

第十章 Maxwell电磁理论

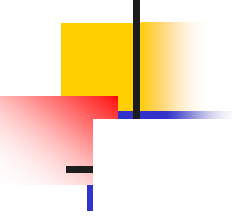
- 爱因斯坦的评价：

“自牛顿以来，物理学经历最深刻、最富有成果的、真正的、概念上的变革。”

§ 10-1 介质中的麦克斯韦方程组

§ 10-2 平面电磁波

§ 10-3 电磁场的能量、动量和角动量



静电场、稳恒电流、静磁场、电流的磁效应、电磁感应以及似稳的交变电流的实验规律，都是大量的实验事实的总结，具有**可靠性**；

但是，它们只在一定的条件下成立，所以具有**局限性**。它们不是电磁现象的普通规律，需要发展；

麦克斯韦沿着**法拉第的思路**，**近距作用的观点**研究下去，终于取得了突破。



两个假设、两个推广

麦克斯韦在总结了前人得到的实验规律的基础上，大胆提出了“变化的磁场产生涡旋电场”和“位移电流”的假设。

把静电场、静磁场的通量定理推广到由随时间变化的电荷、电流所产生的迅变电磁场，高度概括为具有优美数学形式的4个方程，称为麦克斯韦方程组。



两个预言

麦克斯韦方程组是电磁场的普通规律，它不仅可以解释当时已知的一切电磁现象，而且从理论上由方程组导出电磁场所满足的波动方程，预言了电磁波的存在。

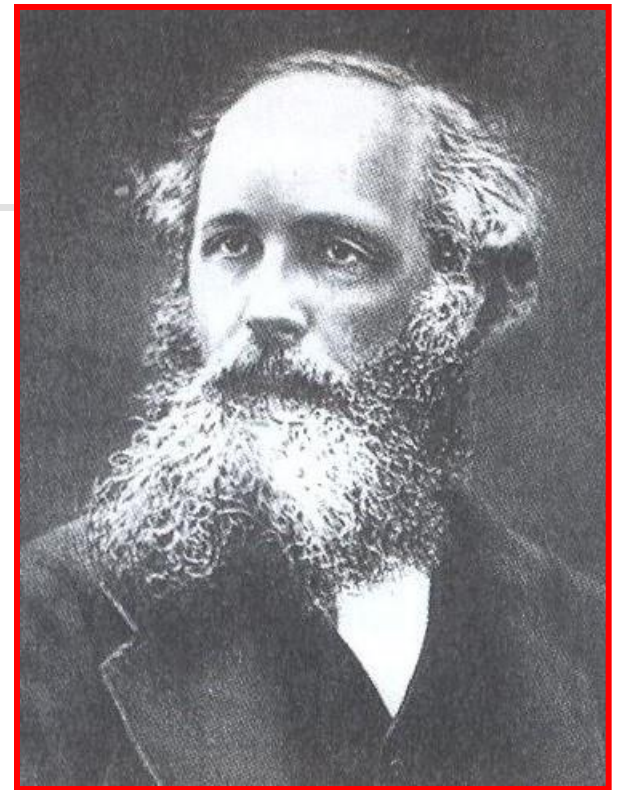
从真空中波动方程得到的电磁波的速度恰好为真空中的光速，麦克斯韦大胆地预言了光波就是电磁波，建立了光的电磁理论，把光学与电磁学“统一”起来。

麦克斯韦电磁理论的建立是物理学史上的一个伟大创举。

爱因斯坦的评价：

“自牛顿以来，物理学经历最深刻、最富有成果的、真正的、概念上的变革。”

它开辟了无线电时代的新纪元，对科学技术和人类文明的发展起到了不可估量的作用。



Maxwell, James Clerk
(**1831-06-13**~**1879-11-05**)
毕业于剑桥大学数学系

§ 10-1 介质中的麦克斯韦方程组

- 介质中**静电场**的基本定理:

$$\oiint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = \sum q_0 = \iiint_V \rho_0 dV,$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_0,$$

$$\oint_L \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0,$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0,$$

- 介质中**静磁场**的基本定理:

$$\oiint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0,$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0,$$

$$\oint_L \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \sum I_0 = \iint_S \mathbf{J}_0 \cdot d\mathbf{S},$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{j}_0.$$



- 电荷守恒定律:

$$\oiint_S \mathbf{j}_0 \cdot d\mathbf{S} = -\frac{d}{dt} \iiint_V \rho_0 dV = -\iiint_V \frac{\partial \rho_0}{\partial t} dV;$$

$$\nabla \cdot \mathbf{j}_0 + \frac{\partial \rho_0}{\partial t} = 0$$

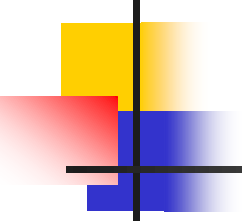
- 稳恒条件 (稳恒电流):

$$\oiint_S \mathbf{j}_0 \cdot d\mathbf{S} = 0$$

$$\nabla \cdot \mathbf{j}_0 = 0$$

- 洛仑兹力 (电磁力):

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{V} \times \mathbf{B})$$

- 
-
- 以上的基本规律在**随时间变化的电磁场的情况**下是否适用呢？

麦克斯韦在前人所取得的科学成果的基础上，发展和创造后得到**普遍适用的电磁理论**，即**麦克斯韦方程**，他的贡献在于作了**两个大胆的推广**和**两个重要的假设**。

一、两个大胆的推广

1. 麦克斯韦认为**介质中静电场的通量定理对随时间变化的电场同样适用**，即

$$\oiint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = \iiint_V \rho_0 dV = Q_0; \quad \nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_0 \quad (10-1-1)$$

其中 \mathbf{D} 为介质中的电位移矢量，

ρ_0 为介质中的自由电荷密度，

V 为闭合曲面 S 所包围的体积。

2. 麦克斯韦认为介质中稳恒磁场的通量定理对随时间变化的磁场同样适应，即

$$\oiint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0; \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (10-1-2)$$

这两个推广的基础是：

1. 库仑定律与毕奥—萨伐尔定律在有介质时仍然成立；电荷是电场的“源”，有自由电荷存在，对随时间变化的电场也正确。
2. 在 § 7.1.5 中已讲，为使电磁感应定律成立，随时间变化的磁场也应满足高斯定理，同时也说明没有自由磁荷。

二、两个重要的假设

1. 涡旋电场假设： 随时间变化的磁场会激发涡旋电场或称为感应电场，感生电动势正是来源于涡旋电场所产生的非静电力。于是，得到新的环路定理，其数学表达式为：

$$\varepsilon = - \iint_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S} = \oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} \quad (10-1-3)$$

它是法拉第电磁感应定律与涡旋电场假说的结果（在 § 7.2 已讲）。

2. 位移电流假设:

随时间变化的电场与电流(包括传导电流、极化电流和磁化电流)一样能激发磁场。

引入位移电流密度:
$$\mathbf{j}_d \equiv \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t}$$

其中等式右边**第一项**表达电场随时间的变化率,
第二项表示束缚电荷的微观运动产生的极化电流。

于是,磁场的环路定理应表达为:

$$\oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \iint_S (\mathbf{j}_0 + \mathbf{j}_d) \cdot d\mathbf{S} = \iint_S \left(\mathbf{j}_0 + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) \cdot d\mathbf{S} \quad (10-1-4)$$

这个假说的产生，源于麦克斯韦对稳恒磁场的环路定理的研究。

■ 稳恒磁场是由稳恒电流产生的。对于稳恒电流应满足条件

$$\oiint_S \mathbf{j}_0 \cdot d\mathbf{S} = 0$$

是它保证了 $\oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \iint_{S_c} \mathbf{j}_0 \cdot d\mathbf{S}$ 的合理性。

因为对于以 \mathbf{C} 为边界的任意曲面 \mathbf{S}_c ，由稳恒条件，右边积分值都是唯一的。

■但是，对于**非稳恒电路**，例如**电容器中**，这时**只有电荷守恒定律成立**，即

$$\oiint_S \mathbf{j}_0 \cdot d\mathbf{S} + \frac{dq_0}{dt} = 0$$

将式 $\oiint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = q_0 = \iiint_V \rho_0 dV$ 代入上式得

$$\oiint_S \mathbf{j}_0 \cdot d\mathbf{S} + \frac{d}{dt} \oiint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = 0$$

即

$$\oiint_S \left(\mathbf{j}_0 + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) \cdot d\mathbf{S} = 0$$

于是，他定义了**位移电流密度**：

$$\mathbf{j}_d \equiv \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$

便得
$$\oiint_S (\mathbf{j}_0 + \mathbf{j}_d) \cdot d\mathbf{S} = 0$$

这是**电荷守恒定律**在非稳恒电流情况下成立的结果，它保证了

$$\oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \iint_{S_C} (\mathbf{j}_0 + \mathbf{j}_d) \cdot d\mathbf{S}$$

的**右边积分值的唯一性**。

于是产生了**新的环路定理(10-1-4)**，它是**电荷守恒定律**和**位移电流假说**与**毕奥—萨伐尔定律**的结果。



- **位移电流的物理意义：**

$$\mathbf{j}_d \equiv \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t}$$

随时间变化的电场和极化电流与传导电流一样**能产生磁场**，这是它们的**共同点**。

- 由此得到**电磁波**传播的物理图像：

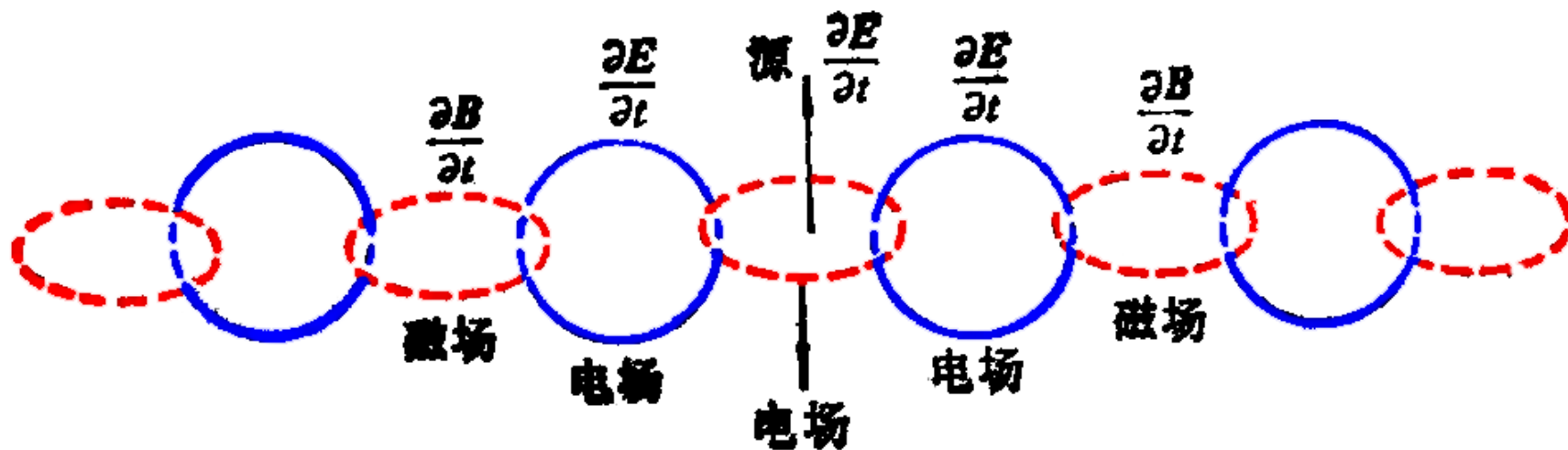


图10-1-1 电磁波存在的理论预言示意图



位移电流与传导电流的区别：

1. 位移电流**并非**自由电荷的定向运动所产生，在真空和电介质中也存在；
2. 它**不**伴随焦耳热效应；
3. 它与外磁场**无**安培力的关系。

三. 将介质中、非稳恒情况下的电磁场规律表达为如下的麦克斯韦方程组:

积分形式

$$\oiint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = \iiint_V \rho_0 dV,$$

$$\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = - \iint_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S},$$

$$\oiint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0,$$

$$\oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \iint_S \left(\mathbf{j}_0 + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) \cdot d\mathbf{S}.$$

微分形式

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_0, \quad (10-1-5)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = - \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (10-1-6)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (10-1-7)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{j}_0 + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}. \quad (10-1-8)$$



均匀线性各向同性介质的

电磁性能方程为：

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}, \quad \mathbf{B} = \mu \mathbf{H}, \quad \mathbf{j}_0 = \sigma \mathbf{E}.$$

在真空中：

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E}, \quad \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}, \quad \mathbf{j}_0 = 0, \quad \sigma = 0.$$

四. 边值关系

从麦克斯韦方程组的积分形式(10-1-5)-(10-1-8)出发, 作圆柱形曲面或矩形回路横跨并无限接近两介质的界面, 从而得到边值关系, 对随时间变化的电磁场、自由面电荷密度、传导面电流密度也成立:

$$\mathbf{n} \cdot (\mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1) = \sigma_0, \quad (10-1-9)$$

$$\mathbf{n} \times (\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) = 0, \quad (10-1-10)$$

$$\mathbf{n} \cdot (\mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1) = 0, \quad (10-1-11)$$

$$\mathbf{n} \times (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1) = \mathbf{i}_0, \quad (10-1-12)$$

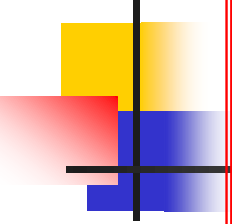
其中, σ_0 是界面上的自由面电荷密度,
 \mathbf{i}_0 是界面上的传导面电流密度。

§ 10-2 平面电磁波

1. 波动方程

这是一个麦克斯韦方程应用的重要实例，也是其理论预言的根据。我们从微分形式的麦克斯韦方程和均匀各向同性线性介质的电磁性能方程出发，研究自由空间中的电磁场。

自由空间的含意是： $\rho_0 = 0, \mathbf{j}_0 = 0,$
求此空间介质中(由欧姆定律, $\sigma = 0$ ，这介质应是绝缘介质)的电磁场。于是，可得：



自由空间中的均匀线性各向同性介质的电磁性能方程：

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}, \quad \mathbf{B} = \mu \mathbf{H}. \quad \because \mathbf{j}_0 = 0 \quad \therefore \sigma = 0.$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} \nabla \cdot \mathbf{E} = 0, & (10-2-9) \\ \nabla \cdot \mathbf{H} = 0, & (10-2-10) \\ \nabla \times \mathbf{E} = -\mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}, & (10-2-11) \\ \nabla \times \mathbf{H} = \varepsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}. & (10-2-12) \end{array} \right.$$

再看

电磁波传播的物理图像：

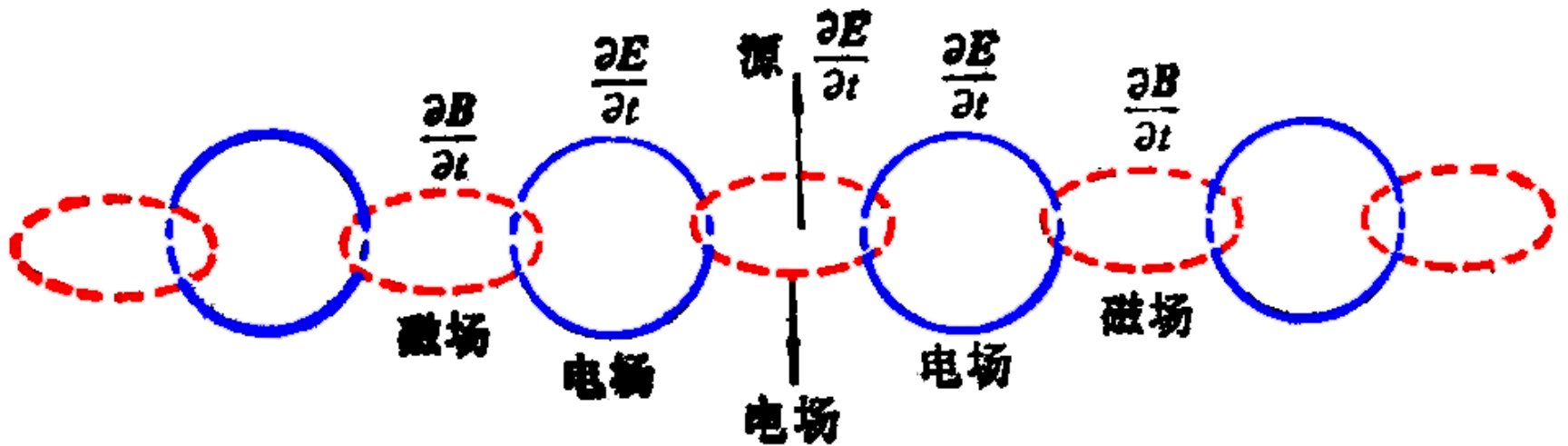


图10-1-1 电磁波存在的理论预言示意图

理论推导:

在线性均匀各向同性介质中， ε 和 μ 是与时间 t 和空间位置 \mathbf{r} 无关的。由（10-2-11）、（10-2-11）可得：

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = -\mu \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \mathbf{H}) = -\mu\varepsilon \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2},$$

由 $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$, 上方程左边:

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}) - \nabla^2 \mathbf{E} = -\nabla^2 \mathbf{E},$$

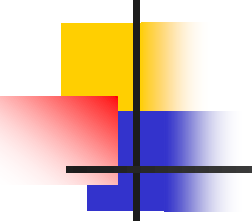
$$\therefore \nabla^2 \mathbf{E} - \mu\varepsilon \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0,$$

$$\text{同理 } \nabla^2 \mathbf{H} - \mu\varepsilon \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} = 0.$$

重写：

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} - \frac{1}{\mu\epsilon} \nabla^2 \mathbf{E} = 0, \quad (10-2-13) \\ \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} - \frac{1}{\mu\epsilon} \nabla^2 \mathbf{H} = 0. \quad (10-2-14) \end{array} \right.$$

这是**典型的波动方程**，即**脱离了场源的电**
磁场是以波的形式在无界的、自由的线性
均匀各向同性介质中传播，这就是**电磁波**，
它的传播速度为：


$$V = \sqrt{\frac{1}{\mu\varepsilon}} = \sqrt{\frac{\mu_0\varepsilon_0}{\mu\varepsilon}}C \quad (9-2-15)$$

$$C = \frac{1}{\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}}$$

C是真空中光速，由此麦克斯韦预言光即是电磁波。



2. 定态电磁波的解

进一步**设**电磁波的激发源以确定的频率 ω 作简谐振动，**因而**辐射的电磁波也以相同频率作简谐振动，这种**以一定频率作简谐振动的波**，常称为**定态电磁波或单色波**。

一般的非单色的电磁波，可以用傅里叶分析方法分解为不同频率的单色波的迭加，**因此只须研究定态电磁波**。

由图10-1-1的分析，为简便直观，限于讨论平面电磁波。即 \mathbf{E} 、 \mathbf{H} 仅与 Z 和 t 有关，与坐标 y 、 x 无关，这种电磁波又称为平面电磁波。它满足的方程为：

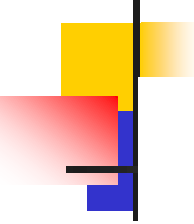
$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} - \frac{1}{\mu\epsilon} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial Z^2} = 0, \\ \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} - \frac{1}{\mu\epsilon} \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial Z^2} = 0. \end{cases}$$

可设其解的形式为(用分离变量法)：

$$\begin{cases} \mathbf{E} = \mathbf{E}(Z)e^{-j\omega t} & (10-2-16) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \mathbf{H} = \mathbf{H}(Z)e^{-j\omega t} & (10-2-17) \end{cases}$$

意即设电磁波沿 Z 轴正向传播，其场强在与 Z 轴正交的平面上各点有相同的值，其中 $\mathbf{E}(Z)$ 、 $\mathbf{H}(Z)$ 只是坐标 Z 的函数。



将形式解 (10-2-16)、(10-2-17) 分别代入波动方程 (10-2-13)、(10-2-14) 中，立即得到：

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 \mathbf{E}(Z)}{\partial Z^2} + \omega^2 \mu \varepsilon \mathbf{E}(Z) = 0, \quad (10-2-18) \\ \frac{\partial^2 \mathbf{H}(Z)}{\partial Z^2} + \omega^2 \mu \varepsilon \mathbf{H}(Z) = 0. \quad (10-2-19) \end{array} \right.$$

其解为：

$$\begin{cases} \mathbf{E}(Z) = \mathbf{E}_0 e^{jKZ}, & (10-2-20) \\ \mathbf{H}(Z) = \mathbf{H}_0 e^{jKZ}. & (10-2-21) \end{cases}$$

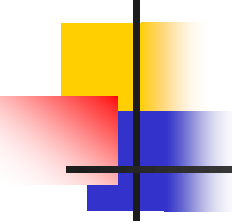
其中 $\mathbf{E}_0, \mathbf{H}_0$ 是积分常数，它们是常矢量，由已知的激发源确定，代表电场和磁场的**振幅**。上两式中

$$K \equiv \omega \sqrt{\mu \varepsilon}$$

于是有

$$\frac{\omega}{K} = \frac{1}{\sqrt{\mu \varepsilon}} = \sqrt{\frac{\mu_0 \varepsilon_0}{\mu \varepsilon}} C = V \quad (\text{V 是电磁波传播速度})。$$

$K \equiv \frac{\omega}{V} = \frac{2\pi f}{V} = \frac{2\pi}{\lambda}$ 又称**波数**，表示在空间中
 2π （米）长度上有多少个电磁波。



将 (10-2-20) , (10-2-21) 分别代入 (10-2-16) , (10-2-17) 中得:

$$\begin{cases} \mathbf{E}(Z, t) = \mathbf{E}_0 e^{j(KZ - \omega t)} \\ \mathbf{H}(Z, t) = \mathbf{H}_0 e^{j(KZ - \omega t)} \end{cases}$$



更一般的写法为:

$$\begin{cases} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_0 e^{-j(\omega t - \mathbf{K} \cdot \mathbf{r})} & (10-2-22) \\ \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{H}_0 e^{-j(\omega t - \mathbf{K} \cdot \mathbf{r})} & (10-2-23) \end{cases}$$

其中 \mathbf{K} 的**方向定义**为电磁波的**传播方向** \mathbf{Z} ，**大小**为 $\frac{2\pi}{\lambda}$ 。 \mathbf{K} 又称**波矢**， \mathbf{r} 是空间任意点相对于电磁波源的位置矢。这就是**平面电磁波的解**。

3. 平面电磁波的性质(讨论所得解)

现在已经得到了均匀各向同性介质中自由空间的定态平面电磁波的解 (10-2-22)、(10-2-23)。可以将它们代入麦克斯韦方程组 (10-2-9) — (10-2-12)中, 考虑到 $\nabla \Rightarrow j\mathbf{K}, \frac{\partial}{\partial t} \Rightarrow -j\omega$, 有:

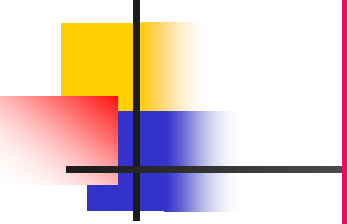
$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{K} \cdot \mathbf{E} = 0, \end{array} \right. \quad (10-2-24)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{K} \cdot \mathbf{H} = 0, \end{array} \right. \quad (10-2-25)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{K} \times \mathbf{E} = \mu\omega\mathbf{H}, \end{array} \right. \quad (10-2-26)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{K} \times \mathbf{H} = -\varepsilon\omega\mathbf{E}. \end{array} \right. \quad (10-2-27)$$

由此可知无限均匀线性各向同性介质中平面电磁波的性质为:


$$\begin{cases} \mathbf{K} \cdot \mathbf{E} = 0, & (10-2-24) \\ \mathbf{K} \cdot \mathbf{H} = 0, & (10-2-25) \\ \mathbf{K} \times \mathbf{E} = \mu\omega\mathbf{H}, & (10-2-26) \\ \mathbf{K} \times \mathbf{H} = -\varepsilon\omega\mathbf{E}. & (10-2-27) \end{cases}$$

(1) 式(10-2-24)说明 $\mathbf{K} \perp \mathbf{E}$ ，式(10-2-25)说明 $\mathbf{K} \perp \mathbf{H}$ ，即电磁场强度与波的传播方向垂直，故平面电磁波是横波。

(2) 式(10-2-26)与(10-2-27)说明 $\mathbf{E} \perp \mathbf{H}$ 即电场强度和磁场强度垂直，且 \mathbf{E} , \mathbf{H} 和 \mathbf{K} 三个矢量构成一个右旋直角坐标系，如图10-2-2所示。

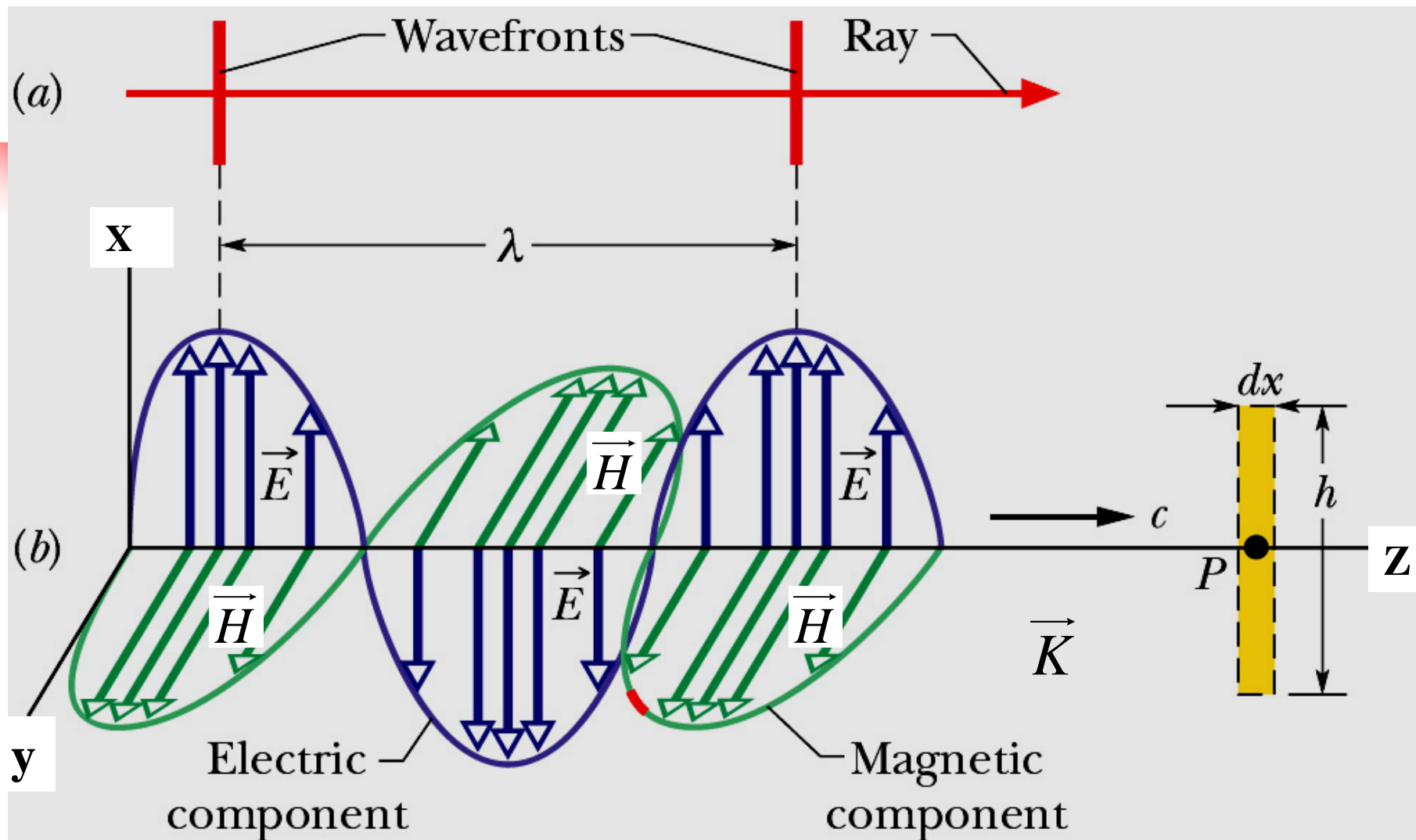


图10-2-2 \vec{E} , \vec{H} 和 \vec{K} 的相互关系


$$\mathbf{K} \times \mathbf{E} = \mu\omega\mathbf{H}, \quad (10-2-26)$$

$$\mathbf{K} \times \mathbf{H} = -\varepsilon\omega\mathbf{E}. \quad (10-2-27)$$

(3) 将K叉乘式(10-2-26)两边, 再将(10-2-27)代入上结果, 得

$$(K^2 - \mu\varepsilon\omega^2)\mathbf{E} = 0$$

要求此式有非零解, 即 $\mathbf{E} \neq 0$, 则必须有

$$K^2 - \mu\varepsilon\omega^2 = 0,$$

于是得:
$$\frac{\omega}{K} = \sqrt{\frac{1}{\mu\varepsilon}} = \sqrt{\frac{\mu_0\varepsilon_0}{\mu\varepsilon}}C = V. \quad (10-2-28)$$



再将式 (10-2-28) 代入式 (10-2-26) 得

$$E_0\sqrt{\varepsilon} = H_0\sqrt{\mu}; \quad \varepsilon E^2 = \mu H^2 \quad (10-2-29)$$

式 (10-2-29) 说明E和H的幅值成比例；
而且，在介质中任一点，任一时刻其**电场
能量密度与磁场能量密度相等**。

(4) 式(10-2-28)说明电磁波的传播速度为 $v = \frac{\omega}{K} = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}} = \sqrt{\frac{\mu_0\varepsilon_0}{\mu\varepsilon}} C$,麦克斯韦预言光即是电磁波,于是可得 $\frac{C}{v} = n$ 是介质的折射率,

$$n = \sqrt{\frac{\mu\varepsilon}{\mu_0\varepsilon_0}} \approx \sqrt{\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}}。$$

■ 一般情况下, 介质 μ 和 ε 是电磁波的频率 ω 的函数, 所以 n 也是 ω 的函数,

$$v = \frac{\omega}{K} = \frac{C}{n} \text{ 又称色散关系。}$$

4. 赫兹实验及发射天线

1865年麦克斯韦预言了电磁波的存在，直到**1888**年才由赫兹的实验证实。

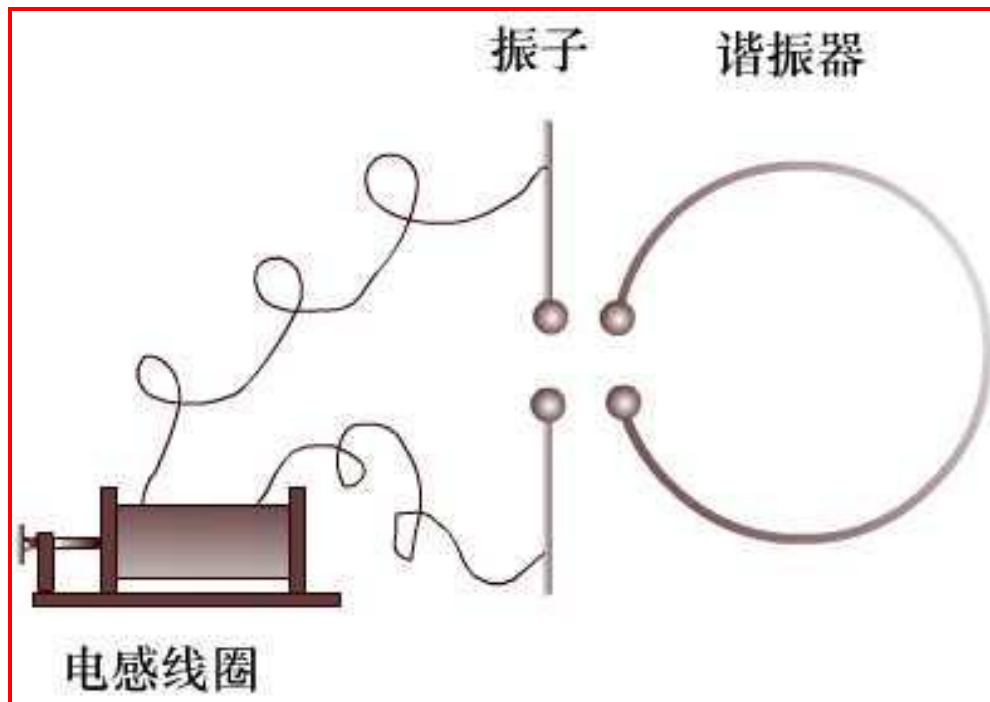


图10-2-3 赫兹实验的原理

天线原理

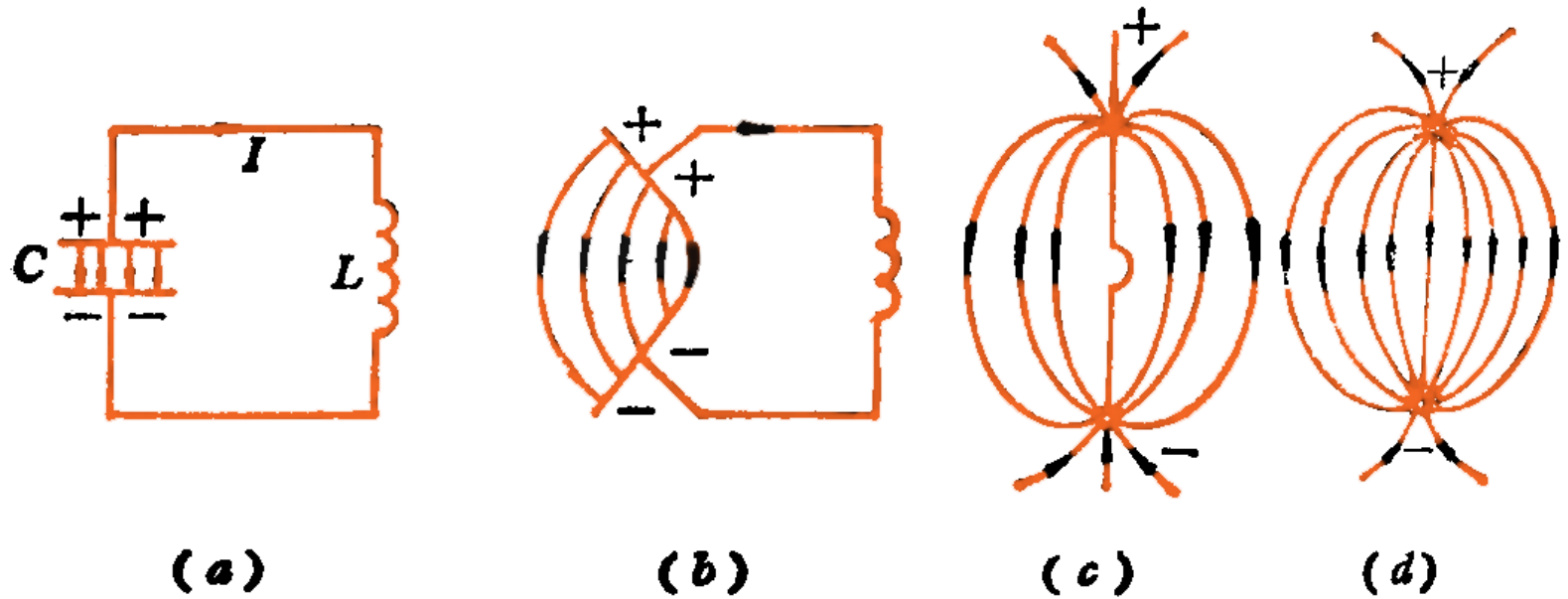


图10-2-4 由LC振荡电路变为偶极振子

电场和磁场向空间散开，因为 $L \propto N^2$ 、 $C \propto \frac{S}{d}$ ，所以
以现在L、C都很小，因此振荡频率很高， $f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$

单位时间内辐射能量 $\propto f_0^4$

电磁波谱：射电、红外、可见光、紫外、X-射线、

γ -射线

§ 10-3 电磁场的能量、动量和角动量

一、一般表达

对静止各向同性介质中的电磁场的
能量密度 w ，能流密度（又称坡印亭矢
量） \mathbf{S} ，动量密度 \mathbf{g} ，角动量密度 \mathbf{l}
表达式如下：

$$w = \frac{1}{2} \mathbf{D} \cdot \mathbf{E} + \frac{1}{2} \mathbf{B} \cdot \mathbf{H}, \quad (10-3-1)$$

$$\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H}, \quad (10-3-2)$$

$$\mathbf{g} = \mathbf{D} \times \mathbf{B}, \quad (10-3-3)$$

$$\mathbf{l} = \mathbf{r} \times \mathbf{g}. \quad (10-3-4)$$



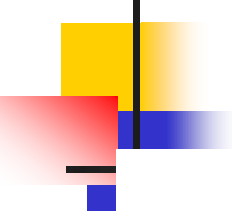
于是，**体积 V** 中电磁场的总能量、总动量和总角动量分别为如下体积分：

$$W = \iiint_V w dV, \quad \mathbf{G} = \iiint_V \mathbf{g} dV, \quad \mathbf{L} = \iiint_V \mathbf{l} dV, \quad (10-3-5)$$

能量守恒定律的表达式为：

$$\oiint_S \mathbf{S} \cdot d\mathbf{A} = -\frac{d}{dt} (W + W_n) \quad (10-3-6)$$

上式中 $d\mathbf{A}$ 为积分的面元， W_n **是非电磁**的总能量。可将上式**与电荷守恒定律比较**，以便加深理解。



为加深对**电磁场角动量**的理解，我们可以作一个简单的实验，如图10-3-1，一圆柱形介质电容器，长度为 l ，充满介电常数为 ϵ 的均匀各向同性介质，内外半径为 r_1 、 r_2 ，绕轴的**转动惯量为 I** ，板极充电荷为 $\pm Q$ ，置于一均匀磁场 **\mathbf{B}** 中。

当电容器**放电**后，**电容器便绕轴旋转**，其角速度为 **ω** ， **ω** 的大小可通过电磁场的角动量计算如下：

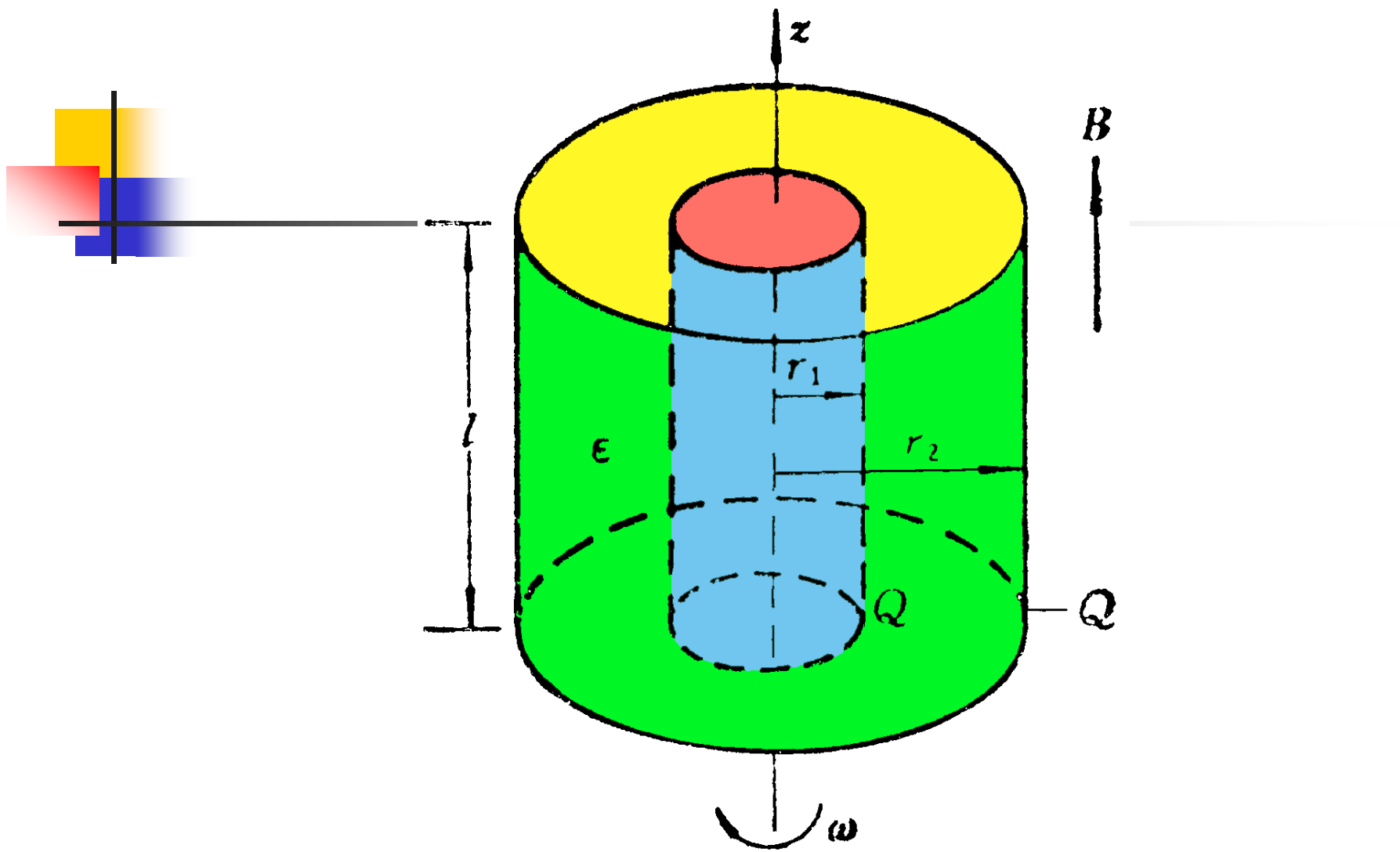


图10-3-1 轴向均匀磁场中的圆柱电容器

充电后：略去边缘效应，电容器中：

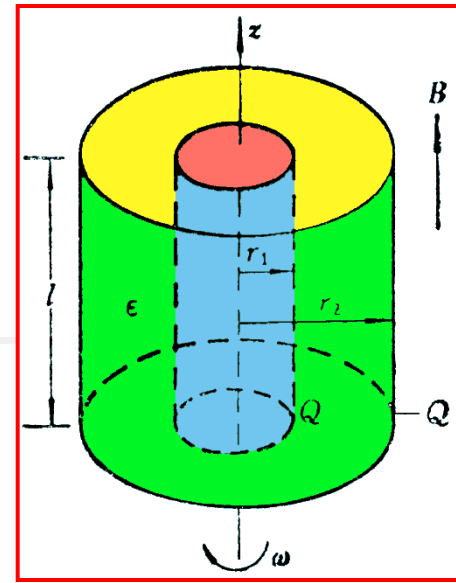
$$\oiint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = Q$$

得

$$D = \frac{Q}{2\pi r \cdot l}, \quad \mathbf{D} = \frac{Q}{2\pi r l} \hat{\mathbf{r}}$$

$$\mathbf{g} = \mathbf{D} \times \mathbf{B} = DB \hat{\mathbf{r}} \times \hat{\mathbf{z}} = -\frac{QB}{2\pi r l} \hat{\boldsymbol{\phi}},$$

$$\mathbf{l} = \mathbf{r} \times \mathbf{g} = -\frac{QB}{2\pi l} \hat{\mathbf{z}},$$





于是电容器内电磁场的总角动量为

$$\mathbf{L} = \iiint_V \mathbf{l} dV = -\frac{QB}{2\pi l} (\pi r_2^2 - \pi r_1^2) \cdot l \hat{\mathbf{z}} = -\frac{1}{2} QB (r_2^2 - r_1^2) \hat{\mathbf{z}}$$

放电后：电容器内 $\mathbf{E}=0, \mathbf{D}=0$ ，电磁场的角动量为零。**由总角动量守恒**，则

$$0 + \mathbf{L}_n = \mathbf{L}, \text{ 即 } I\omega = -\frac{1}{2} QB (r_2^2 - r_1^2).$$

于是得：

$$\omega = -\frac{1}{2I} QB (r_2^2 - r_1^2)$$

上式中**负号**表示电容器顺时针旋转。

二、平面电磁波的能量、动量

$$\text{能量密度: } w = \varepsilon E^2 = \mu H^2$$

$$\text{能流密度: } \mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H} = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} E^2 \frac{\mathbf{v}}{v} = \frac{\varepsilon E^2}{\sqrt{\mu\varepsilon}} \frac{\mathbf{v}}{v} = w\mathbf{v}$$

$$\text{动量密度: } \mathbf{g} = \mu\varepsilon \mathbf{E} \times \mathbf{H} = \frac{\mathbf{S}}{v^2} = w \frac{\mathbf{v}}{v^2}$$

} 瞬时值

如果在真空中, 则有: $v = c, \quad S = wc, \quad g = \frac{w}{c} = \frac{S}{c^2}$



按时间的平均值:

$$\bar{w} = \frac{1}{T} \int_0^T w(t) dt = \frac{1}{2} \varepsilon E_0^2$$

$$\bar{\mathbf{S}} = \frac{1}{2} \varepsilon E_0^2 \mathbf{v} = \bar{w} \mathbf{v}$$

$$\bar{\mathbf{g}} = \frac{1}{2} \varepsilon E_0^2 \frac{\mathbf{v}}{v^2} = \frac{\bar{\mathbf{S}}}{v^2}$$

三. 光压 (电磁波即光波)

电磁波具有动量、能流密度，照射到物体表面后反射，**动量改变**(方向、大小)，**造成光压**。如下图**10-3-2**示：

电磁波 **⊥入射**到物体表面，有 $S_{\text{入}}$ ， $S_{\text{反}}$

定义 $R \equiv \frac{S_{\text{反}}}{S_{\text{入}}}$ 称反射系数

当 $R = \begin{cases} 1 & \text{称全反射} \\ 0 & \text{称全吸收} \end{cases}$

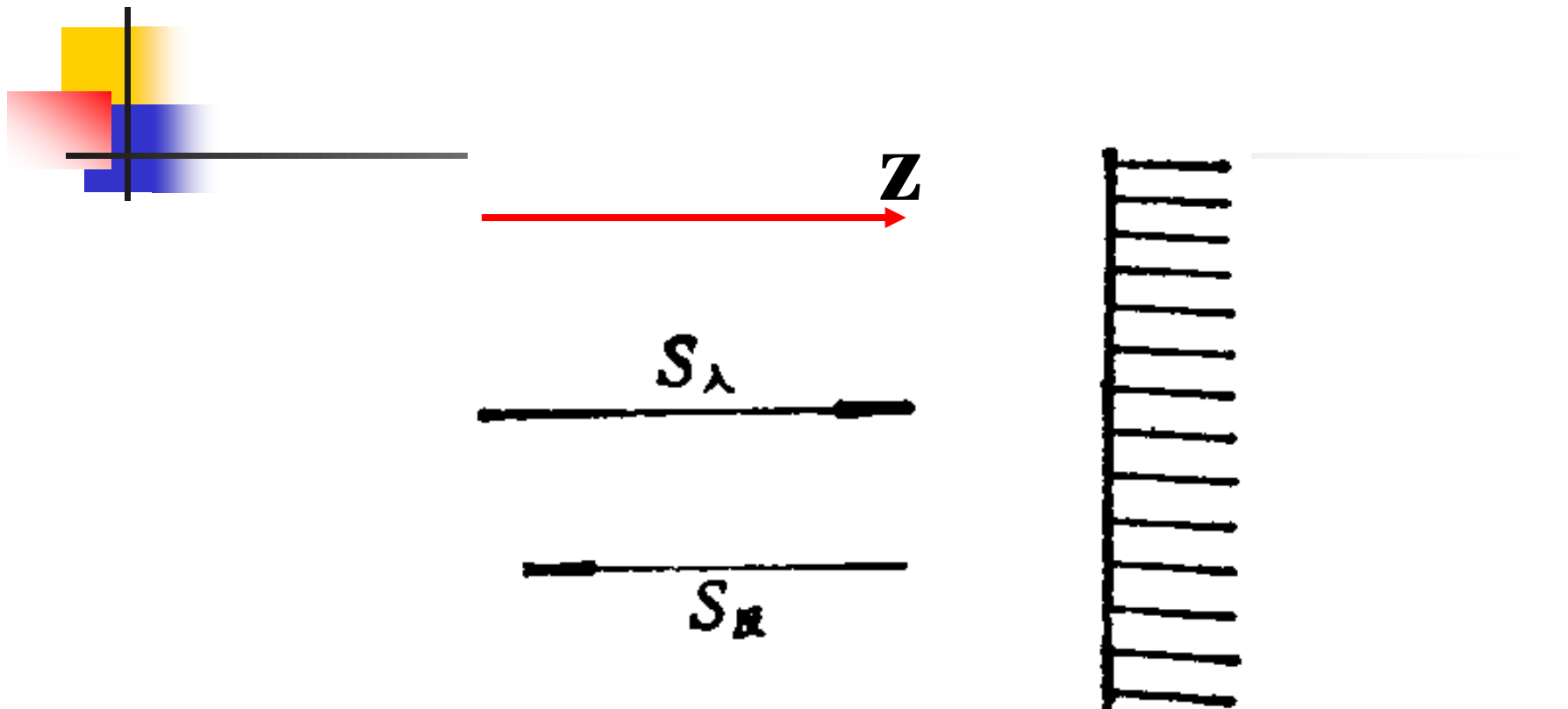
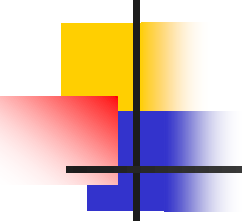


图10-3-2 光压分析示意图



设物体表面一面元 ΔA ，在 Δt 时间内，
电磁波动量改变是：

$$\begin{aligned}(\vec{g}_\lambda - \vec{g}_\text{反}) \cdot \Delta A \cdot (C \cdot \Delta t) &= \frac{\Delta A \cdot \Delta t}{C} C^2 (g_\lambda + g_\text{反}) \hat{Z} \\ &= \frac{\Delta A \cdot \Delta t}{C} \cdot (S_\lambda + S_\text{反}) \hat{Z} \\ &= \frac{\Delta A \cdot \Delta t}{C} \cdot S_\lambda (1 + R) \hat{Z} \\ &= \Delta A \cdot \Delta t \cdot w (1 + R) \hat{Z}\end{aligned}$$



又，动量的改变=冲量

$$\Delta A \cdot \Delta t \cdot w(1+R)\hat{Z} = p \cdot \Delta A \cdot \Delta t \hat{Z}, \quad p \text{ 是压强}$$

$$\therefore p = w(1+R)$$

$$\text{平均光压强: } \bar{p} = (1+R)\bar{w}$$

[例]

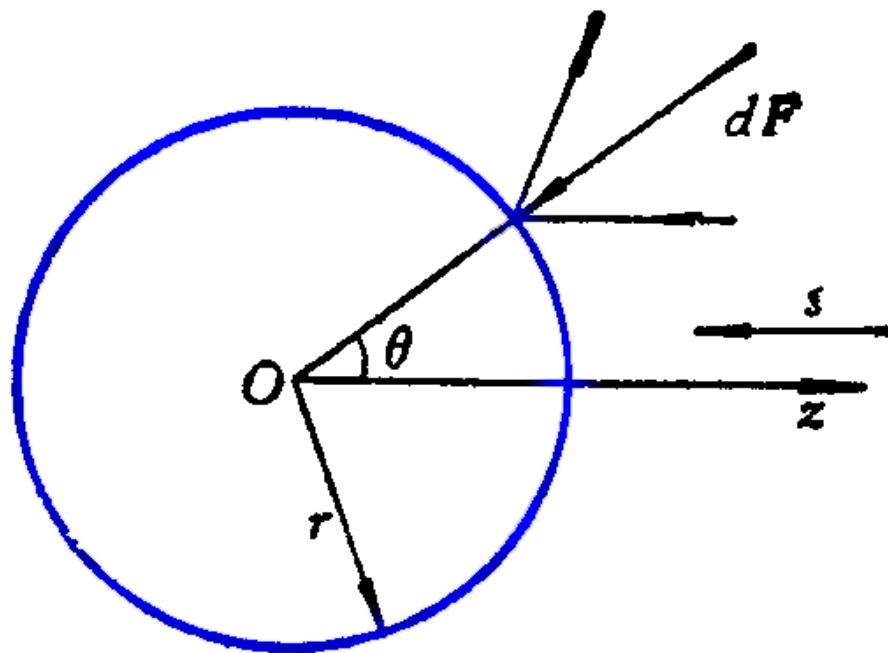


图10-3-3 平行光束给球面的总压力



[解]: $\bar{w} = \frac{\bar{S}}{C}$, 取表面元 ΔA ,

入射到 ΔA 上的光通道截面是 $\Delta A \cdot \cos \theta$,

且 $\perp \Delta A$ 的入射能流是 $\bar{S} \cdot \cos \theta$, ΔA 的正压力为:

全反射时: $d\vec{F} = -2\bar{w} \Delta A \cos^2 \theta \cdot \vec{n}$

$$= -\frac{2\bar{S}}{C} \cos^2 \theta \Delta A \cdot \vec{n}$$

$d\vec{F}$ 只有 $\hat{\mathbf{Z}}$ 方向分量不抵消 $dF_Z = dF \cdot \cos \theta$

积分得 $F_Z = - \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{2\bar{S}}{C} \cos^3 \theta \cdot r^2 \sin \theta d\theta d\varphi$

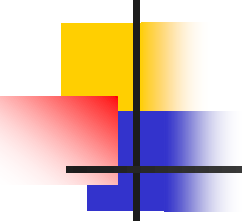
$$= -\pi r^2 \frac{\bar{S}}{C}$$

全吸收时, 光通道截面内的光全被吸收,

即 $\Delta A \cdot \cos \theta$ 上的正压力为:

$$d\vec{F} = -w \Delta A \cdot \cos \theta \cdot \hat{\mathbf{Z}}$$

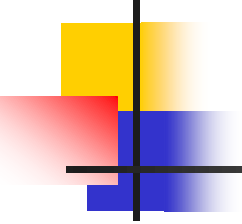
$$\therefore F_Z = - \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{\bar{S}}{C} \cos \theta \cdot r^2 \sin \theta d\theta d\varphi$$
$$= -\pi r^2 \frac{\bar{S}}{C}$$



四、什么是电磁场？

电磁场是物质的一种形态

- 电磁场和实物是物质存在的两种不同的形态。电磁场与实物有很多**相同点**，例如，它们都具有能量、动量及角动量。
 - 但另一方面，电磁场与实物又存在一些**差异**：
 - 1、如电磁场的基本组成部分是光子，而**光子是没有静止质量**的，但构成实物的电子、质子等微观粒子都具有静止质量；
 - 2、电磁场以**波的形式**在空间中传播，在真空中的**速率永远是** $c = 3 \times 10^8$ m/s，在折射率为n的介质中的传播速度为c/n；
 - 3、一种实物占有的空间不能同时被另一种实物占领，即**实物具有不可入性**，可是**频率不同的电磁波**，可以同时占有同一空间，独立存在，各自保持自己的特性不变。
- 综上所述，**电磁场与实物有相同点也有不同点**。



本章小结

介质中、非稳恒情况下的电磁场规律

-----麦克斯韦方程组:

积分形式

$$\oiint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = \iiint_V \rho_0 dV,$$

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \iint_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S},$$

$$\oiint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0,$$

$$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{l} = \iint_S \left(\vec{j}_0 + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) \cdot d\vec{S}.$$

微分形式

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho_0, \quad (10-1-5)$$

$$\nabla \times \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad (10-1-6)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0, \quad (10-1-7)$$

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{j}_0 + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}. \quad (10-1-8)$$

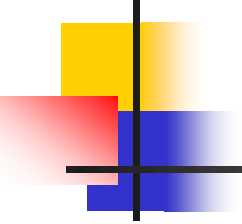
从微分形式的麦克斯韦方程和均匀各向同性线性介质的电磁性能方程出发；

在自由空间 $\rho_0 = 0$, $\vec{j}_0 = 0$, $\sigma = 0$ 的介质中的电磁场的波动方程：

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} - \frac{1}{\mu\epsilon} \nabla^2 \vec{E} = 0, \\ \end{array} \right. \quad (10-2-13)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} - \frac{1}{\mu\epsilon} \nabla^2 \vec{H} = 0. \\ \end{array} \right. \quad (10-2-14)$$

即脱离了场源的电磁场是以波的形式在无界的、自由的均匀各向同性介质中传播，这就是电磁波，它的传播速度为：



$$V = \sqrt{\frac{1}{\mu\varepsilon}} = \sqrt{\frac{\mu_0\varepsilon_0}{\mu\varepsilon}}C. \quad (9-2-15)$$

$$C = \frac{1}{\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}}$$

C是真空中光速，由此麦克斯韦预言光即是电磁波。

电磁波传播的物理图像：

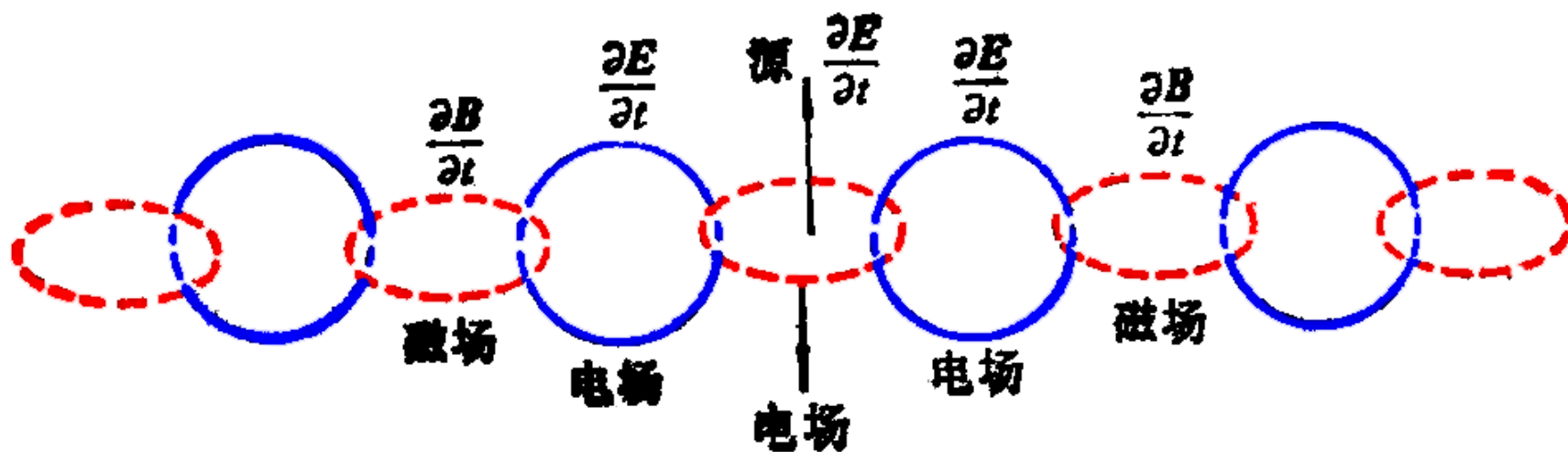


图10-1-1 电磁波存在的理论预言示意图



平面电磁波的性质

(1) $\vec{k} \perp \vec{E}$, $\vec{k} \perp \vec{H}$ 即电磁场强度与波的传播方向垂直, 故电磁波是横波。

(2) $\vec{E} \perp \vec{H}$ 即电场强度和磁场强度垂直, 且 \vec{E} 、 \vec{H} 和 \vec{k} 三个矢量构成一个右旋直角坐标系:

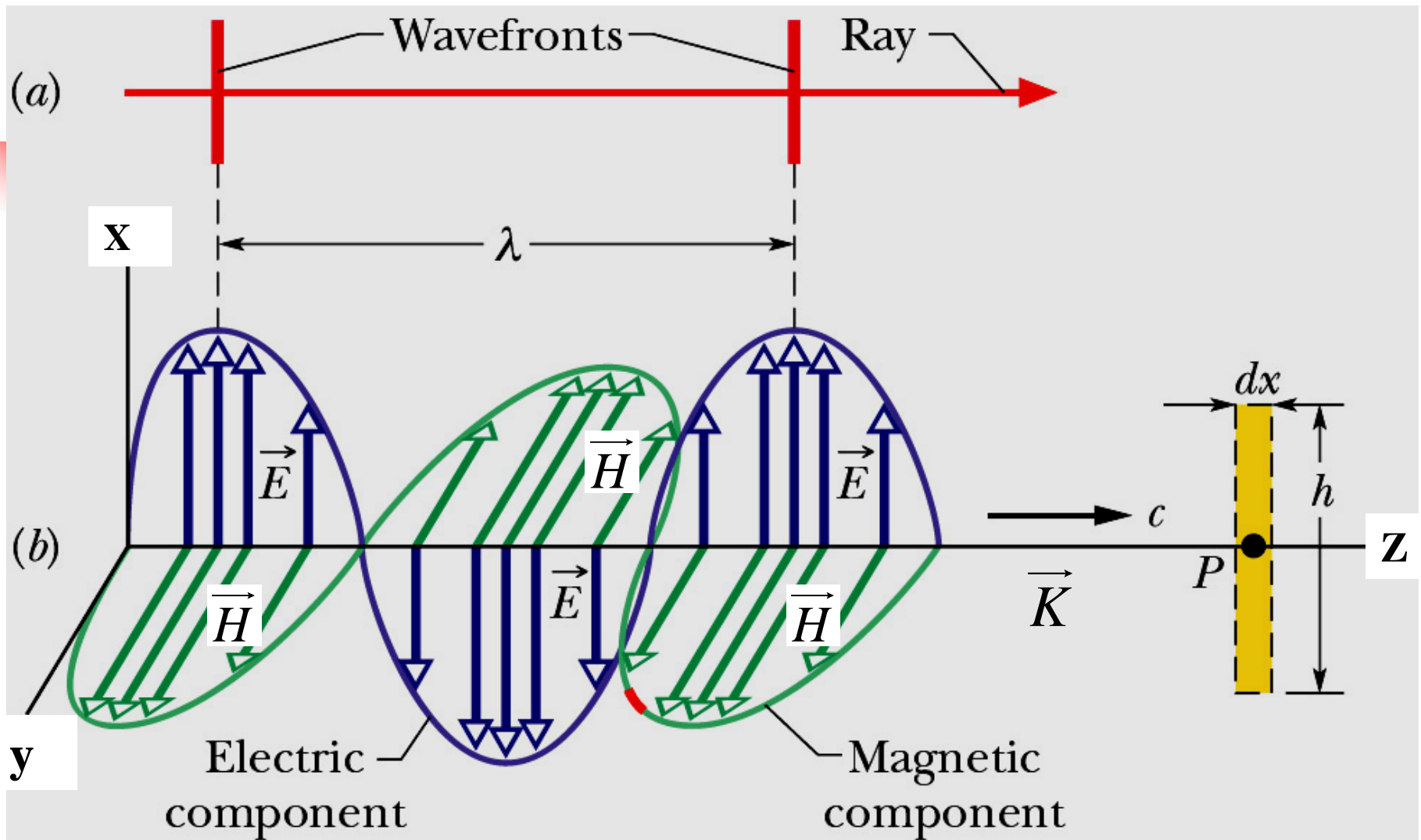


图10-2-2 \mathbf{E} , \mathbf{H} 和 \mathbf{K} 的相互关系



(3) \vec{E} 和 \vec{H} 的幅值成比例

$$E_0\sqrt{\varepsilon} = H_0\sqrt{\mu}; \quad \varepsilon E^2 = \mu H^2 \quad (10-2-29)$$

\vec{E} 和 \vec{H} 的幅值成比例；在介质中任一点，任一时刻其电场能量密度与磁场能量密度相等。



(4) 电磁波的传播速度为:

$$V = \frac{\omega}{K} = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}} = \sqrt{\frac{\mu_0\varepsilon_0}{\mu\varepsilon}} C$$

麦克斯韦预言光即是电磁波。

赫兹实验

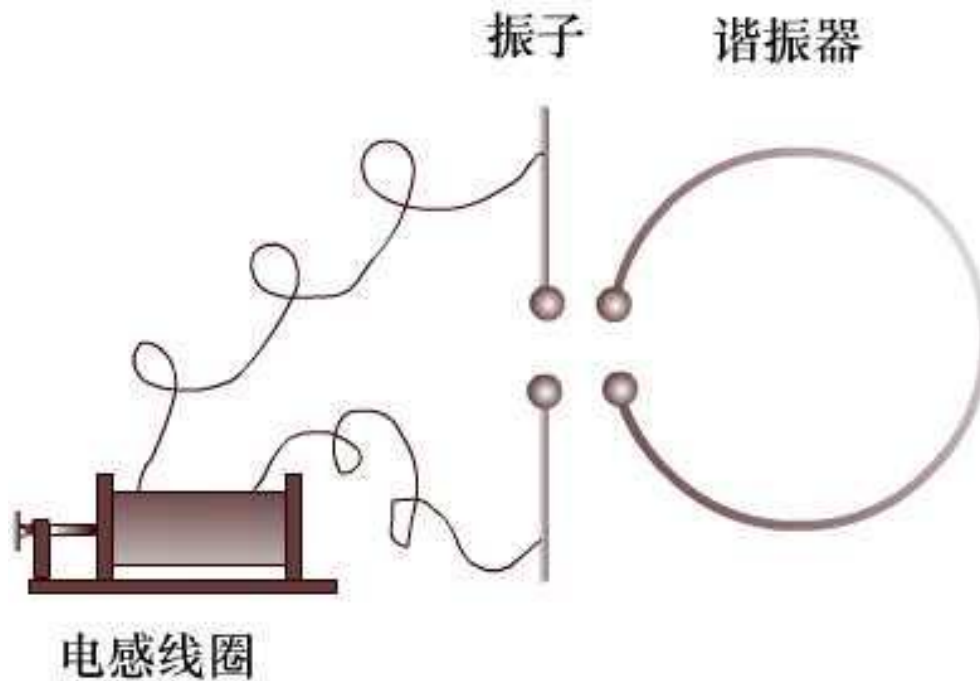
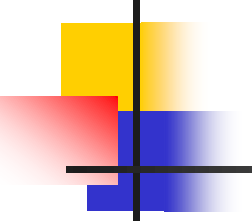


图10-2-3 赫兹实验的原理



电磁场的能量、动量和角动量

对静止各向同性介质中的电磁场，场的**能量密度** w ，**能流密度**（又称坡印廷矢量） \vec{S} ，**动量密度** \vec{g} ，**角动量密度** \vec{l} 表达式如下：

$$w = \frac{1}{2} \vec{D} \cdot \vec{E} + \frac{1}{2} \vec{B} \cdot \vec{H}, \quad (10-3-1)$$

$$\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}, \quad (10-3-2)$$

$$\vec{g} = \vec{D} \times \vec{B}, \quad (10-3-3)$$

$$\vec{l} = \vec{r} \times \vec{g}. \quad (10-3-4)$$

平面电磁波的能量、动量

$$\text{能量密度: } w = \varepsilon E^2 = \mu H^2$$

$$\text{能流密度: } \vec{S} = \vec{E} \times \vec{H} = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} E^2 \frac{\vec{v}}{v} = \frac{\varepsilon E^2}{\sqrt{\mu\varepsilon}} \frac{\vec{v}}{v} = w\vec{v}$$

$$\text{动量密度: } \vec{g} = \mu\varepsilon \vec{E} \times \vec{H} = \frac{\vec{S}}{v^2} = w \frac{\vec{v}}{v^2}$$

} 瞬时值

如果在真空中，则有： $v = c$ ， $S = wc$ ， $g = \frac{w}{c} = \frac{S}{c^2}$



按时间的平均值:

$$\bar{w} = \frac{1}{T} \int_0^T w(t) dt = \frac{1}{2} \varepsilon E_0^2$$

$$\bar{\vec{S}} = \frac{1}{2} \varepsilon E_0^2 \vec{v} = \bar{w} \vec{v}$$

$$\bar{g} = \frac{1}{2} \varepsilon E_0^2 \frac{\vec{v}}{v^2} = \frac{\bar{\vec{S}}}{v^2}$$