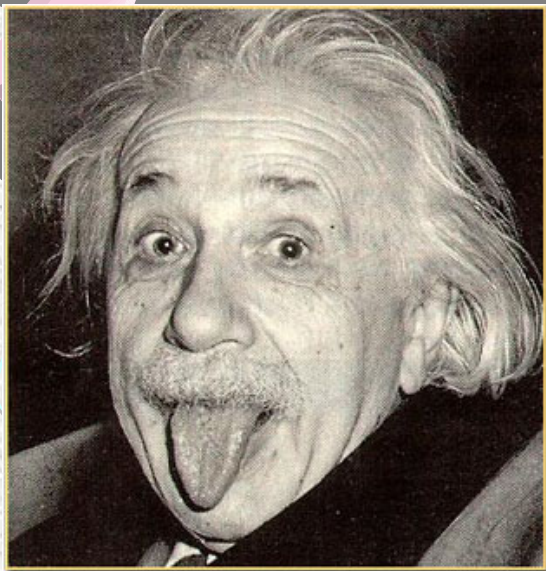




# 力学



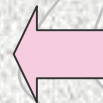
## 第七章

杨维纭

中国科学技术大学



物理学的简洁性是隐蔽的，它所具有的是深奥而含蓄的内在美。不懂得它的语言，是很难领会到的。天文学先于物理学，事实上物理学的发端始于对理解星体运行的追求。万有引力定律的发现堪称一部逐步揭示物理规律简洁美的壮丽史诗。



# The Law of Gravitation, an Example of Physical Law

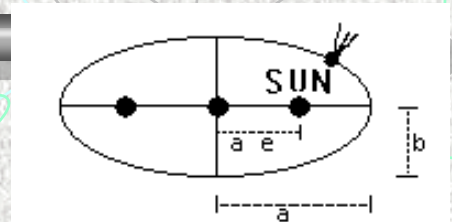
--R. Feynman in **The Character of Physical Law**



大地，太阳，月亮和星星，不仅是诗人咏叹的主题，也是科学最先想理解的对象。

# Kepler's Laws: modern version

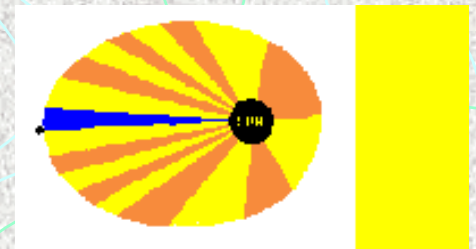
**LAW 1:** The orbit of a planet/comet about the Sun is an ellipse with the Sun's center of mass at one focus.



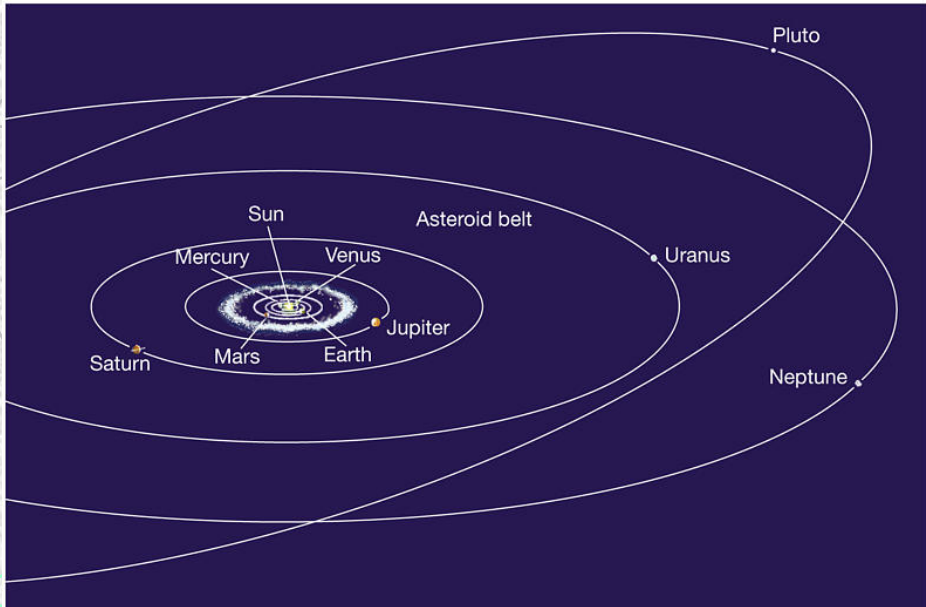
**LAW 2:** A line joining a planet/comet and the Sun sweeps out equal areas in equal intervals of time.

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

**LAW 3:** The squares of the (sidereal) periods of the planets are proportional to the cubes of their semimajor axes.



$$\frac{T_a^2}{T_b^2} = \frac{R_a^3}{R_b^3}$$



**Question: How to construct a theory compatible with these observations?**



## § 7.1 万有引力定律（自习）





## § 7.2 关于万有引力的讨论

普适的万有引力定律：任何具有质量  $m_1$  和  $m_2$ 、相距为  $r$  的两质点之间的引力，总是沿着两质点之间的连线方向，其引力的大小为：

$$F = G \frac{m_1 m_2}{r^2}$$

超距作用！

式中  $G$  是对所有质点都具有相同数值的常数，称为万有引力常数。 $m_1$  和  $m_2$  称为两质点的引力质量。为了和引力质量相区别，我们以前定义的质量称为惯性质量。由上式可知  $G$  的量纲为：

$$[G] = \frac{[f][r^2]}{[m^2]} = M^{-1} L^3 T^{-2}$$

$$G = 6.67259(85) \times 10^{-11} \text{米}^3 / \text{千克} \cdot \text{秒}^2$$



## Physics and Mathematics

**Retarding field: speed of light.**

**So Einstein adopted the field theory.**

$$f = G \frac{m_1 m_2}{|r_1(t_1) - r_2(t_2)|^2}$$

$$|r_1 - r_2| \leq c |t_1 - t_2|$$



## 万有引力的性质

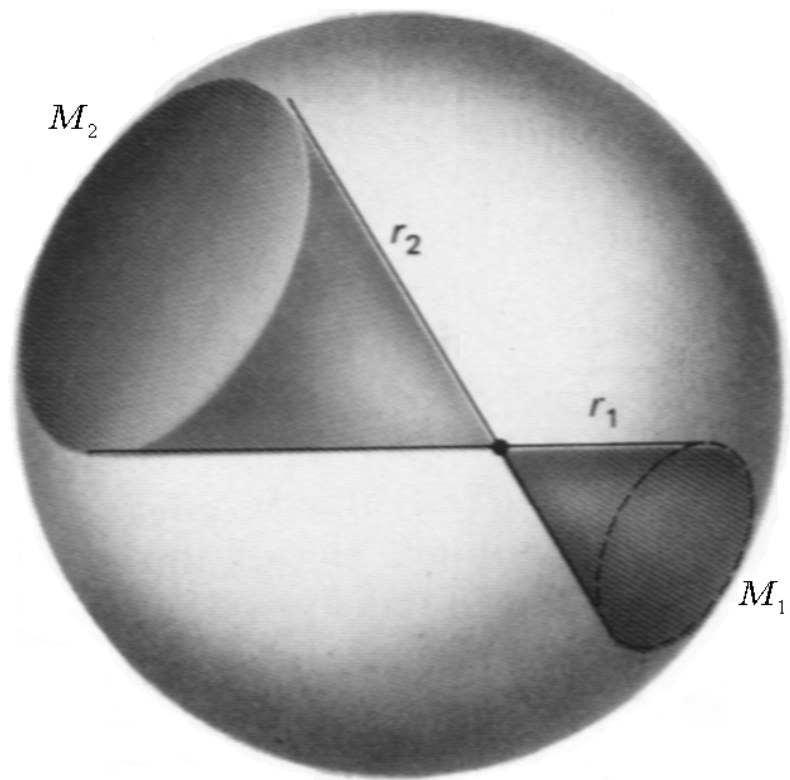
一个密度均匀的球壳对球壳外一质点的引力，等效于它的所有质量都集中于它的中心时的引力。

一个密度均匀的球壳对球壳内任一质点的引力为零！

为什么会有这样的结果？其原因恰恰是因为引力与两质点之间距离的反平方关系。



一个密度均匀的球壳对球壳内任一质点的引力为零！

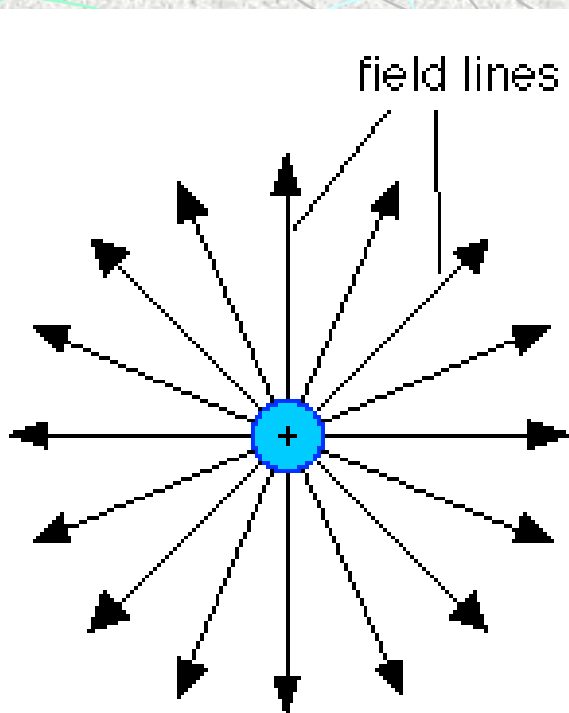


这个结果有很大的意义。若假设星际间星球分布均匀，各向同性。则考虑太阳系内情况时，来自太阳系外的引力可以不予考虑。否则难以解释为什么可以忽略无限多的星体在局部范围的引力效应。

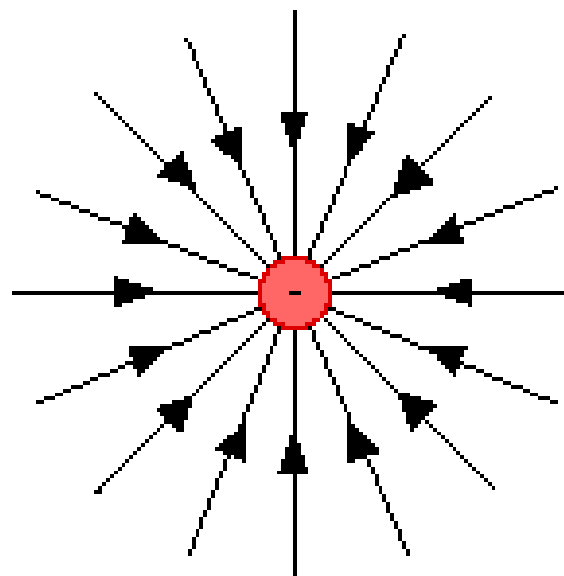
现代天文观测的确已逐步证明，宇宙在大尺度的物质分布是相当均匀的。



应当强调，之所以有上述这些结果，是因为引力的距离平方反比律。因此上述结果对其他类型的力就不一定成立。



The electric field from an isolated positive charge



The electric field from an isolated negative charge

原来画  
力线也  
需要理  
由！





## 引力的几何性

若用  $m_{\text{引}}$  和  $m_{\text{惯}}$  分别表示一个质点的引力质量和惯性质量，实验得出：

$$\frac{m_{\text{引}}}{m_{\text{惯}}} = \text{普适常数}$$

在  $m_{\text{引}}$  和  $m_{\text{惯}}$  取了合适的单位时，可以让该普适常数为1。

即

$$m_{\text{引}} = m_{\text{惯}}$$

该式具有深刻的物理意义，我们来作些探讨。由于该式成立，下面我们不再区分引力质量和惯性质量，仅用  $m$  表示。

为什么爱因斯坦才能看出  
该式的深刻物理意义？





## 7.7.2 引力的几何性

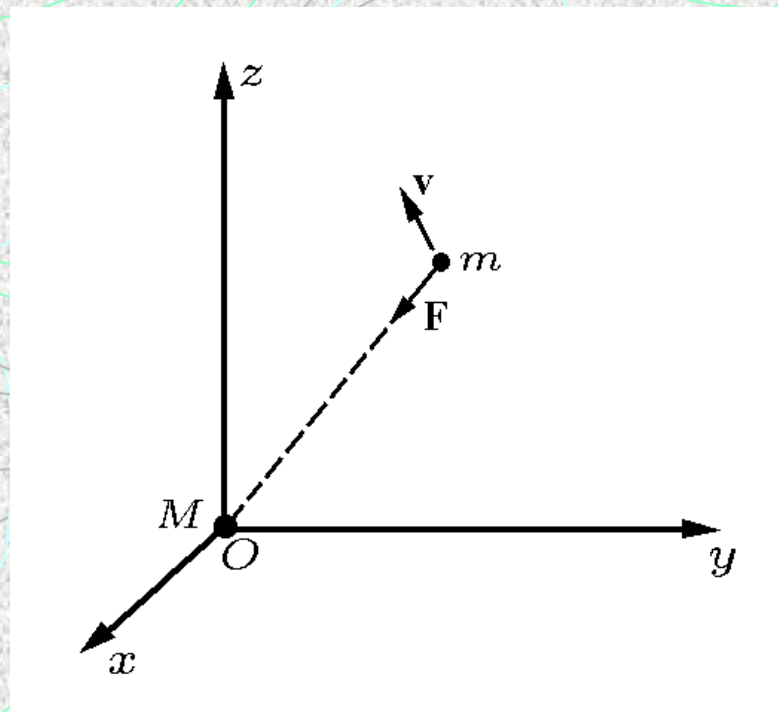
考虑质点  $m$  在  $M$  的引力场中运动，如图，设  $M$  位于原点， $m$  的矢径为  $\mathbf{r}$ ，由运动定律和万有引力定律可得运动方程为：

$$G \frac{Mm}{r^2} \frac{\mathbf{r}}{r} = m\mathbf{a}$$

即：

$$G \frac{M}{r^2} \frac{\mathbf{r}}{r} = \mathbf{a}$$

式中不含有运动物体的质量！于是我们得到结论：**在引力场中质点的运动与其质量无关。**

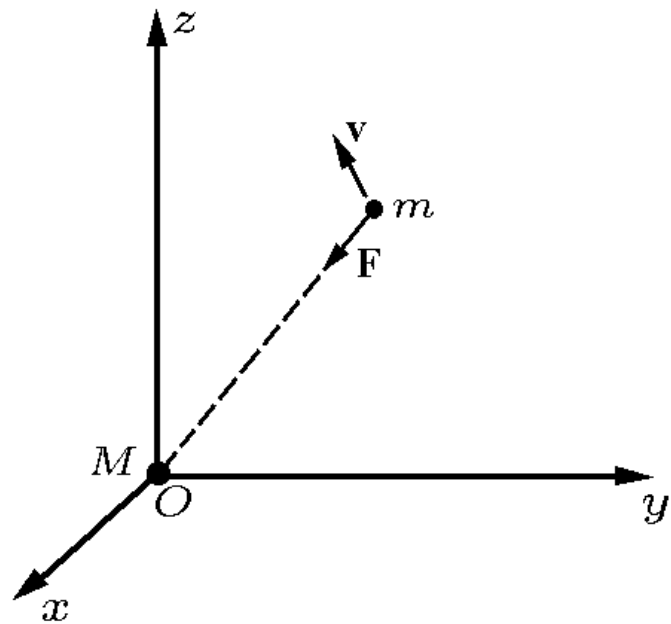




## 7.7.2 引力的几何性

在引力场中的任何物体，不管其质料和质量如何，均具有相同的加速度，当初始位置和初始速度相同的情况下，必有相同的运动，包括空间轨道。

因此，在引力场中运动的动力学问题，变成与动力学性质（物性）无关，纯属时空中的几何问题。



**伽利略认为：行星是做惯性运动！**

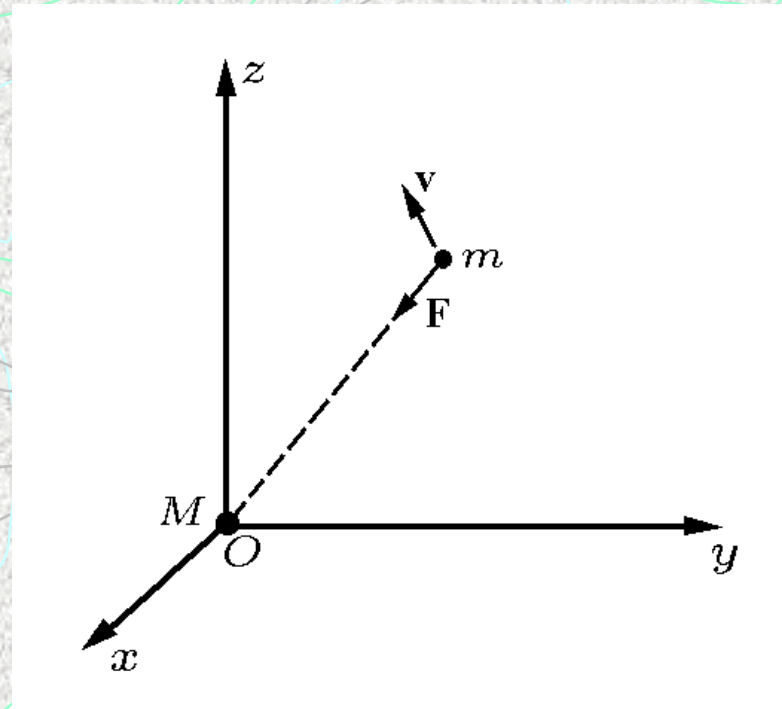
于是，零质量物体也会受到引力作用，因而光在引力场中传播也会弯曲（广义相对论的结论）。





## 7.7.2 引力的几何性

引力场的几何性是其它力场（如电场、磁场）没有的，爱因斯坦把**引力场的这一性质看成是纯粹的时空几何属性**，广义相对论就是引力场的几何理论。



爱因斯坦的广义相对论认为：  
引力不是力，它表示的是空间的弯曲！





## 逃逸速度

在引力场中质量为  $m$  的质点的机械能为零时，该质点可以运动到无穷远处。若质点位于质量为  $M$ ，半径为  $R$  的星体表面，则机械能为零时应有：

$$\frac{1}{2}mv^2 - G\frac{Mm}{R^2} = 0$$

此时质点  $m$  的速度称为逃逸速度，用  $v_{\text{逃}}$  表示，由上式有：

$$v_{\text{逃}} = \sqrt{\frac{2GM}{R}}$$





## 逃逸速度

星球表面逃逸速度的不同，星球的性质会有很大的不同。

1. 行星表面的逃逸速度如果太小，则不可能有大气。

水星： $M = 0.056 M_{\text{地}}$ ， $R = 0.38 R_{\text{地}}$ ， $v_{\text{逃}} = 4.3\text{km/s}$ ，无大气；

金星： $M = 0.82 M_{\text{地}}$ ， $R = 0.95 R_{\text{地}}$ ， $v_{\text{逃}} = 10.4\text{km/s}$ ，90大气压；

地球： $M = M_{\text{地}}$ ， $R = R_{\text{地}}$ ， $v_{\text{逃}} = 11.2\text{km/s}$ ，1大气压；

火星： $M = 0.108 M_{\text{地}}$ ， $R = 0.53 R_{\text{地}}$ ， $v_{\text{逃}} = 5.06\text{km/s}$ ，0.008大气压；

月球： $M = 0.012 M_{\text{地}}$ ， $R = 0.27 R_{\text{地}}$ ， $v_{\text{逃}} = 2.4\text{km/s}$ ，无大气；

2. 星球表面的逃逸速度如果太大，以致于达到光速，则称为黑洞。

新学科：微重力





## 逃逸速度

大约200年前，法国数学家、天文学家拉普拉斯于1796年曾预言：“一个密度如地球而直径为太阳250倍的发光恒星，由于其引力作用，将不容许任何光线离开它。由于这个原因，宇宙中最大的发光物体也不会被我们发现。”拉普拉斯的思想可以理解为在这个天体上， $v_{\text{逃}} = c$ （光速）。由此可得天体的半径为：

$$R_s = \frac{2GM}{c^2}$$

$R_s$  叫做天体的引力半径或史瓦西(Schwarzschild)半径。





## 逃逸速度

拉普拉斯的预言并未受到人们的重视，渐渐也就被淡忘了。现在我们知道，按照狭义相对论，一切物体的速度都不能超过光速  $c$ ，当  $v_{\text{逃}} = c$  时，任何物体都逃脱不掉。由广义相对论知，光子也要受到引力的作用，在这样的天体上就连光也传播不出来。这种奇怪的天体就是广义相对论所预言的“**黑洞**”。





## 引力和惯性具有相同的起因

物质告诉时空：如何弯曲

时空告诉物质：如何运动



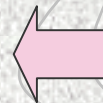


## § 7.3 质点在有心力场中的运动

7.3.1 研究有心力问题的基本方程

7.3.2 有心力问题的定性处理，有效  
势能与轨道特征

7.3.3 有心力问题的定量处理及轨道  
问题





### 7.3.1 研究有心力问题的基本方程

设物体（视为质点）的质量为  $m$ ，在有心力  $\mathbf{F}$  作用下，其运动方程为：

$$m\ddot{\mathbf{r}} = f(r)\hat{\mathbf{r}}$$

由于有心力是保守力，故在有心力场中质点运动的一般特征为：

1. 运动必定在一个平面上。（因为角动量守恒或掠面速度守恒）
2. 质点的机械能守恒。（因为保守力场可以定义势能）





### 7.3.1 研究有心力问题的基本方程

显然，讨论质点在有心力场中的运动，选平面极坐标系比较方便。沿径向和横向的分量式为：

$$\begin{aligned} m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) &= f(r) \\ m(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}) &= 0 \end{aligned}$$

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dt} (mr^2\dot{\theta}) = 0$$

$$mr^2\dot{\theta} = l$$

上式实际上是角动量守恒。这是因为：

$$\mathbf{l} = \mathbf{r} \times m\mathbf{v} = r\hat{\mathbf{r}} \times m(\dot{r}\hat{\mathbf{r}} + r\dot{\theta}\hat{\boldsymbol{\theta}}) = mr^2\dot{\theta}(\hat{\mathbf{r}} \times \hat{\boldsymbol{\theta}})$$

令：

$$l = mh$$

其中  $h$  是有物理意义的，它为质点掠面速度的两倍，当然应为常量





### 7.3.1 研究有心力问题的基本方程

角动量守恒： $r^2 \dot{\theta} = h$

得：

$$m(\dot{r}dr - \frac{h^2}{r^3}dr) = f(r)dr$$

积分，得：

$$\frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{mh^2}{2r^2} + U(r) = \frac{1}{2}m\dot{r}_0^2 + \frac{mh^2}{2r_0^2} + U(r_0) = E$$

其中  $U(r)$  为质点在保守力场中的势能，即：

$$\int_{r_0}^r f(r)dr = -[U(r) - U(r_0)]$$





### 7.3.1 研究有心力问题的基本方程

$$\frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}mr^2\dot{\theta}^2 + U(r) = E$$

机械能守恒

角动量守恒：

$$r^2\dot{\theta} = h$$

质点在有心力场中运动的牛顿方程含有二阶微商，而上述方程只含有一阶微商，比较容易研究，且物理意义也十分清楚。下面我们就用这两个方程作为我们研究有心力问题的基本方程。





### 7.3.2 有心力问题的定性处理， 有效势能与轨道特征

$$\frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \frac{m h^2}{2 r^2} + U(r) = E$$

令：

$$U_{\text{eff}}(r) = U(r) + \frac{m h^2}{2 r^2}$$

表示这等效的一维运动质点的势能，称为**有效势能**。





### 7.3.2 有心力问题的定性处理，有效势能与轨道特征

对于在力源  $M$  的万有引力作用下的质点，其势能为

$$U(r) = -G \frac{Mm}{r}$$

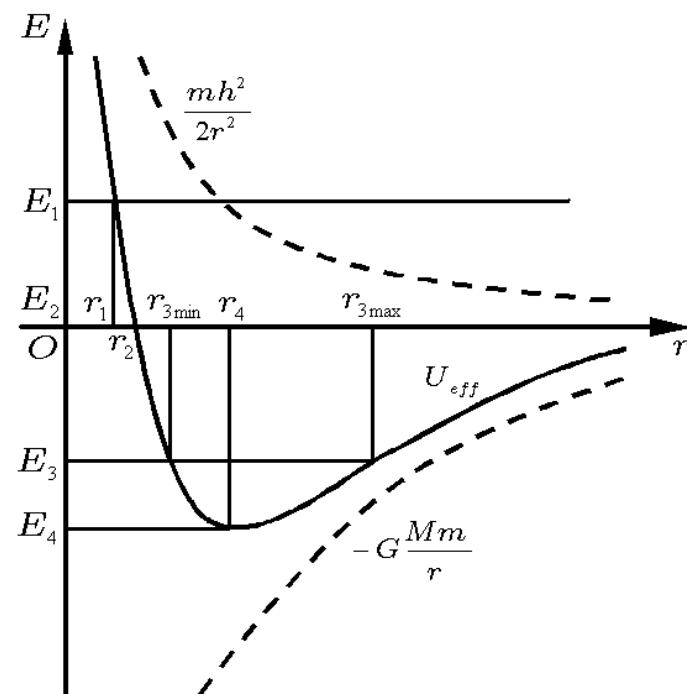
于是有效势能为：

$$U_{\text{eff}}(r) = \frac{mh^2}{2r^2} - G \frac{Mm}{r}$$

机械能守恒：

$$\frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \frac{mh^2}{2r^2} + U(r) = E$$

图中画出了对应的势能曲线，其中虚线分别为等效的斥力势能曲线和引力势能曲线，实线为有效势能曲线，它由斥力势能和引力势能两曲线叠加而成。





### 7.3.2 有心力问题的定性处理，有效势能与轨道特征

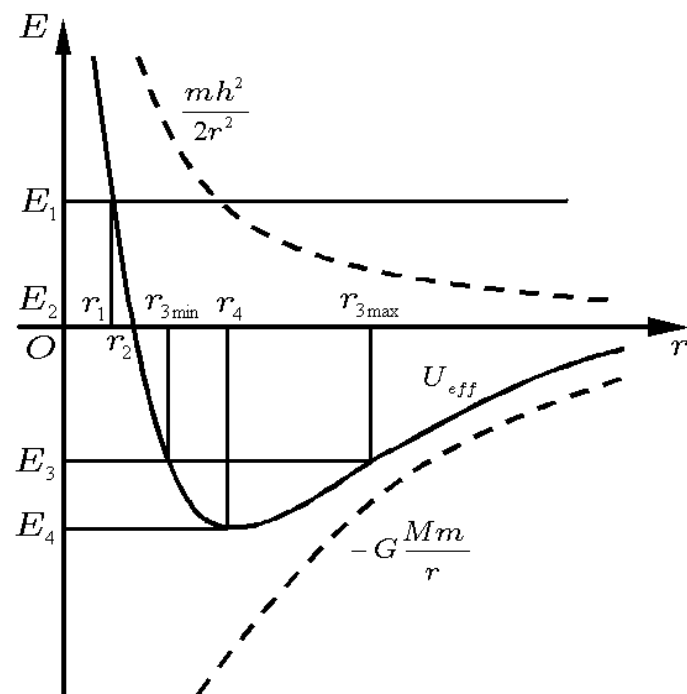
利用有效势能曲线可以讨论质点运动矢径大小的变化范围，此范围取决于质点的总能量  $E$ 。代表总能量为  $E$  的水平线与有效势能曲线相交的点叫做**拱点**。在拱点处  $r$  取极值，那里径向速度  $v_r = 0$ ，只有角向速度，将

$$\dot{r} = 0$$

得：

$$r^2 + G \frac{Mm}{E} r - \frac{mh^2}{2E} = 0$$

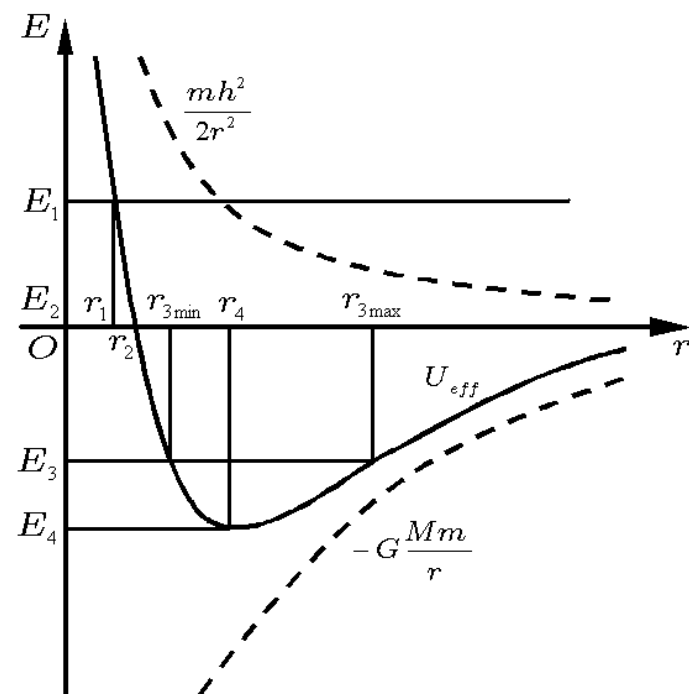
由该式可求得拱点处的  $r$  值。





### 7.3.2 有心力问题的定性处理， 有效势能与轨道特征

由于  $r \rightarrow \infty$  时等效斥力势能趋于0的速度比  $U(r)$  的绝对值快，故有效势能曲线当  $r \rightarrow \infty$  时是从负的一侧趋于0的。所以  $E > 0$  和  $E = 0$  时水平线与有效势能曲线只有一个交点，在这里  $r$  取极小值；另一头轨道是开放的， $r$  延伸到无穷远。





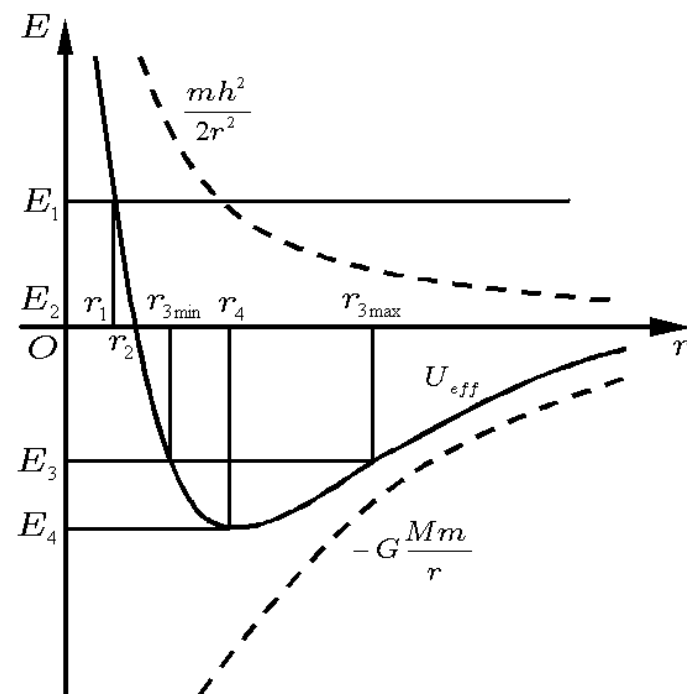
### 7.3.2 有心力问题的定性处理，有效势能与轨道特征

$$r^2 + G \frac{Mm}{E} r - \frac{mh^2}{2E} = 0$$

若  $E = E_1 > 0$ ，由有效势能曲线图可知  $r$  有最小值  $r_1$ ，但最大值无限制，即  $r_1 \leq r < \infty$ 。由方程可求得  $r$  只有一个正根，为：

$$r_1 = -G \frac{Mm}{2E} + \sqrt{\left(G \frac{Mm}{2E}\right)^2 + \frac{mh^2}{2E}}$$

可以证明，此轨道为一双曲线。





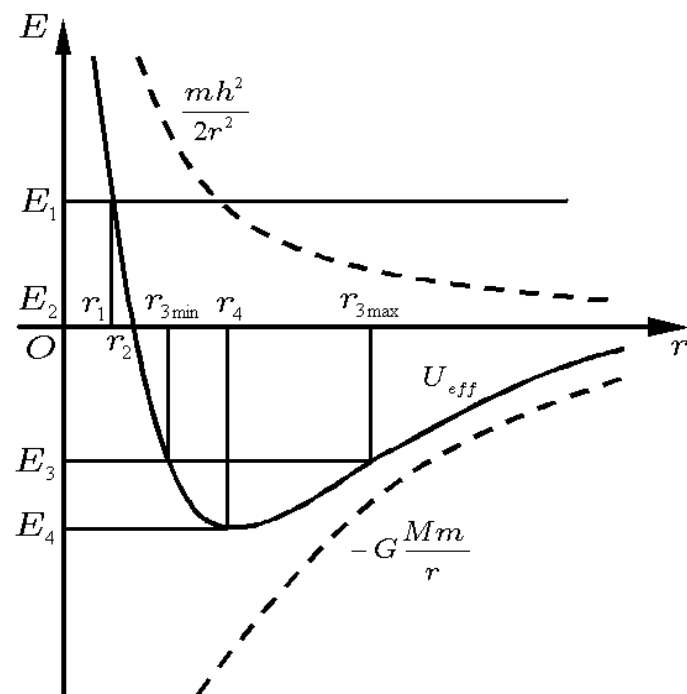
### 7.3.2 有心力问题的定性处理，有效势能与轨道特征

$$r^2 + G \frac{Mm}{E} r - \frac{mh^2}{2E} = 0$$

若  $E = E_2 = 0$ ，由有效势能曲线图可知  $r$  有最小值  $r_2$ ，但最大值无限制，即  $r_2 \leq r < \infty$ 。 $r_2$  比  $r_1$  略大，由方程可求得  $r$  只有一个正根，为：

$$r_2 = \frac{h^2}{2GM}$$

可以证明，此轨道为一抛物线。





### 7.3.2 有心力问题的定性处理，有效势能与轨道特征

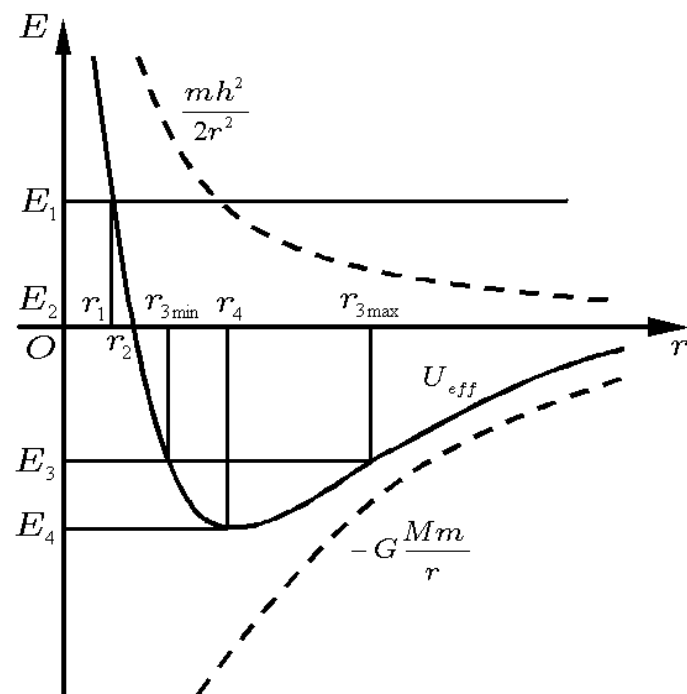
$$r^2 + G \frac{Mm}{E} r - \frac{mh^2}{2E} = 0$$

若  $E = E_3 < 0$ ，由有效势能曲线图可知  $r$  是有界的，即  $r_{3\min} \leq r \leq r_{3\max}$ ，由方程可求得：

$$r_{3\max} = -G \frac{Mm}{2E} + \sqrt{\left(G \frac{Mm}{2E}\right)^2 + \frac{mh^2}{2E}}$$

$$r_{3\min} = -G \frac{Mm}{2E} - \sqrt{\left(G \frac{Mm}{2E}\right)^2 + \frac{mh^2}{2E}}$$

可以证明，对应的轨道为一椭圆，力心为椭圆的一个焦点。





### 7.3.2 有心力问题的定性处理，有效势能与轨道特征

$$r^2 + G \frac{Mm}{E} r - \frac{mh^2}{2E} = 0$$

若  $E = E_4$  为有效势能曲线的最小值点，则  $r = r_4$ ，该值为方程的重根，利用条件

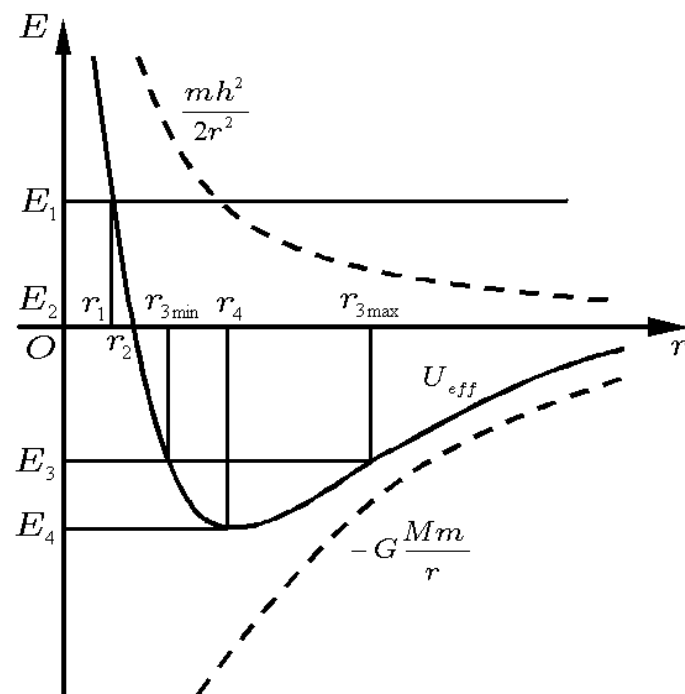
$$\left( G \frac{Mm}{2E} \right)^2 + \frac{mh^2}{2E} = 0$$

即：
$$E = -G^2 M^2 m / 2h^2$$

于是可求得方程的重根为：

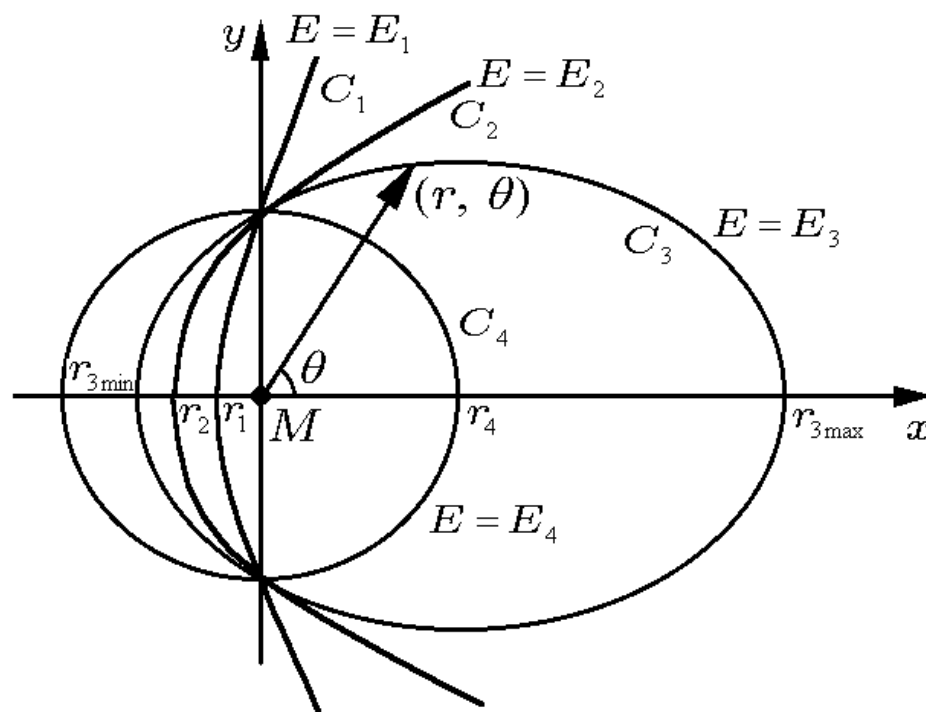
$$r_4 = \frac{h^2}{GM}$$

即质点  $m$  到力心  $M$  的距离恒定不变，对应的轨道为圆。



### 7.3.2 有心力问题的定性处理， 有效势能与轨道特征

各种能量下的质点轨道：





### 7.3.3 有心力问题的定量处理及轨道问题

#### 1. 运动的详尽情况

$$\frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \frac{m h^2}{2 r^2} + U(r) = E$$

$$\dot{\theta} = \frac{h}{r^2}$$

$$\frac{dr}{dt} = \pm \sqrt{\frac{2E}{m} - \frac{2U(r)}{m} - \frac{h^2}{r^2}}$$

$$\frac{dr}{\sqrt{\frac{2E}{m} - \frac{2U(r)}{m} - \frac{h^2}{r^2}}} = \pm dt$$

$$r = r(t)$$

$$\theta = \theta(t)$$





### 7.3.3 有心力问题的定量处理及轨道问题

#### 2. 轨道问题

$$m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) = f(r)$$

$$r^2\dot{\theta} = h$$

通常作变换:

$$u = 1/r$$

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{dr}{dt} &= \frac{h}{r^2} \frac{dr}{d\theta} = hu^2 \frac{d}{d\theta} \left( \frac{1}{u} \right) = -h \frac{du}{d\theta} \end{aligned} \right.$$

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{d^2r}{dt^2} &= \frac{d}{dt} \left( -h \frac{du}{d\theta} \right) = hu^2 \frac{d}{d\theta} \left( -h \frac{du}{d\theta} \right) = -h^2 u^2 \frac{d^2u}{d\theta^2} \end{aligned} \right.$$

消去  $t$ , 得:

$$h^2 u^2 \left( \frac{d^2u}{d\theta^2} + u \right) = -\frac{f}{m}$$

此即轨道的微分方程, 称为**比内公式**。





### 7.3.3 有心力问题的定量处理及轨道问题

#### 2. 轨道问题

$$h^2 u^2 \left( \frac{d^2 u}{d\theta^2} + u \right) = -\frac{f}{m}$$

只要知道  $f(r)$  的表达式, 即可求得轨道方程式; 反之, 若已知轨道方程, 则可以求得  $f(r)$  的表达式。

例如, 对于万有引力

$$f = -G \frac{Mm}{r^2} = -GMmu^2$$

$$\frac{d^2 u}{d\theta^2} + u = \frac{GM}{h^2} = \frac{1}{r_0}$$

解为:

$$u = \frac{1}{r_0} + \frac{\varepsilon}{r_0} \cos(\theta - \theta_0)$$

$$r = \frac{r_0}{1 + \varepsilon \cos \theta}$$





### 7.3.3 有心力问题的定量处理及轨道问题

#### 2. 轨道问题

$$r = \frac{r_0}{1 + \varepsilon \cos \theta}$$

$$\varepsilon = 0$$

圆

$$0 < \varepsilon < 1$$

椭圆

$$\varepsilon = 1$$

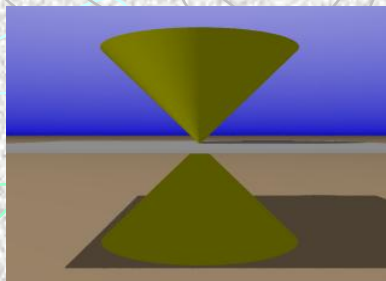
抛物线

$$\varepsilon > 1$$

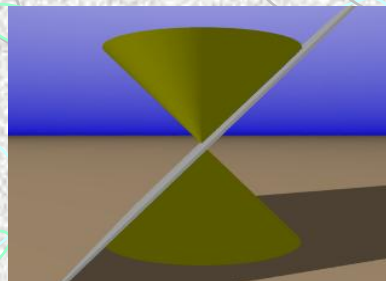
双曲线

# Conic section cones

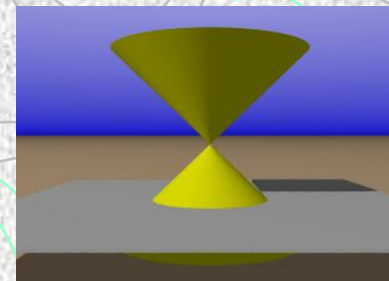
Physics is geometry



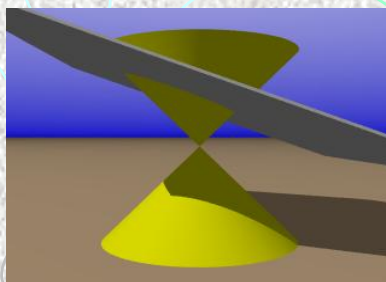
Point



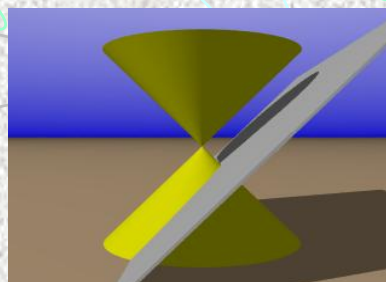
Line



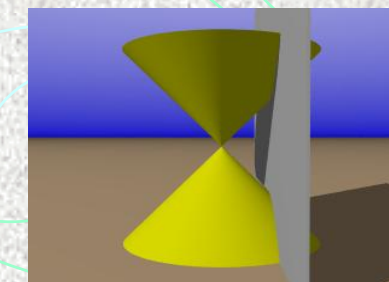
Circle



Ellipse



Parabola



Hyperbola

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$



例：质量为  $m$  的质点在质量为  $M$  的质点（ $M$  视为固定）的引力场中以  $M$  为中心作半径为  $r_0$  的圆周运动。若给  $m$  以沿径向的冲量  $J$ ，并设  $J$  与质点的原动量之比为一小量，求在以后运动过程中矢径的最大值  $r_2$  与最小值  $r_1$ ，并证明在忽略二级以上小量的情况下， $r_2 - r_0 \approx r_0 - r_1$ ，即质点的运动轨道近似为一偏心的圆。

谢谢大家！

