第零章　预备知识

§0.1　向量的线性运算

§0.1.1　向量及其表示

向量: 速度, 加速度, 力等等. 用一个有向线段来表示它. 以 A 为起点,B 为终点的有向线段所表示的向量记为 $\overrightarrow{AB}$(图 7.5). 还常用小写的粗体字母 $\mathbf{a},\mathbf{b},\cdots$ 来记向量.

如果两个向量的大小相等、方向相同, 就称这两个向量是相等的. 如图 7.5 中, $\overrightarrow{AB}$ 和 $\overrightarrow{A'B'}$ 是相等的向量, 记作

$$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{A'B'}.$$

自由向量: 能平移至任意起点的向量.

相反向量: 两个向量的大小相等而方向相反.

负向量.

向量模及其向量模的表示.

§0.1.2　向量的线性运算

如果两个向量是相反向量, 则其和显然为零向量, 就是

$$\mathbf{a}+(-\mathbf{a})=(-\mathbf{a})+\mathbf{a}=0.$$

显然, 还有

$$\mathbf{a}+0=0+\mathbf{a}=\mathbf{a}.$$

从三角形法则容易证明向量的加法满足交换律, 即

$$\mathbf{a}+\mathbf{b}=\mathbf{b}+\mathbf{a}.$$

从图 7.8 不难看出, 向量的加法满足结合律

$$\mathbf{a}+(\mathbf{b}+\mathbf{c})=(\mathbf{a}+\mathbf{b})+\mathbf{c},$$

因而可以略去括号而记

$$\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}=(\mathbf{a}+\mathbf{b})+\mathbf{c}=\mathbf{a}+(\mathbf{b}+\mathbf{c}).$$

向量的减法与数量的减法一样, 定义为加法的逆运算.

向量与数的乘积.

设有向量 $\mathbf{a}$ 和数 λ, 则其乘积表示这样一个向量, 它的模等于向量 $\mathbf{a}$ 的模之 $|\lambda|$ 倍, 当 λ 大于零时它与 $\mathbf{a}$ 同向, 当 λ 小于零时与 $\mathbf{a}$ 反向 (图 7.9).

由定义可知

$$0\mathbf{a}=\mathbf{0}.$$

显然又有

$$(-1)\mathbf{a}=-\mathbf{a}.$$

向量的线性组合.

利用向量与数的乘积, 向量 $\mathbf{a}$ 可以表示为

$$\mathbf{a}=|\mathbf{a}|\mathbf{a}^0,$$

其中 $\mathbf{a}^0$ 表示与 $\mathbf{a}$ 同向的单位向量. 由此得到

$$\mathbf{a}^0=\frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|}.$$

即一个不为零的向量除以它的模后是与它同向的单位向量.

向量与数的乘积具有以下性质.

设 $\mathbf{a}$ 与 $\mathbf{b}$ 是给定的两个向量, 而 λ 及 μ 是任意常数, 则有

$$\begin{aligned}&(\lambda+\mu)\mathbf{a}=\lambda\mathbf{a}+\mu\mathbf{a};\\&\lambda(\mu\mathbf{a})=\mu(\lambda\mathbf{a})=(\lambda\mu)\mathbf{a};\\&\lambda(\mathbf{a}+\mathbf{b})=\lambda\mathbf{a}+\lambda\mathbf{b}.\end{aligned}$$

§0.1.3 向量的共线与共面

向量共线, 向量共面.(零向量和任一个向量共线.)

向量 $\mathbf{a},\mathbf{b}$ 共线的充分必要条件是, 有实数 λ, 使 $\mathbf{a}=\lambda\mathbf{b}$ 或 $\mathbf{b}=\lambda\mathbf{a}$.

向量 a,b,c 共面的充分必要条件是: 其中一个向量可以表成其余二个向量的线性组合.

§0.2 坐标系

在空间中, 任取一点 O, 从点 O 画三条互相垂直的直线, 依次记为 OX,OY,OZ. 这样就得到一个直角坐标系. 如果在坐标轴 Ox,Oy,Oz 上以 O 为起点分别取三个单位向量 i,j,k, 其方向与轴的正方向相同, 这些单位向量称为坐标系 $Oxyz$ 的基本单位向量.

给定向量 $\mathbf{a}$, 过向量 $\mathbf{a}$ 的终点 A 作三平面分别与坐标平面平行, 且与各坐标轴交于点 X,Y,Z. 易知

$$\overrightarrow{OX}=a_1i,\ \overrightarrow{OY}=a_2j,\ \overrightarrow{OZ}=a_3k.$$

由向量加法的三角形规则可得

$$\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{PA}=\overrightarrow{OX}+\overrightarrow{XP}+\overrightarrow{PA}=\overrightarrow{OX}+\overrightarrow{OY}+\overrightarrow{OZ},$$

即

$$\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3) = a_1 i + a_2 j + a_3 k.$$

它就是 $\mathbf{a}$ 按基本单位向量的分解式. 应用这个分解式, 向量的加法, 减法及向量与数的乘积就可归结为其坐标的相应运算. 事实上, 设 $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3), \mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$, 而 λ 是一常数, 则有

$$\mathbf{a} = a_1 i + a_2 j + a_3 k,\ \mathbf{b} = b_1 i + b_2 j + b_3 k.$$

从而得到

$$\begin{aligned}\mathbf{a} \pm \mathbf{b} &= (a_1 \pm b_1) i + (a_2 \pm b_2) j + (a_3 \pm b_3) k \\ &= (a_1 \pm b_1, a_2 \pm b_2, a_3 \pm b_3); \\ \lambda \mathbf{a} &= \lambda a_1 i + \lambda a_2 j + \lambda a_3 k = (\lambda a_1, \lambda a_2, \lambda a_3).\end{aligned}$$

例0.2.1. 已知两点 $A(a_1, a_2, a_3), B(b_1, b_2, b_3)$, 求向量 $\overrightarrow{AB}$ 的坐标.

解 如图 7.13, 作向量 $\overrightarrow{OA}$ 与 $\overrightarrow{OB}$, 则

$$\overrightarrow{OA} = (a_1, a_2, a_3), \quad \overrightarrow{OB} = (b_1, b_2, b_3).$$

所以

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = (b_1 - a_1, b_2 - a_2, b_3 - a_3).$$

就是说向量 $\overrightarrow{AB}$ 的坐标等于终点 B 的坐标减去起点 A 的坐标. □

例0.2.2. 设点 P 把有向线段 $\overrightarrow{AB}$ 分成定比 λ, 即有 $\frac{AP}{PB} = \lambda$. 若已知端点 A 和 B 的坐标为 (x_1, y_1, z_1) 和 (x_2, y_2, z_2), 求分点 P 的坐标 (x, y, z).

解 由题设可知

$$\overrightarrow{AP} = \lambda \overrightarrow{PB}.$$

若将 A, P, B 各点与原点 O 连成向量, 则有

$$\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OA} = \lambda (\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OP}).$$

由此得到

$$\overrightarrow{OP} = \frac{1}{1+\lambda} (\overrightarrow{OA} + \lambda \overrightarrow{OB}).$$

因为

$$\overrightarrow{OA} = x_1 i + y_1 j + z_1 k,\ \overrightarrow{OB} = x_2 i + y_2 j + z_2 k,\ \overrightarrow{OP} = x i + y j + z k,$$

代入后给出

$$x i + y j + z k = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda} i + \frac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda} j + \frac{z_1 + \lambda z_2}{1+\lambda} k.$$

比较 i, j, k 的对应系数即得

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda},\ y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda},\ z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1+\lambda}.$$

这就是空间线段的定比分点公式. 特别地, 线段中点的坐标为

$$x=\frac{x_1+x_2}{2},\ y=\frac{y_1+y_2}{2},\ z=\frac{z_1+z_2}{2}. \qquad \square$$

设向量 $\mathbf{a}=(a_1,a_2,a_3)$ 的起点在原点, 这时终点 A 的坐标就是 (a_1,a_2,a_3), 由空间两点的距离公式得

$$|\mathbf{a}|=OA=\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}.$$

§0.3 向量的内积

§0.3.1 内积的定义

定义0.3.1. 两个向量的内积是一个数量, 它的大小是这两个向量的模与其夹角的余弦的乘积. 通常用记号 $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$ 表示向量 $\mathbf{a}$ 与 $\mathbf{b}$ 的内积.

如果 $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=0$ 称 $\mathbf{a}$ 与 $\mathbf{b}$ 正交.

设它们的夹角为 θ , 按定义有

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=|\mathbf{a}||\mathbf{b}|\cos\theta.$$

§0.3.2 内积的性质

1. $\mathbf{a}$ 与 $\mathbf{b}$ 正交的充分必要条件是 $\mathbf{a},\mathbf{b}$ 之一为零向量或它们是互相垂直的非零向量.

2. 向量的内积满足交换律

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=\mathbf{b}\cdot\mathbf{a}. \qquad \square$$

3. 向量的内积满足分配律

$$(\mathbf{a}+\mathbf{b})\cdot\mathbf{c}=\mathbf{a}\cdot\mathbf{c}+\mathbf{b}\cdot\mathbf{c}.$$

4. 向量的内积与数的乘积满足结合律

$$(\lambda\mathbf{a})\cdot\mathbf{b}=\lambda(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}).$$

§0.3.3 直角坐标系下内积的计算

设给定两个向量

$$\mathbf{a}=a_1i+a_2j+a_3k,\quad \mathbf{b}=b_1i+b_2j+b_3k,$$

则有

$$\begin{aligned}\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}&=(a_1i+a_2j+a_3k)\cdot(b_1i+b_2j+b_3k)\\&=a_1b_1(i\cdot i)+a_1b_2(i\cdot j)+a_1b_3(i\cdot k)\end{aligned}$$

$$+a_2b_1(j\cdot i)+a_2b_2(j\cdot j)+a_2b_3(j\cdot k)$$
$$+a_3b_1(k\cdot i)+a_3b_2(k\cdot j)+a_3b_3(k\cdot k).$$

因为 i,j,k 是互相垂直的单位向量, 所以

$$i\cdot i=1,\ j\cdot j=1,\ k\cdot k=1,$$
$$i\cdot j=0,\ i\cdot k=0,\ k\cdot j=0.$$

从而得到

$$a\cdot b=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3.$$

这就是说, 两个向量的内积等于它们对应坐标乘积之和.

特别当 $\mathbf{a}=\mathbf{b}$ 时, 有

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{a}=a_1^2+a_2^2+a_3^2$$

但 $\mathbf{a}\cdot\mathbf{a}=|\mathbf{a}|^2$, 所以

$$|\mathbf{a}|=\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}.$$

这与 7.2.3 中导出的向量模的计算公式完全一致.

设 $\mathbf{a}=(a_1,a_2,a_3)$ 与 $\mathbf{b}=(b_1,b_2,b_3)$ 之间的夹角为 θ, 则由内积的定义可得

$$\cos\theta=\frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{|\mathbf{a}||\mathbf{b}|}=\frac{a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}\sqrt{b_1^2+b_2^2+b_3^2}}.$$

由于

$$(\mathbf{a}+\mathbf{b})^2=\mathbf{a}^2+\mathbf{b}^2+2\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=|\mathbf{a}|^2+|\mathbf{b}|^2+2|\mathbf{a}||\mathbf{b}|\cos\theta\le(|\mathbf{a}|+|\mathbf{b}|)^2$$

所以有三角形不等式

$$|\mathbf{a}|+|\mathbf{b}|\ge|\mathbf{a}+\mathbf{b}|.$$

例0.3.1. 证明 Cauchy 不等式

$$(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3)^2\le(a_1^2+a_2^2+a_3^2)(b_1^2+b_2^2+b_3^2).$$

证 设 $\mathbf{a}=(a_1,a_2,a_3)$, $\mathbf{b}=(b_1,b_2,b_3)$ 则有

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3,$$
$$|\mathbf{a}|^2=a_1^2+a_2^2+a_3^2,\ \ |\mathbf{b}|^2=b_1^2+b_1^2+b_3^2.$$

由内积的定义 $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=|\mathbf{a}||\mathbf{b}|\cos\theta$ 及 $|\cos\theta|\le1$ 推知

$$(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})^2\le|\mathbf{a}|^2|\mathbf{b}|^2.$$

把它写成坐标的形式, 即得欲证的不等式. □

§0.4 向量的外积

§0.4.1 外积的定义

定义0.4.1. 两个向量 $\mathbf{a}$ 与 $\mathbf{b}$ 的外积是向量 $\mathbf{c}$, 它满足:

(1) 若 $\mathbf{a}$ 与 $\mathbf{b}$ 的夹角为 θ, 则

$$|\mathbf{c}| = |\mathbf{a}||\mathbf{b}|\sin\theta.$$

这就是说, 向量 $\mathbf{c}$ 的模在数值上等于以向量 $\mathbf{a}$ 与 $\mathbf{b}$ 为邻边的平行四边形的面积 (图 7.19).

(2) 向量 $\mathbf{c}$ 垂直于向量 $\mathbf{a}$ 与 $\mathbf{b}$ 所决定的平面, 并且 $\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}$ 构成右手系统.

$\mathbf{a}$ 和 $\mathbf{b}$ 的外积记成 $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$, 即

$$\mathbf{c} = \mathbf{a}\times\mathbf{b}.$$

§0.4.2 外积的性质

外积具有以下性质.

1. 如果两个向量共线, 则它们的外积必是零向量; 反之, 如果两个向量的外积为零向量, 则这两个向量共线.

2. 当因子的次序互换时, 外积要改变符号, 就是

$$\mathbf{b}\times\mathbf{a} = -(\mathbf{a}\times\mathbf{b}).$$

所以两个向量的外积不满足交换律. □

3. 向量的外积与数的乘积满足结合律

$$(\lambda\mathbf{a})\times\mathbf{b} = \lambda(\mathbf{a}\times\mathbf{b}).$$

从性质 3 又可推出外积与数的乘积另外一些形式的结合律

$$\mathbf{a}\times(\lambda\mathbf{b}) = \lambda(\mathbf{a}\times\mathbf{b}),$$
$$(\lambda\mathbf{a})\times(\mu\mathbf{b}) = \lambda\mu(\mathbf{a}\times\mathbf{b}).$$

4. 向量的外积满足分配律

$$(\mathbf{a}+\mathbf{b})\times\mathbf{c} = \mathbf{a}\times\mathbf{c}+\mathbf{b}\times\mathbf{c}.$$

由此又可推出外积的分配律的另一形式

$$\mathbf{c}\times(\mathbf{a}+\mathbf{b}) = \mathbf{c}\times\mathbf{a}+\mathbf{c}\times\mathbf{b}.$$

§0.4.3 直角坐标系下外积的计算

利用外积的这些运算性质, 就可以导出外积的坐标表示式. 设给定两个向量

$$\mathbf{a}=a_1i+a_2j+a_3k,\quad \mathbf{b}=b_1i+b_2j+b_3k,$$

则有

$$\begin{aligned}\mathbf{a}\times\mathbf{b}&=(a_1i+a_2j+a_3k)\times(b_1i+b_2j+b_3k)\\&=a_1b_1(i\times i)+a_1b_2(i\times j)+a_1b_3(i\times k)\\&\quad+a_2b_1(j\times i)+a_2b_2(j\times j)+a_2b_3(j\times k)\\&\quad+a_3b_1(k\times i)+a_3b_2(k\times j)+a_3b_3(k\times k).\end{aligned}$$

因为 i,j,k 是互相垂直的基本单位向量, 所以

$$\begin{gathered}i\times i=0,\ j\times j=0,\ k\times k=0;\\ i\times j=-j\times i=k,\\ j\times k=-k\times j=i,\\ k\times i=-i\times k=j.\end{gathered}$$

于是得到

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b}=(a_2b_3-a_3b_2)i+(a_3b_1-a_1b_3)j+(a_1b_2-a_2b_1)k.$$

它可以利用三阶行列式写成

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b}=\begin{vmatrix} i & j & k\\ a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\end{vmatrix}.$$

例0.4.1. 已知三角形的顶点 $A(1,2,3),B(3,4,5),C(-1,-2,7)$, 求 $\triangle ABC$ 的面积.

解 设所求三角形的面积为 S, 则由外积的定义可知

$$S=\frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|.$$

但

$$\overrightarrow{AB}=(2,2,2),\quad \overrightarrow{AC}=(-2,-4,4),$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}&=\begin{vmatrix} i & j & k\\ 2 & 2 & 2\\ -2 & -4 & 4\end{vmatrix}\\&=\begin{vmatrix} 2 & 2\\ -4 & 4\end{vmatrix}i-\begin{vmatrix} 2 & 2\\ -2 & 4\end{vmatrix}j+\begin{vmatrix} 2 & 2\\ -2 & -4\end{vmatrix}k\end{aligned}$$

$$= 16i - 12j - 4k,$$

所以

$$S = \frac{1}{2}\sqrt{16^2 + (-12)^2 + (-4)^2} = 2\sqrt{26}. \qquad \square$$

§0.5 向量的混合积

§0.5.1 混合积的定义

定义0.5.1. 设给定三个向量 $\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}$, $(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot\mathbf{c}$ 称为 $\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}$ 的混合积. 它是一个数量.

以 $\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}$ 为棱的平行六面体的体积 V 等于以 $\mathbf{a},\mathbf{b}$ 为边的平行四边形的面积 S 乘以高 h, 即

$$V = Sh.$$

但由外积的定义可知

$$S = |\mathbf{a}\times\mathbf{b}|.$$

另一方面, 若设 $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ 与 $\mathbf{c}$ 的夹角为 φ, 则有

$$h = \varepsilon|\mathbf{c}|\cos\varphi,$$

其中 φ 为锐角时 $\varepsilon = 1$, 否则取 $\varepsilon = -1$, 因而推得

$$\begin{aligned} V &= \varepsilon|\mathbf{a}\times\mathbf{b}||\mathbf{c}|\cos\varphi \\ &= \varepsilon(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot\mathbf{c}. \end{aligned}$$

其中 $\varepsilon = 1$ 或 $\varepsilon = -1$ 使所得的体积为正数, 所以当 $\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}$ 组成右手系统时取 $\varepsilon = 1$, 而组成左手系统就取 $\varepsilon = -1$.

混合积为零的几何意义: 三个向量共面.

§0.5.2 直角坐标系下混合积的计算

混合积计算公式: 设 $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$, $\mathbf{c} = (c_1, c_2, c_3)$, 因为

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} i - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} j + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} k,$$

所以

$$(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot\mathbf{c} = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} c_1 - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} c_2 + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} c_3,$$

或用三阶行列式表示为

$$(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot\mathbf{c} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}.$$

例0.5.1. 已知四面体的四个顶点为 $A(1,1,1),B(3,4,4),C(3,5,5),D(2,4,7)$, 试求该四面体的体积.

解 容易看出, 所求四面体的体积 V 是以 $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}$ 为邻边的平行六面体的体积的六分之一, 故

$$V=\frac{1}{6}|(\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC})\cdot\overrightarrow{AD}|.$$

而

$$\overrightarrow{AB}=(2,3,3),\ \overrightarrow{AC}=(2,4,4),\ \overrightarrow{AD}=(1,3,6),$$

所以

$$(\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC})\cdot\overrightarrow{AD}=\begin{vmatrix}2&3&3\\2&4&4\\1&3&6\end{vmatrix}=6.$$

于是得到 $V=1$. □

§0.6 复数

§0.6.1 复数的四则运算

虚数单位 i: $i^2=-1$.

复数: $a+ib,(a,b\in\mathbf{R})$ 称为复数, a 称为实部, b 称为虚部.

复数的加法: $(a+ib)+(c+id)=(a+c)+i(b+d)$

复数的减法: $(a+ib)-(c+id)=(a-c)+i(b-d)$

复数的乘法: $(a+ib)(c+id)=(ac-bd)+i(ad+bc)$

复数的除法: $\dfrac{a+ib}{c+id}=\dfrac{ac+bd}{c^2+d^2}+i\dfrac{bc-ad}{c^2+d^2}$

复数的共轭: $z=a-ib$ 称为 $z=a+ib$ 的共轭, 记为 $\bar{z}$

§0.6.2 复数的向量表示

设平面中建立了直角坐标系 OXY. 复数 $z=a+ib$ 唯一对应了一个有序实数对 (a,b), 而有序实数对 (a,b) 对应了平面中的一个点 Z. 点 Z 又决定了一个向量 $\overrightarrow{OZ}$. 因此复数与向量是一一对应的.

复数的加法与对应向量的加法是一致的.

§0.6.3 复数的三角表示

设复数 $z=a+ib$ 对应的向量为 $\overrightarrow{OZ}$. 向量 $\overrightarrow{OZ}$ 的长度 r 称为复数的模, 因此 $r=\sqrt{a^2+b^2}$.

以 OX 轴正向为始边, 向量 $\overrightarrow{OZ}$ 为终边的角 θ 称为复数 z 的幅角. 一个复数的幅角有无限多个, 相差 2π 的整数倍. 其中满足 $0\le\theta<2\pi$ 的幅角 θ 称为幅角主值, 记作 $\arg z$.

由定义知, 若复数 $z = a + ib$ 的模为 r, 幅角为 θ, 则

$$a = r\cos\theta, \quad b = r\sin\theta$$

因此复数可以表示为

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

称为复数的三角形式.

乘法公式:

$$\begin{aligned} & r_1(\cos\theta_1 + i\cos\theta_2)\cdot r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2) \\ & = r_1r_2(\cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2)) \end{aligned}$$

由此可得

$$[r(\cos\theta + i\sin\theta)]^n = r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta)$$

Euler 公式: $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$