefore 信号 $x(t) = \cos \pi t$ 本身的周期 $T_0 = 2$

\therefore 当截取的样本长度 $T_0 = T_1$ 时，没有发生频谱泄漏，与前例一致。

2.6 DFT的频谱泄漏问题

ii)取 $T_0 = 3$, 则 $\Omega_0 = \frac{2\pi}{3}$

$$X'(m\Omega_0) = \frac{-j}{\pi} \cdot \frac{4m}{4m^2 - 9} \quad -\infty < m < +\infty$$



$x'(t)$ 频谱分量无限丰富, 产生了频谱泄漏, 不仅如此, 时域离散化时又造成频谱混迭。

2.6 DFT的频谱泄漏问题

2)把 $x'(t)$ 看成经过有限时宽的窗函数截取,

$$x'(t) = x(t)w_R(t)$$

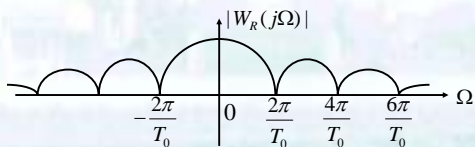
$$w_R(t) = \begin{cases} 1 & 0 \leq t \leq T_0 \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

$$X'(j\Omega) = \frac{1}{2\pi} X(j\Omega) * W_R(j\Omega)$$

2.6 DFT的频谱泄漏问题

$$W_R(j\Omega) = T_0 e^{-j\frac{1}{2}\Omega T_0} \cdot S_a\left(\frac{1}{2}\Omega T_0\right)$$

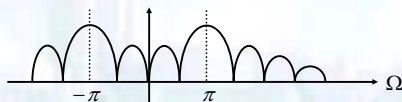
取样函数 $S_a(x) = \frac{\sin x}{x}$



2.6 DFT的频谱泄漏问题

已知 $X(j\Omega) = \pi[\delta(\Omega + \pi) + \delta(\Omega - \pi)]$

$$\text{得 } X'(j\Omega) = \frac{1}{2} W_R[j(\Omega + \pi)] + \frac{1}{2} W_R[(\Omega - \pi)]$$



从有限时宽的窗函数观点看, 泄露是由于窗函数宽阔的主瓣和副瓣引起的。

2.6 DFT的频谱泄漏问题

结论:

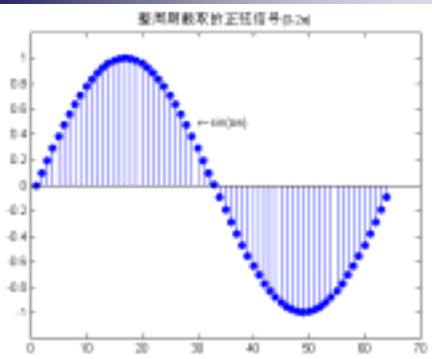
- (1) 频谱泄漏由信号截短引起
在DFT中有两个主要操作: 截短, 离散化
截短引起泄漏, 离散化对此没有贡献
- (2) 频谱泄漏导致信号在频谱上扩展, 又由时域取样造成频谱混叠
- (3) 非周期信号

时域有限, 频域无限

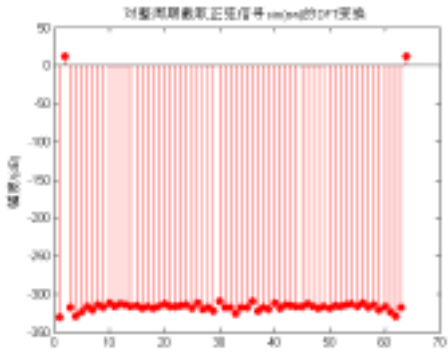
时域无限, 频域有限

所以, 用DFT分析信号, 在时域, 频域均作截短处理, 必然存在误差

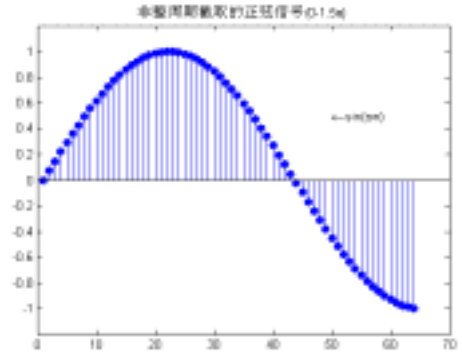
对正弦信号整数周期截取



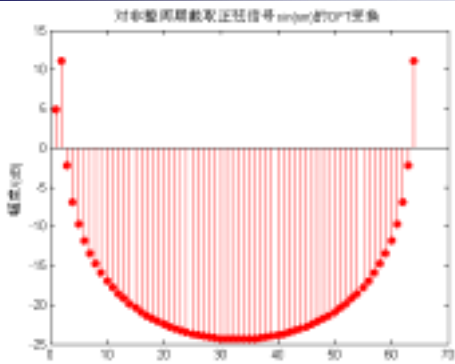
对正弦信号整数周期截取波形进行DFT变换



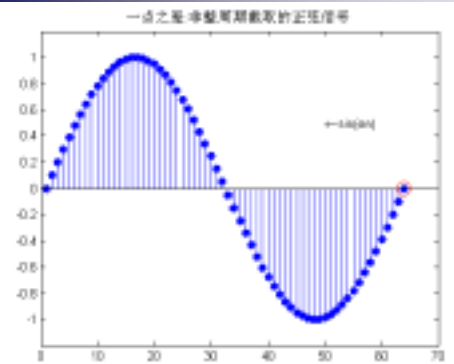
对正弦信号非整数周期截取波形进行DFT变换



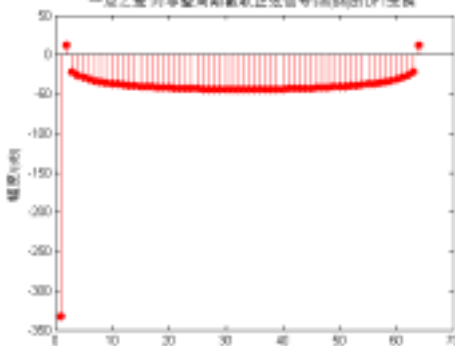
对正弦信号非整数周期截取波形进行DFT变换



和正弦信号整数周期截取只差一点



一点之差 对非整数周期截取正弦信号 $\sin(\omega_0 n)$ 的DFT变换



2.6 DFT的频谱泄漏问题

减小泄漏的考虑：

- 周期信号，选取样本长度 NT 等于信号周期 T_0 的整数倍。
- 有限长信号，选 NT 等于信号长。
- 无限长非周期信号，选取好的窗函数。

2.7 加权技术与窗函数

2.7 加权技术与窗函数

主要针对有限长数据截短引起的泄漏现象。

- 要求：(1)主瓣窄，且集中大部分能量；
(2)旁瓣低，能量随增加而迅速减小，提高阻带衰减。

2.7 加权技术与窗函数

1)矩形窗，双边表示：

N 为奇数 $w(n) = 1, n = -\frac{N-1}{2}, \dots, -1, 0, 1, \dots, \frac{N-1}{2}$

$$W_R(e^{j\omega}) = \frac{\sin N\omega/2}{\sin \omega/2}$$

N 为偶数 $w(n) = 1, n = -\frac{N}{2}, \dots, -1, 0, 1, \dots, \frac{N}{2} - 1$

$$W_R(e^{j\omega}) = \frac{\sin N\omega/2}{\sin \omega/2} \cdot e^{j\omega/2}$$

2.7 加权技术与窗函数

单边表示： N 取偶数，滞后 $\frac{N}{2}$, $w(n - \frac{N}{2})$

$$w(n) = 1, n = 0, 1, \dots, N-1$$

$$W_R(e^{j\omega}) = \frac{\sin N\omega/2}{\sin \omega/2} \cdot e^{-j\omega(N-1)/2}$$

$$W_{dB}(\omega) = 20 \lg \left| \frac{W(e^{j\omega})}{W(e^{j0})} \right|$$

主瓣宽 $\frac{4\pi}{N}$ (2倍基频) 旁瓣峰值-13dB

2.7 加权技术与窗函数

2)三角形窗 (Bartlett窗) 主瓣 $\frac{8\pi}{N}$, 旁瓣 -25dB

双边表示, N 为奇数

$$w(n) = 1 - \frac{|n|}{(N-1)/2}, n = 0, \pm 1, \dots, \pm \frac{N-1}{2}$$

$$W_R(e^{j\omega}) = \frac{2}{N-1} \cdot \left[\frac{\sin(N-1)\omega/4}{\sin \omega/2} \right]^2$$

2.7 加权技术与窗函数

单边表示, N 为奇数

$$w(n) = \begin{cases} \frac{n}{(N-1)/2} & n = 0, 1, 2, \dots, \frac{N-1}{2} \\ \frac{N-n-1}{(N-1)/2} & n = \frac{N+1}{2}, \dots, N-1 \end{cases}$$

$$W_R(e^{j\omega}) = \frac{2}{N-1} \cdot \left[\frac{\sin(N-1)\omega/4}{\sin \omega/2} \right]^2 e^{-j\omega(N-1)/2}$$

2.7 加权技术与窗函数

3) Hanning窗

双边表示, N 为偶数:

$$\begin{aligned} w(n) &= \cos^2\left(\frac{\pi}{N}n\right), \quad n = -\frac{N}{2}, \dots, -1, 0, 1, \dots, \frac{N}{2}-1 \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos \frac{2\pi}{N}n \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} e^{j\frac{2\pi}{N}n} + \frac{1}{4} e^{-j\frac{2\pi}{N}n} \end{aligned}$$

2.7 加权技术与窗函数

利用矩形窗的结果及频移定理

$$W(e^{j\omega}) = \frac{1}{2} W_R(e^{j\omega}) + \frac{1}{4} W_R[e^{j(\omega-\frac{2\pi}{N})}] + \frac{1}{4} W_R[e^{j(\omega+\frac{2\pi}{N})}]$$

这里

$$\begin{aligned} W_R(e^{j\omega}) &= \frac{\sin N\omega/2}{\sin \omega/2} e^{j\omega/2} = W_R(\omega) e^{j\omega/2} \\ W_R(\omega) &= \frac{\sin N\omega/2}{\sin \omega/2} \end{aligned}$$

2.7 加权技术与窗函数

$$\begin{aligned} W(e^{j\omega}) &= \frac{1}{2} W_R(e^{j\omega}) e^{j\frac{\omega}{2}} + \frac{1}{4} W_R(\omega - \frac{2\pi}{N}) e^{j\frac{1}{2}(\omega - \frac{2\pi}{N})} \\ &\quad + \frac{1}{4} W_R(\omega + \frac{2\pi}{N}) e^{j\frac{1}{2}(\omega + \frac{2\pi}{N})} \end{aligned}$$

当 N 较大时忽略相移 $e^{-j\frac{\pi}{N}}$ 及 $e^{j\frac{\pi}{N}}$ 的影响,

$$W(e^{j\omega}) \approx \left[\frac{1}{2} W_R(\omega) + \frac{1}{4} W_R(\omega - \frac{2\pi}{N}) + \frac{1}{4} W_R(\omega + \frac{2\pi}{N}) \right] e^{j\frac{\omega}{2}}$$

主瓣宽 $\frac{8\pi}{N}$, 旁瓣 -31dB

原理: 3个矩形窗在频域上移位, 抵消旁瓣。

2.7 加权技术与窗函数

单边表示:

$$\begin{aligned} w(n) &= \sin^2\left(\frac{\pi}{N}n\right), \quad n = 0, 1, 2, \dots, N-1 \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos \frac{2\pi}{N}n \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{4} e^{j\frac{2\pi}{N}n} - \frac{1}{4} e^{-j\frac{2\pi}{N}n} \end{aligned}$$

2.7 加权技术与窗函数

已知单边矩形窗的谱

$$W_R(e^{j\omega}) = W_R(\omega) e^{-j\frac{N-1}{2}\omega}$$

$$W(e^{j\omega}) = \left[\frac{1}{2} W_R(\omega) + \frac{1}{4} W_R(\omega - \frac{2\pi}{N}) e^{-j\frac{\pi}{N}} + \frac{1}{4} W_R(\omega + \frac{2\pi}{N}) e^{j\frac{\pi}{N}} \right] e^{-j\frac{N-1}{2}\omega}$$

忽略相移 $e^{-j\frac{\pi}{N}}$, $e^{j\frac{\pi}{N}}$

$$W(e^{j\omega}) \approx \left[\frac{1}{2} W_R(\omega) + \frac{1}{4} W_R(\omega - \frac{2\pi}{N}) + \frac{1}{4} W_R(\omega + \frac{2\pi}{N}) \right] e^{-j\frac{N-1}{2}\omega}$$

2.7 加权技术与窗函数

4) Hamming窗

单边表示

$$w(n) = 0.54 - 0.46 \cos \frac{2\pi}{N}n, \quad n = 0, 1, 2, \dots, N-1$$

幅度函数

$$W(\omega) = 0.54 W_R(\omega) + 0.23 \left[W_R(\omega - \frac{2\pi}{N}) + W_R(\omega + \frac{2\pi}{N}) \right]$$

主瓣 $\frac{8\pi}{N}$, 旁瓣 -41dB

2.7 加权技术与窗函数

5) Blackman窗

利用 k 个矩形窗谱，作线性组合

$$\text{双边表示: } w(n) = \sum_{m=0}^{k-1} a_m \cos\left(\frac{2\pi}{N} mn\right), \quad n=0, \pm 1, \dots, \pm \frac{N-1}{2}$$

单边表示:

$$\begin{aligned} w(n) &= \sum_{m=0}^{k-1} (-1)^m a_m \cos\left(\frac{2\pi}{N} mn\right), \quad n=0, 1, 2, \dots, N-1 \\ &= \sum_{m=0}^{k-1} (-1)^m a_m \frac{1}{2} \left(e^{j\frac{2\pi}{N} mn} + e^{-j\frac{2\pi}{N} mn} \right) \end{aligned}$$

2.7 加权技术与窗函数

利用频移定理

$$W(e^{j\omega}) = \sum_{m=0}^{k-1} (-1)^m \frac{a_m}{2} [W_R(e^{j(\omega - \frac{2\pi}{N}m)}) + W_R(e^{j(\omega + \frac{2\pi}{N}m)})]$$

$$\text{这里 } W_R(e^{j\omega}) = W_R(\omega) e^{-j\frac{N}{2}\omega}, \quad W_R(\omega) = \frac{\sin\omega(N+1)/2}{\sin\omega/2}$$

$$\begin{aligned} W(e^{j\omega}) &= \sum_{m=0}^{k-1} (-1)^m \frac{a_m}{2} [W_R(\omega - \frac{2\pi}{N}m) e^{jm\pi} \\ &\quad + W_R(\omega + \frac{2\pi}{N}m) e^{-jm\pi}] e^{-j\frac{N}{2}\omega} \end{aligned}$$

$$\because e^{jm\pi} = e^{-jm\pi} = (-1)^m$$

$$\therefore W(e^{j\omega}) = \sum_{m=0}^{k-1} \frac{a_m}{2} [W_R(\omega - \frac{2\pi}{N}m) + W_R(\omega + \frac{2\pi}{N}m)] e^{-j\frac{N}{2}\omega}$$

幅度函数

$$W(\omega) = \sum_{m=0}^{k-1} \frac{a_m}{2} [W_R(\omega - \frac{2\pi}{N}m) + W_R(\omega + \frac{2\pi}{N}m)]$$

随着 K 的上升，主瓣加宽，旁瓣降低

2.7 加权技术与窗函数

上式为3种窗的一般表达式，

$$\text{Hanning: } a_0 = 0.5, \quad a_1 = 0.5$$

$$\text{Hamming: } a_0 = 0.54, \quad a_1 = 0.46$$

$$\text{Blackman: } a_0 = 0.42, \quad a_1 = 0.5, \quad a_2 = 0.08$$

$$w(n) = 0.42 - 0.5 \cos\frac{2\pi}{N}n + 0.08 \cos\frac{4\pi}{N}n, \quad n=0, 1, 2, \dots, N-1$$

$$\begin{aligned} W(\omega) &= 0.42 W_R(\omega) + 0.25 [W_R(\omega - \frac{2\pi}{N}) + W_R(\omega + \frac{2\pi}{N})] \\ &\quad + 0.04 [W_R(\omega - \frac{4\pi}{N}) + W_R(\omega + \frac{4\pi}{N})] \end{aligned}$$

主瓣 $\frac{12\pi}{N}$ ，旁瓣 -57dB

2.7 加权技术与窗函数

	主瓣	旁瓣	最小阻带衰减
矩形	4 /N	-13dB	-21dB
三角	8 /N	-25	-25
Hanning	8 /N	-32	-44
Hamming	8 /N	-42	-53
Blackman	12 /N	-57	-74

同阶的各种窗函数幅度特性比较 N = 50

