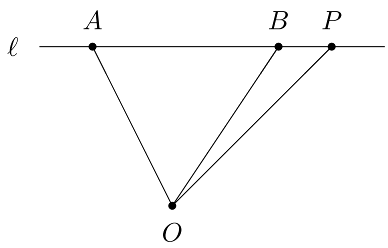
第一章　空间解析几何

§1.1　直线与平面

§1.1.1　直线的方程



在向量空间中，过任意不同两点A, B可作一条直线ℓ。对于直线ℓ上任意点P，由于向量$\overrightarrow{AP}//\overrightarrow{AB}$，故有实数$t$使得$\overrightarrow{AP} = t\cdot\overrightarrow{AB}$。于是得到等式

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + t\cdot\overrightarrow{AB} \tag{1.1}$$

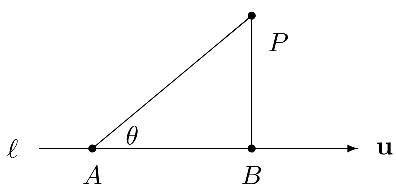
当t取遍所有实数时，等式(1.1)给出直线ℓ上的所有点。等式(1.1)称为直线ℓ的**参数方程**，非零向量$\overrightarrow{AB}$称为直线ℓ的**方向向量**，而t称为**参数**。设点A的坐标为(a_1, a_2, a_3)，$\overrightarrow{AB}$的坐标为(u_1, u_2, u_3)，点P的坐标为(x, y, z)，于是直线ℓ的参数方程可写成坐标形式

$$\begin{cases} x = a_1 + u_1 t \\ y = a_2 + u_2 t \\ z = a_3 + u_3 t \end{cases} \tag{1.2}$$

从方程(1.2)中消去参数t，则可得到直线ℓ的**点向式方程**

$$\frac{x-a_1}{u_1} = \frac{y-a_2}{u_2} = \frac{z-a_3}{u_3} \tag{1.3}$$

§1.1.2　点到直线的距离

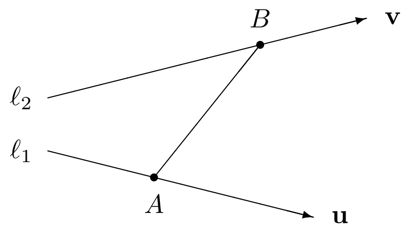


设直线ℓ过点A，方向向量$\mathbf{u}$，P为空间中任意一点。过点P作直线ℓ的垂线，垂足为B。于是，点P到直线ℓ的距离

$$|\overrightarrow{BP}| = |\overrightarrow{AP}|\sin\theta = |\overrightarrow{AP} - \frac{\mathbf{u}\cdot\overrightarrow{AP}}{\mathbf{u}\cdot\mathbf{u}}\mathbf{u}| = \frac{|\mathbf{u}\times\overrightarrow{AP}|}{|\mathbf{u}|} \tag{1.4}$$

§1.1.3 两直线的位置关系

向量空间中的任意两条直线ℓ_1和ℓ_2，它们可能共面（平行、相交、重合）或异面。



设ℓ_1过点$A(a_1,a_2,a_3)$，方向向量$\mathbf{u}=(u_1,u_2,u_3)$；ℓ_2过点$B(b_1,b_2,b_3)$，方向向量$\mathbf{v}=(v_1,v_2,v_3)$。两条直线的点向式方程分别为

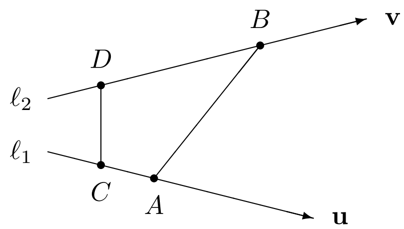
$$\ell_1:\frac{x-a_1}{u_1}=\frac{y-a_2}{u_2}=\frac{z-a_3}{u_3},\qquad \ell_2:\frac{x-b_1}{v_1}=\frac{y-b_2}{v_2}=\frac{z-b_3}{v_3}$$

ℓ_1与ℓ_2共面的充分必要条件是$\mathbf{u},\mathbf{v},\overrightarrow{AB}$共面，即

$$\mathbf{u}\times\mathbf{v}\cdot\overrightarrow{AB}=0 \tag{1.5}$$

ℓ_1和ℓ_2的方向向量$\mathbf{u}$和$\mathbf{v}$所夹的锐角或直角ϕ，称为两直线ℓ_1和ℓ_2的**夹角**。

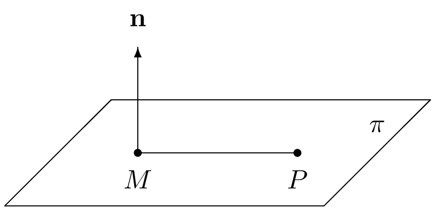
设点C,D分别在ℓ_1和ℓ_2上，并且直线CD与ℓ_1,ℓ_2都垂直，直线CD称为两直线ℓ_1和ℓ_2的**公垂直线**，公垂线段CD的长度$|CD|$称为两直线ℓ_1和ℓ_2的**距离**。



当ℓ_1和ℓ_2平行时，ℓ_1和ℓ_2的距离就等于点B到ℓ_1的距离$\frac{|\mathbf{u}\times\overrightarrow{AB}|}{|\mathbf{u}|}$。当$\ell_1$和$\ell_2$不平行时，因为$CD$垂直于$\ell_1$和$\ell_2$，所以$\overrightarrow{CD}//\mathbf{u}\times\mathbf{v}$，$\overrightarrow{CD}$为$\overrightarrow{AB}$ 在$\mathbf{u}\times\mathbf{v}$方向上的投影,

$$|CD|=\frac{|\mathbf{u}\times\mathbf{v}\cdot\overrightarrow{AB}|}{|\mathbf{u}\times\mathbf{v}|} \tag{1.6}$$

§1.1.4 平面的方程



在向量空间中，过任意一点M有唯一的平面π与给定的非零向量$\mathbf{n}$垂直。对于平面π上任意点P，都有$\overrightarrow{MP} \perp \mathbf{n}$，即

$$\overrightarrow{MP} \cdot \mathbf{n} = 0 \tag{1.7}$$

反之，满足等式(1.7)的点P一定在平面π上。等式(1.7)称为平面π的**点法式方程**，非零向量$\mathbf{n}$称为平面π的**法向量**。设点M的坐标为(m_1, m_2, m_3)，$\mathbf{n}$的坐标为(n_1, n_2, n_3)，点P的坐标为(x, y, z)，于是方程(1.7)可写成坐标形式

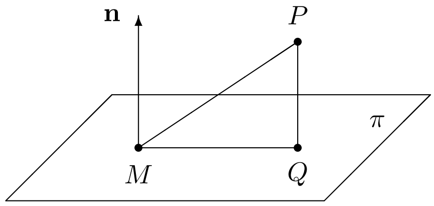
$$n_1(x - m_1) + n_2(y - m_2) + n_3(z - m_3) = 0 \tag{1.8}$$

将方程(1.8)展开合并，又可得平面π的**一般方程**

$$Ax + By + Cz + D = 0 \tag{1.9}$$

其中$A = n_1$, $B = n_2$, $C = n_3$, $D = -(m_1n_1 + m_2n_2 + m_3n_3)$。

§1.1.5　点到平面的距离



设平面π的一般方程为$Ax + By + Cz + D = 0$，法向量$\mathbf{n} = (A, B, C)$，$M(x_0, y_0, z_0)$为平面π上任意一点，$P(x, y, z)$为空间中任意一点。过点P作平面π的垂线，垂足为Q。点P到平面π的距离

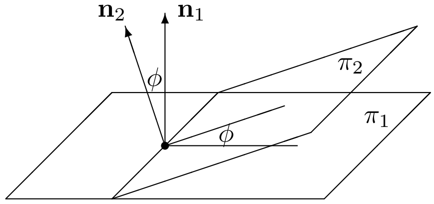
$$|\overrightarrow{QP}| = \frac{|\mathbf{n} \cdot \overrightarrow{MP}|}{|\mathbf{n}|} = \frac{|A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0)|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

因为点Q在平面π上，所以$Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0$，由此得

$$|\overrightarrow{QP}| = \frac{|Ax + By + Cz + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \tag{1.10}$$

§1.1.6　两平面的位置关系

向量空间中的任意两个平面π_1和π_2，它们可能平行、相交或重合。



设两平面的一般方程分别为

$$\pi_1: A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0, \qquad \pi_2: A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$$

π_1的法向量$\mathbf{n}_1=(A_1,B_1,C_1)$和$\pi_2$的法向量$\mathbf{n}_2=(A_2,B_2,C_2)$所夹的锐角或直角$\phi$，称为两平面$\pi_1$和$\pi_2$的**夹角**。

当$\mathbf{n}_1$和$\mathbf{n}_2$共线时，两平面平行或重合。若$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}\neq\frac{D_1}{D_2}$则两平面平行，若$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}=\frac{D_1}{D_2}$则两平面重合。此时，平行平面$\pi_1$和$\pi_2$的距离就等于$\pi_2$上任意一点到平面$\pi_1$的距离。

当$\mathbf{n}_1$和$\mathbf{n}_2$不共线时，两平面相交于一条直线ℓ。方程组

$$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \end{cases} \tag{1.11}$$

也称为直线ℓ的**一般方程**。

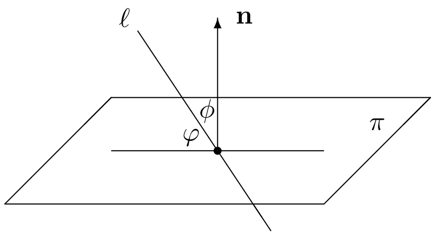
通过一条直线可以作无限多个平面，因此总是可以表示成为两个平面的交线。由已知直线的点向式方程(1.3)（假设$u_1\neq 0$），可以很容易地写出直线的一般方程$\begin{cases} u_2x-u_1y+(u_1a_2-u_2a_1)=0 \\ u_3x-u_1z+(u_1a_3-u_3a_1)=0 \end{cases}$。

由直线的一般方程(1.11)求直线的点向式方程，则应当首先求出方程组(1.11)的一个解即直线上的一个点(a_1,a_2,a_3)和直线的方向向量$\mathbf{u}=\mathbf{n}_1\times\mathbf{n}_2$，然后代入到点向式方程(1.3)中。

§1.2.3中介绍了求两条异面直线ℓ_1和ℓ_2的距离的方法，现在给出求ℓ_1和ℓ_2的公垂线ℓ的方法。设直线ℓ_1和ℓ_2的方向分别为$\mathbf{u}$和$\mathbf{v}$，则$\mathbf{u}\times\mathbf{v}$为$\ell$的方向向量，$\ell_1$和$\ell$张成的平面$\pi_1$具有法向量$(\mathbf{u}\times\mathbf{v})\times\mathbf{u}$，$\ell_2$和$\ell$张成的平面$\pi_2$具有法向量$(\mathbf{u}\times\mathbf{v})\times\mathbf{v}$。于是可以先求出$\pi_1$和$\pi_2$的方程，$\ell$正是$\pi_1$和$\pi_2$的交线。当然，也可以先求出$\ell$在$\ell_1,\ell_2$上的垂足，然后求出$\ell$的方程。

§1.1.7 直线和平面的位置关系

向量空间中的任意一条直线ℓ和一个平面π，它们可能平行、相交或直线在平面上。



设它们的方程分别为

$$\ell: \frac{x-a_1}{u_1}=\frac{y-a_2}{u_2}=\frac{z-a_3}{u_3}, \qquad \pi: Ax+By+Cz+D=0$$

设ℓ的方向向量$\mathbf{u}=(u_1,u_2,u_3)$和π的法向量$\mathbf{n}=(A,B,C)$所夹的锐角或直角为ϕ，则$\varphi=\frac{\pi}{2}-\phi=\arcsin\frac{|\mathbf{u}\cdot\mathbf{n}|}{|\mathbf{u}||\mathbf{n}|}$称为直线$\ell$和平面$\pi$的**夹角**。

当$\mathbf{u}$和$\mathbf{n}$不垂直时，ℓ和π有唯一的交点，可通过解线性方程组求得交点的坐标。当$\mathbf{u}$和$\mathbf{n}$垂直时，若$Aa_1+Ba_2+Ca_3+D=0$，则ℓ和π有公共点(a_1,a_2,a_3)，ℓ在π上；若$Aa_1+Ba_2+Ca_3+D\neq 0$，则ℓ和π平行。

§1.2 空间曲线与曲面

§1.2.1 曲线和曲面的方程

$$P(t)=(x(t),y(t),z(t)) \tag{1.12}$$

表示一条空间曲线，(1.12)称为该曲线的**参数方程**；

$$P(s,t)=(x(s,t),y(s,t),z(s,t)) \tag{1.13}$$

表示一个曲面，(1.13)称为该曲面的**参数方程**；满足

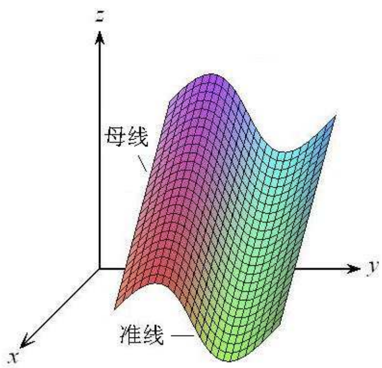
$$f(x,y,z)=0 \tag{1.14}$$

的点(x,y,z)的集合形成一个曲面，(1.14)称为该曲面的**一般方程**；满足

$$\begin{cases} f(x,y,z)=0 \\ g(x,y,z)=0 \end{cases} \tag{1.15}$$

的点(x,y,z)的集合则是两个曲面$f(x,y,z)=0$和$g(x,y,z)=0$的交线，(1.15)称为该曲线的**一般方程**。

§1.2.2 柱面

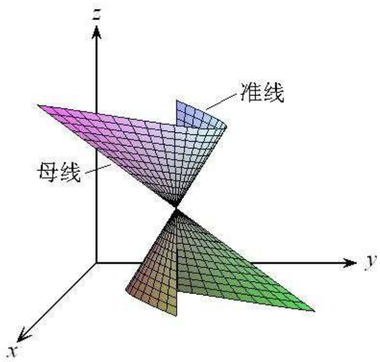


由一族平行直线形成的曲面叫**柱面**，这些直线叫做柱面的**母线**。柱面上与每条母线都相交的一条曲线叫做柱面的一条**准线**。过准线上的各点作平行于母线方向的直线，或者将一条母线沿着准线作平行移动，又或者将一条准线沿

着母线作平行移动，都可以得到柱面。一般地，设母线的方向$\mathbf{u}=(u_1,u_2,u_3)$，准线的参数方程$\mathbf{p}(t)=(p_1(t),p_2(t),p_3(t))$，则柱面具有参数方程

$$P(s,t)=s\ \mathbf{u}+\mathbf{p}(t) \tag{1.16}$$

§1.2.3　锥面

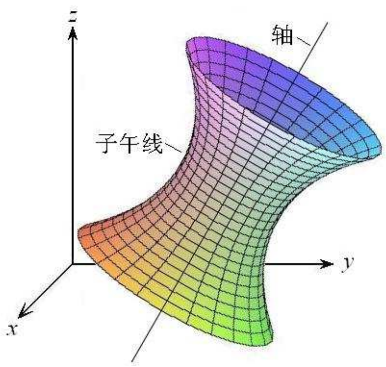


由一族经过给定点的直线形成的曲面叫**锥面**，这些直线叫做锥面的**母线**，那个定点叫做锥面的**顶点**。锥面上与每条母线都相交的但不经过顶点的一条曲线叫做锥面的一条**准线**。把准线上的各点与顶点用直线联结起来，就可以得到锥面。一般地，设顶点$A(a_1,a_2,a_3)$，准线的参数方程$\mathbf{p}(t)=(p_1(t),p_2(t),p_3(t))$，则锥面具有参数方程

$$P(s,t)=(1-s)A+s\ \mathbf{p}(t) \tag{1.17}$$

设$f(x,y,z)$是一个齐次多项式，如果$f(x,y,z)=0$，则对任意实数t都有$f(tx,ty,tz)=0$。因此，$f(x,y,z)=0$在空间中表示一个顶点在原点的锥面。它与任意不过原点的平面的交线都是它的一条准线。

§1.2.4　旋转面



由空间中的一条曲线γ绕着一条直线ℓ旋转而产生的曲面叫做**旋转面**，γ叫做旋转面的**子午线**，ℓ叫做旋转面的**轴**。

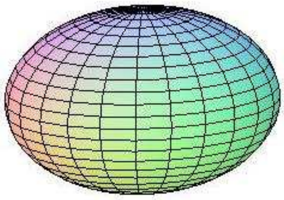
§1.3 二次曲面简介

一般方程为三元二次多项式，具有形式

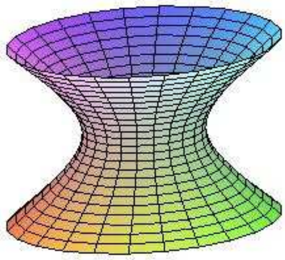
$$a_{11}x^2 + a_{12}xy + a_{13}xz + a_{22}y^2 + a_{23}yz + a_{33}z^2 + a_1x + a_2y + a_3z + a = 0$$

的曲面称为**二次曲面**。常见的二次曲面有

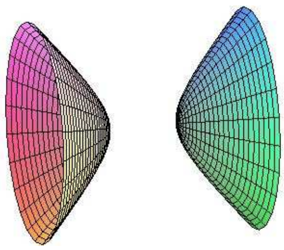
1. 椭球面 $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1 \quad (a > 0, b > 0, c > 0)$



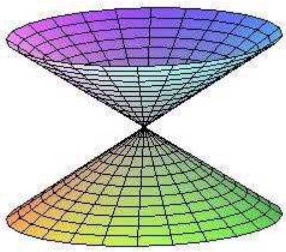
2. 单叶双曲面 $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 1 \quad (a > 0, b > 0, c > 0)$



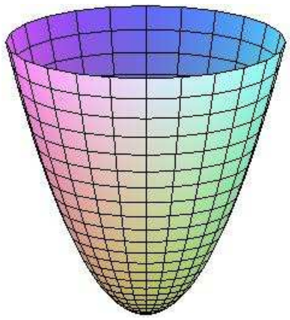
3. 双叶双曲面 $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 1 \quad (a > 0, b > 0, c > 0)$



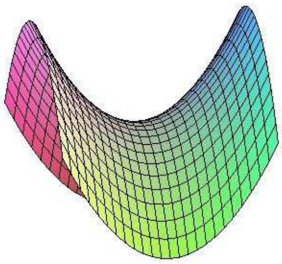
4. 二次锥面 $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 0 \quad (a > 0, b > 0, c > 0)$



5. 椭圆抛物面　$z = \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} \quad (a>0, b>0)$

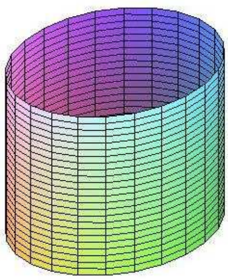


6. 双曲抛物面　$z = \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} \quad (a>0, b>0)$

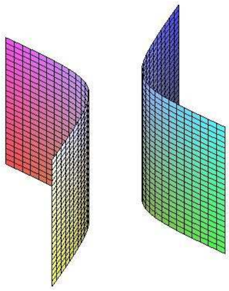


双曲抛物面俗称马鞍面，可以被看作是Oyz平面上的抛物线$z=-\frac{y^2}{b^2}$沿着Oxz平面上的抛物线$z=\frac{x^2}{a^2}$平行滑动而成。

7. 椭圆柱面　$\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1 \quad (a>0, b>0)$



8. 双曲柱面　$\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1 \quad (a>0, b>0)$



9. 抛物柱面　$y^2 = 2px \quad (p > 0)$