中国科学院—中国科学技术大学

2005年招收攻读硕士学位研究生入学考试试题

试题名称： 线性代数与解析几何

解析几何部分(50分)

一（15 分）．设 $C=\{z=x+y\sqrt{-1}\mid x,y\in R\}$是复平面，$A: C\to R^2$；$x+y\sqrt{-1}\mapsto(x,y)$ 是C到R^2的自然同构．对 $z_0=a+b\sqrt{-1}\in C$，定义映射

$$L: R^2\to R^2;\ (x,y)\mapsto A(z_0\cdot A^{-1}(x,y)).$$

证明：

1. L是R^2的线性变换.
2. 求L在基$\{e_1=(1,0),\ e_2=(0,1)\}$下的矩阵表示.

二（15分）．设 $F_1=\{P_0;\ e_1,\ e_2,\ e_3\}$ 和 $F_2=\{P_1;\ f_1,\ f_2,\ f_3\}$ 是3维欧氏空间E^3的两组正交标架，即 P_0，P_1是E^3的两个点，$\{e_1,\ e_2,\ e_3\}$和$\{f_1,\ f_2,\ f_3\}$是E^3的两组单位正交基．设P_1在第一组标架F_1下的坐标是$(a^1,\ a^2,\ a^3)$．求E^3的点在两组标架F_1和F_2下的坐标的变换关系.

三（20分）．设 $S=\{(x,y,z)\in R^3\mid x^2+y^2-z^2=-1,\ z>0\}$，$p_0=(0,0,-1)$．定义映射 $F: S\to R^2$；$p\mapsto F(p)$，其中$F(p)$为p与p_0的联线与(x,y)平面的交点.

1. 求F的值域D.
2. 证明，$F:S\to D$是1:1映射.

线性代数部分(100分)

一（10分）．设$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & \cdots & 8\\ 3 & 4 & \cdots & 10\end{pmatrix}$，$A'$表示$A$的转置矩阵．试求$A'A$的行列式和秩.

二（15分）．设V_1和V_2是数域F上的线性空间V的子空间．证明：

$$\dim_F V_1+\dim_F V_2=\dim_F(V_1\cap V_2)+\dim_F(V_1+V_2).$$