



Theory of Machines and Mechanisms (机械原理)



Chapter1 Introduction

Chapter2 Structural Analysis of Planar Mechanisms

Chapter3 Kinematic Analysis of Mechanisms

Chapter4 Planar Linkage Mechanisms

Chapter 5 Cam Mechanisms

Chapter 6 Gear Mechanisms

Chapter 7 Gear Trains

Chapter 8 Other Mechanisms in Common Use

Chapter 9 Balancing of Machinery

Chapter 10 Motion of Mechanical Systems and Its Regulation

Chapter 11 Efficiency of Machine



Chapter 3

Kinematic Analysis of

Mechanisms



3.1 Tasks and Methods of Kinematic Analysis

不考虑引起机构运动外力的影响，仅仅研究已知原动件运动规律的情况下，输出构件的运动情况。

Task: to find positions, velocities and accelerations or angular positions, angular velocities and angular accelerations

Position: to determine whether all links will interfere(干涉) with each other, to find locus(轨迹)

Velocity: to calculate the stored kinetic energy(动能) or power(功率) P .

Acc.: To calculate the dynamic forces



method

Instant(瞬时的) centre method for velocity



Vector(矢量) equation method



graphical method (图解法): 直观, 精度不高

analytical method (解析法): 精度高, 计算烦琐



experimental method (实验法): 需专门的仪器

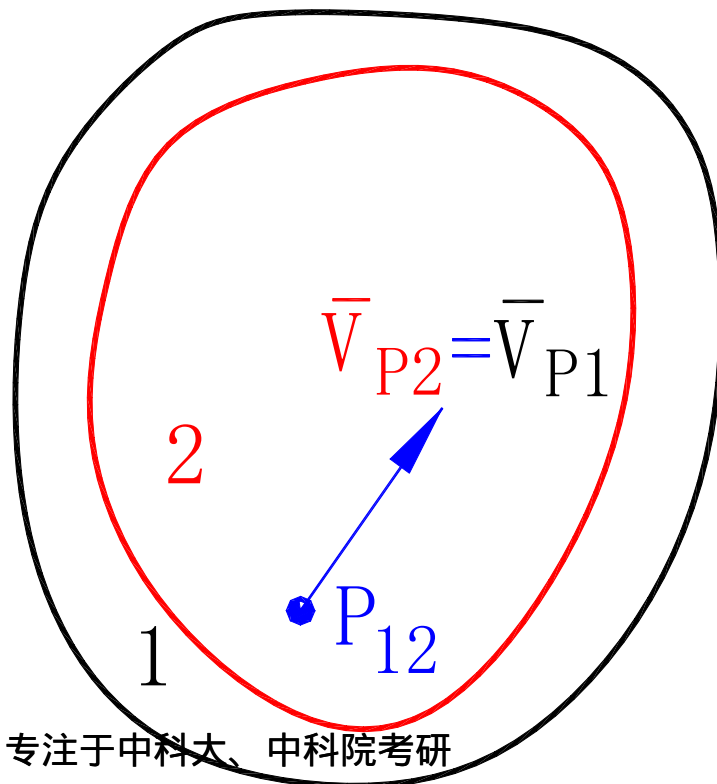


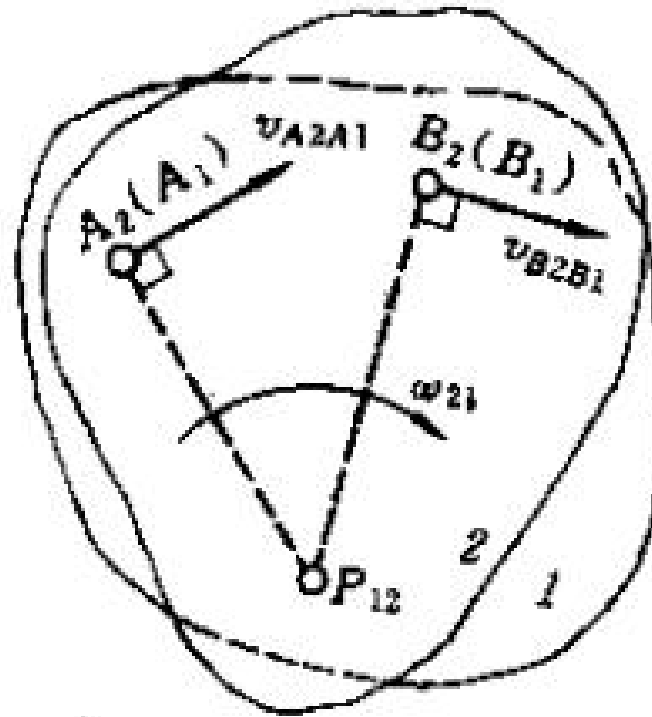
3.2 Velocity Analysis by the Method of instant Centres

3.2.1 Definition of the Instant Centre

刚体2相对于另一刚体1（固体坐标系）作平面运动，在任一瞬时，该平面运动都可看成绕某一相对静止点的转动，该点称为速度瞬时中心（瞬心）

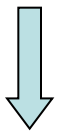
instant center $\rightarrow P_{12}$



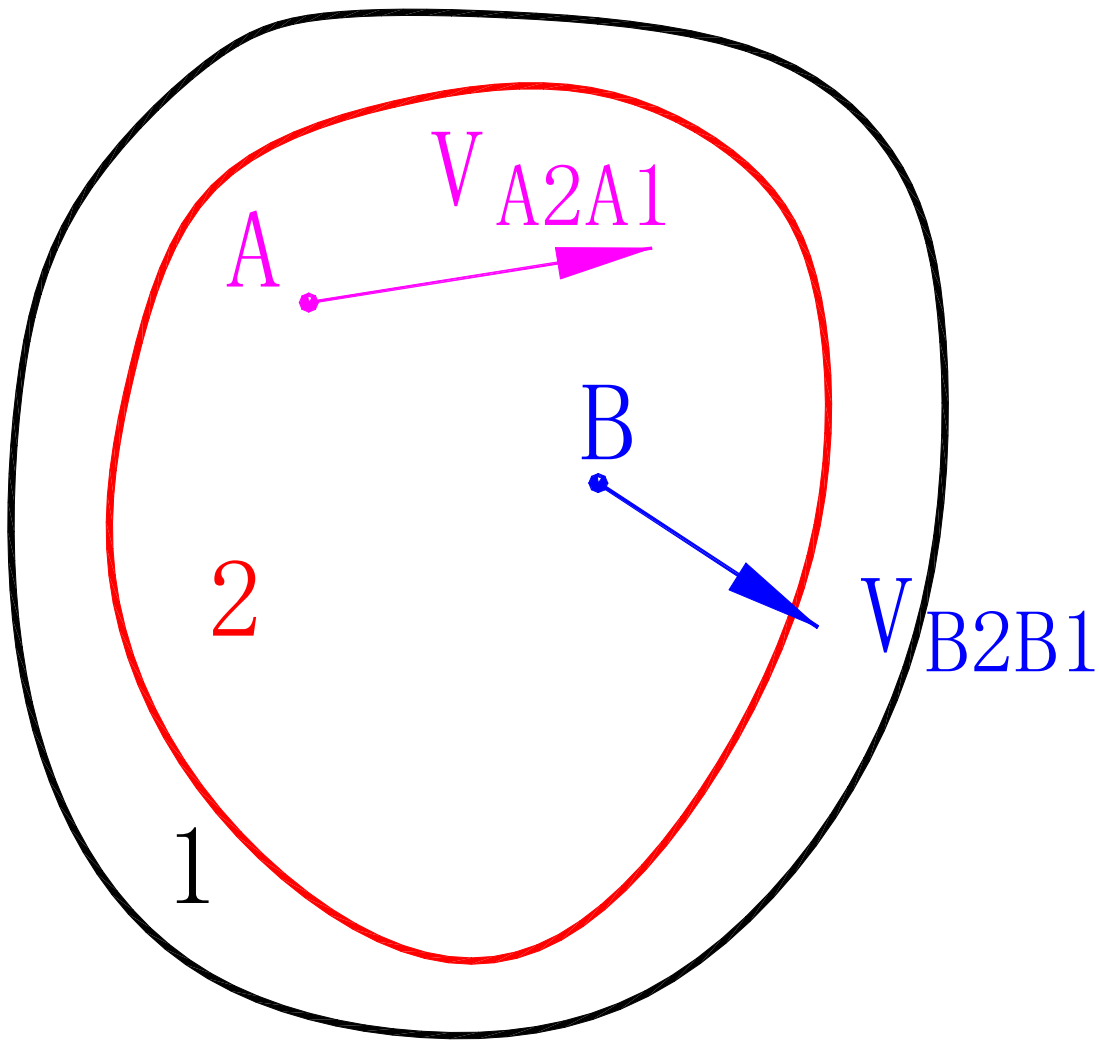


V_{A2A1} → 刚体2上的A点相对于刚体1上的A点的相对速度， $V_{A2A1} \perp AP$ 。 V_{B2B1} 同理。

Suppose that the positions of points A and B, the directions of V_{A2A1} and V_{B2B1} are known.



可通过 V_{A2A1} , V_{B2B1} 求 P12 点。

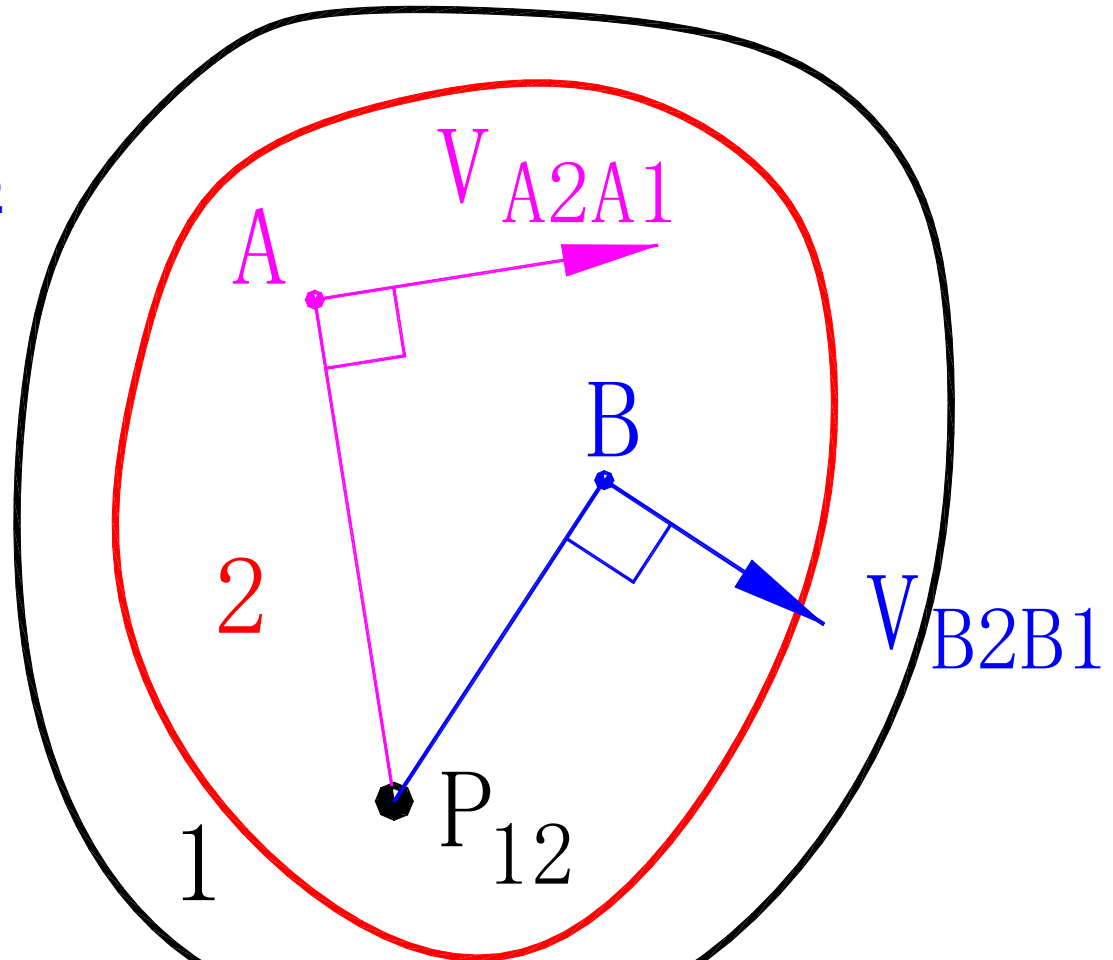




$$\mathbf{V}_{A2A1} \perp \mathbf{AP}. \quad \mathbf{V}_{B2B1} \perp \mathbf{BP}.$$



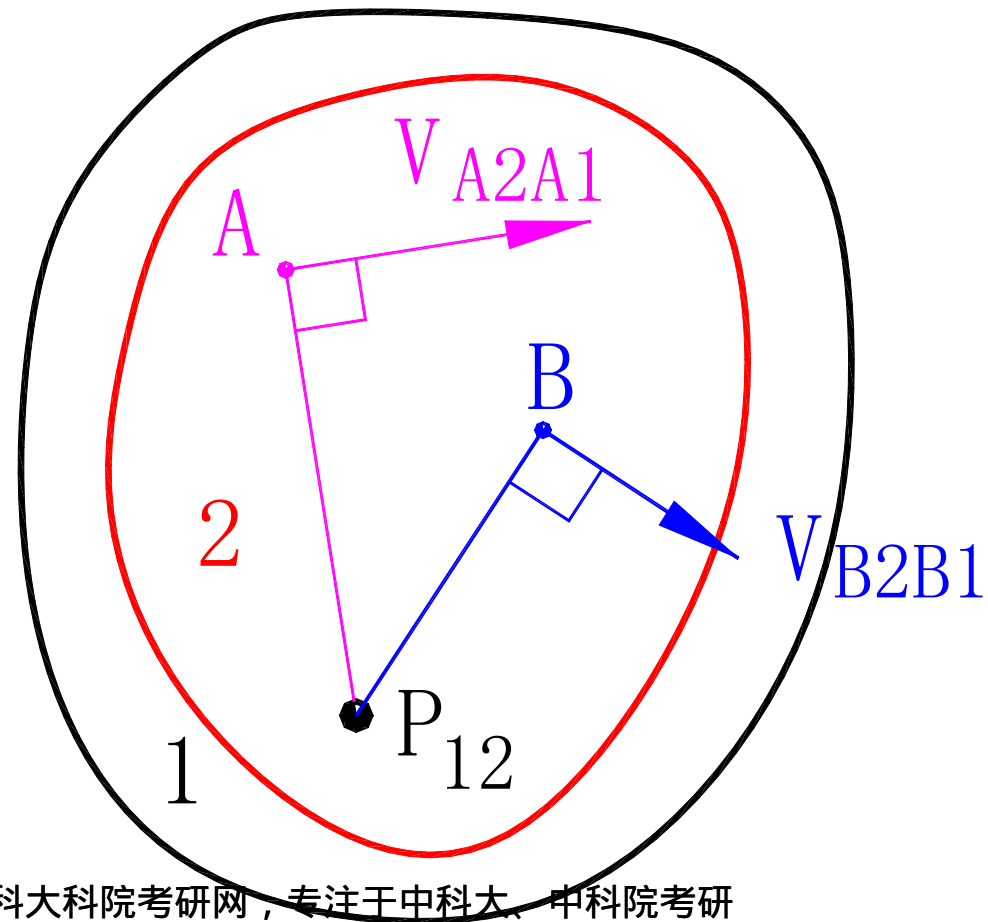
instant center $\rightarrow P_{12}$





One of bodies is static \rightarrow absolute instant center

Both of them are moving \rightarrow relative instant center





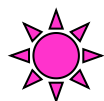
Attention:

instant center



a pair of coincident(重合) points, the absolute(绝对) velocities of which are the same, in both magnitude(大小) and direction.

具有相同的绝对速度的重合点。



relative velocity is zero.
两构件上相对速度是零的重合点



3.2.2 Number of Instant Centers of a Mechanism

发生相对运动的任意两构件之间都有一个瞬心

$$N = C_k^2 = \frac{k(k-1)}{2!} = \frac{k(k-1)}{2}$$

k—number of links including the frame

instant center—the center of revolves

完整版，请访问www.kaoyancas.net 科大科院考研网，专注于中科大、中科院考研

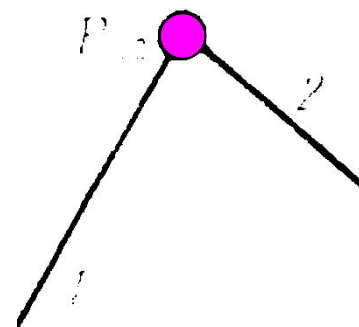
团结 献身

求是 创新



3.2.3 Location of the Instant Center of two links connected by a kinematic pair

(1) Revolute Pair

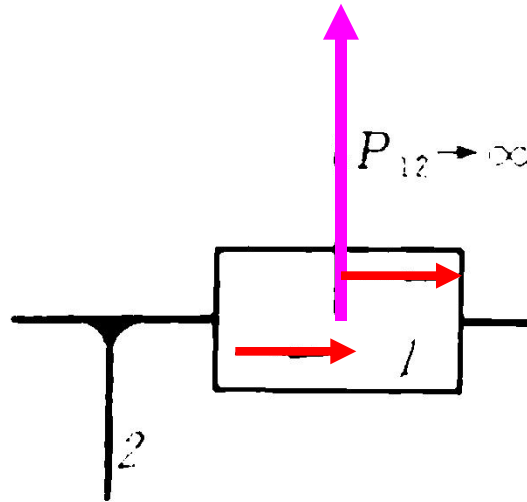


若两构件组成回转副，则回转副中心为其速度瞬心；



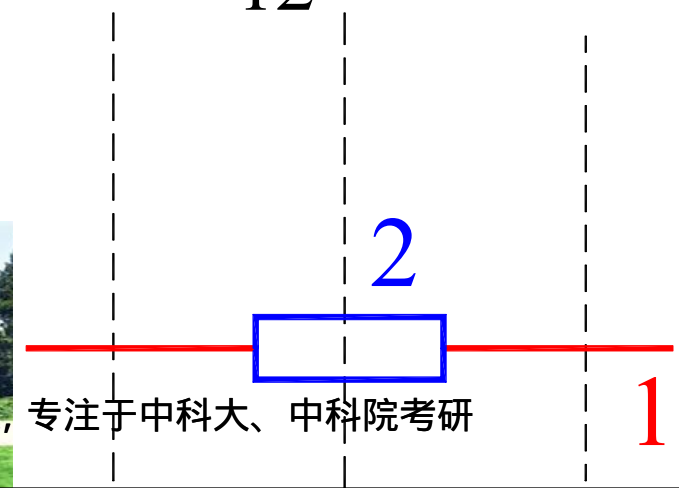
(2) Sliding Pair

Instant center: lies at infinity in either direction
Perpendicular to the guide-way.



$P_{12} \infty$

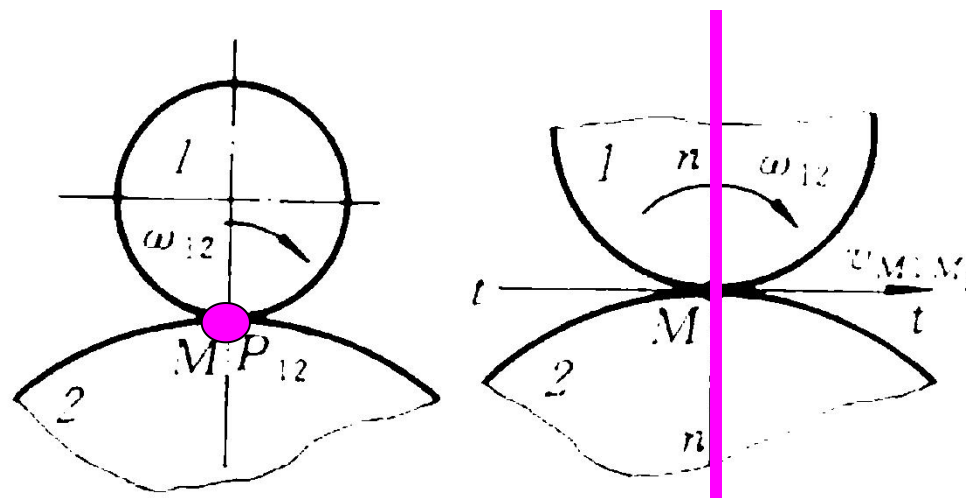
Attention: The common normal(公法线) may pass through any point !!





(3) Higher Pair: Pure-rolling Pair

Instant center—the point of contact



(4) Higher Pair :rolling & sliding Pair

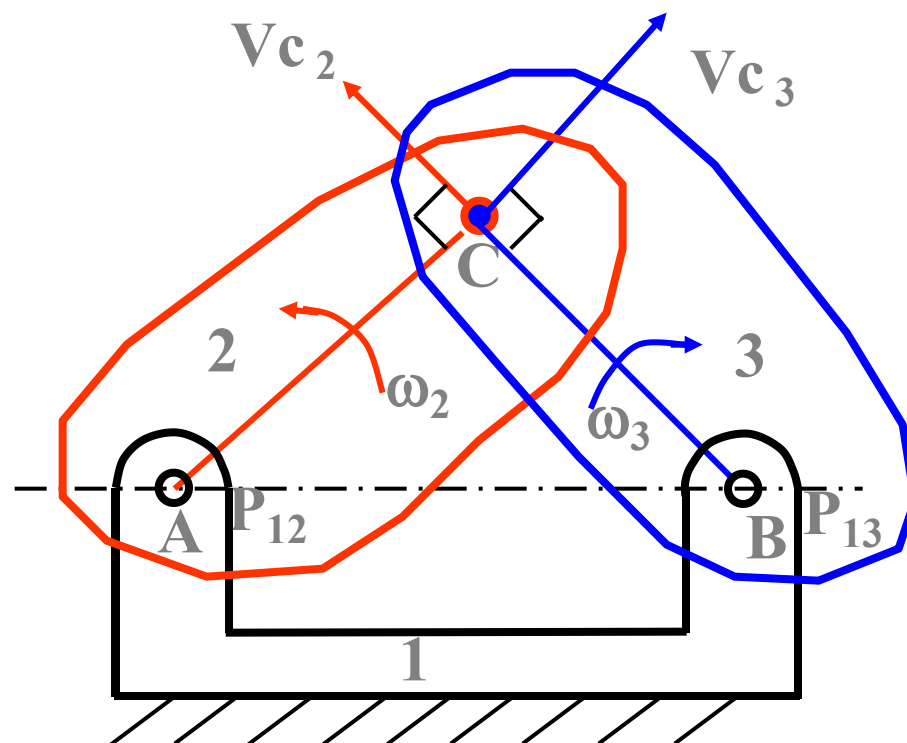
Instant center—lies somewhere on the common normal (公法线) through the point of contact





3.2.4 Theorem of Three Centres (Aronhold-Kennedy Theorem)

Any three links have three instant centers. They must lie on a straight line

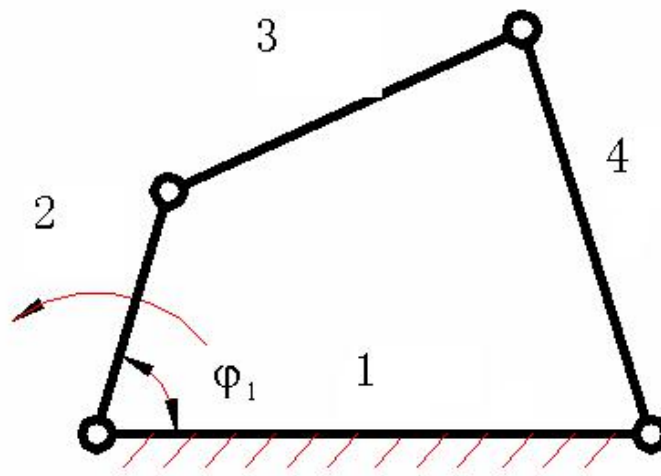




3.2.5 Applications of Instant Centers

Example 1: Locate all instant centers for the revolute four-bar linkage.

- (1) locate all instant centers for the mechanism
- (2) find the ratio ω_2/ω_4





Solution:

(1) locate all instant centers

$$K = \frac{1}{2} N(N - 1) = \frac{1}{2} \times 4 \times (4 - 1) = 6$$

Find: P_{12} 、 P_{23} 、 P_{34} 和 P_{14} ;

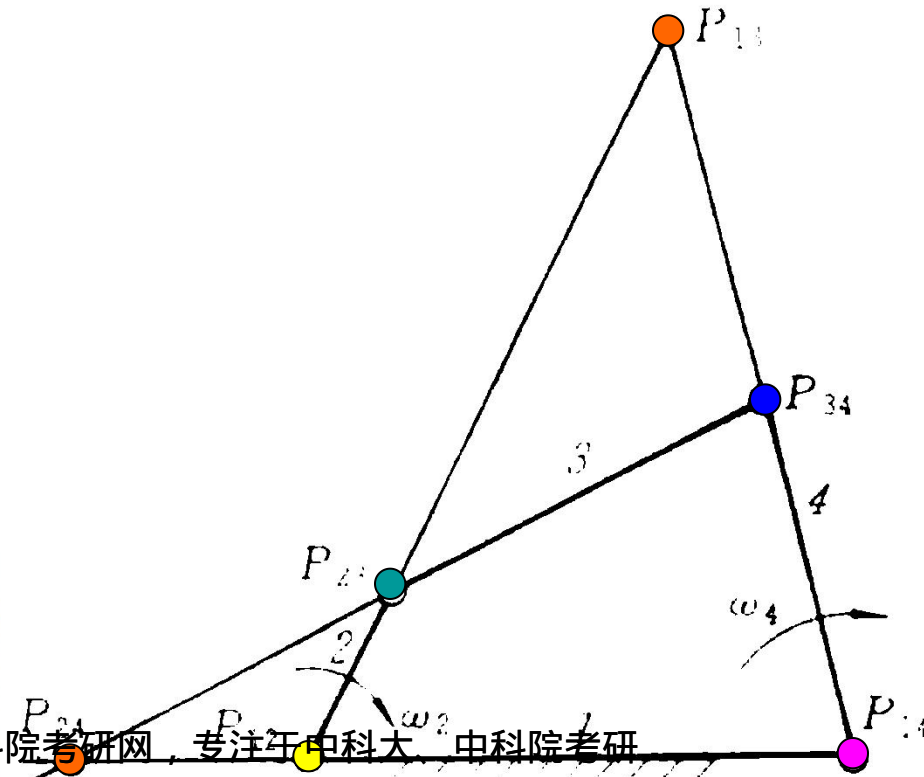
再由三心定理可知:

P_{12} , P_{14} \Rightarrow P_{24}

P_{23} , P_{34}

P_{12} , P_{23} \Rightarrow P_{13}

P_{14} , P_{34}



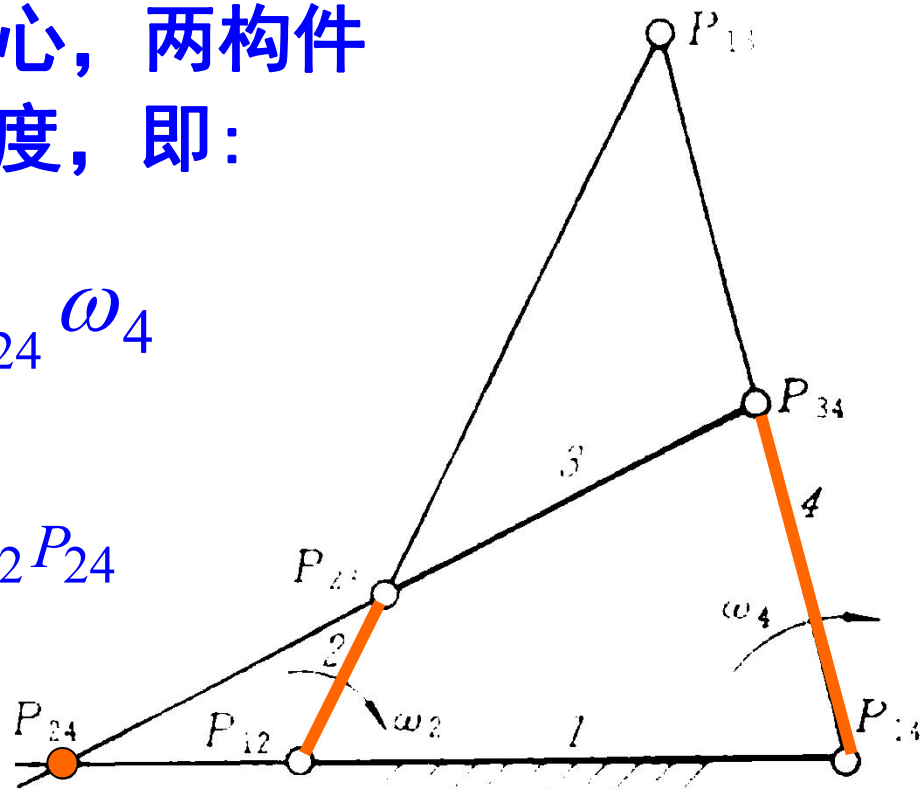


(2) find the ratio ω_2/ω_4

P_{24} 为构件2和构件4的速度瞬心，两构件在 P_{24} 处应有相等的绝对速度，即：

$$v_{P_{24}} = l_{P_{12}P_{24}} \omega_2 = l_{P_{14}P_{24}} \omega_4$$

$$i_{24} = \omega_2 / \omega_4 = l_{P_{14}P_{24}} / l_{P_{12}P_{24}}$$



P_{24} 在 P_{12} 、 P_{14} 的同一侧， ω_2 和 ω_4 方向相同。

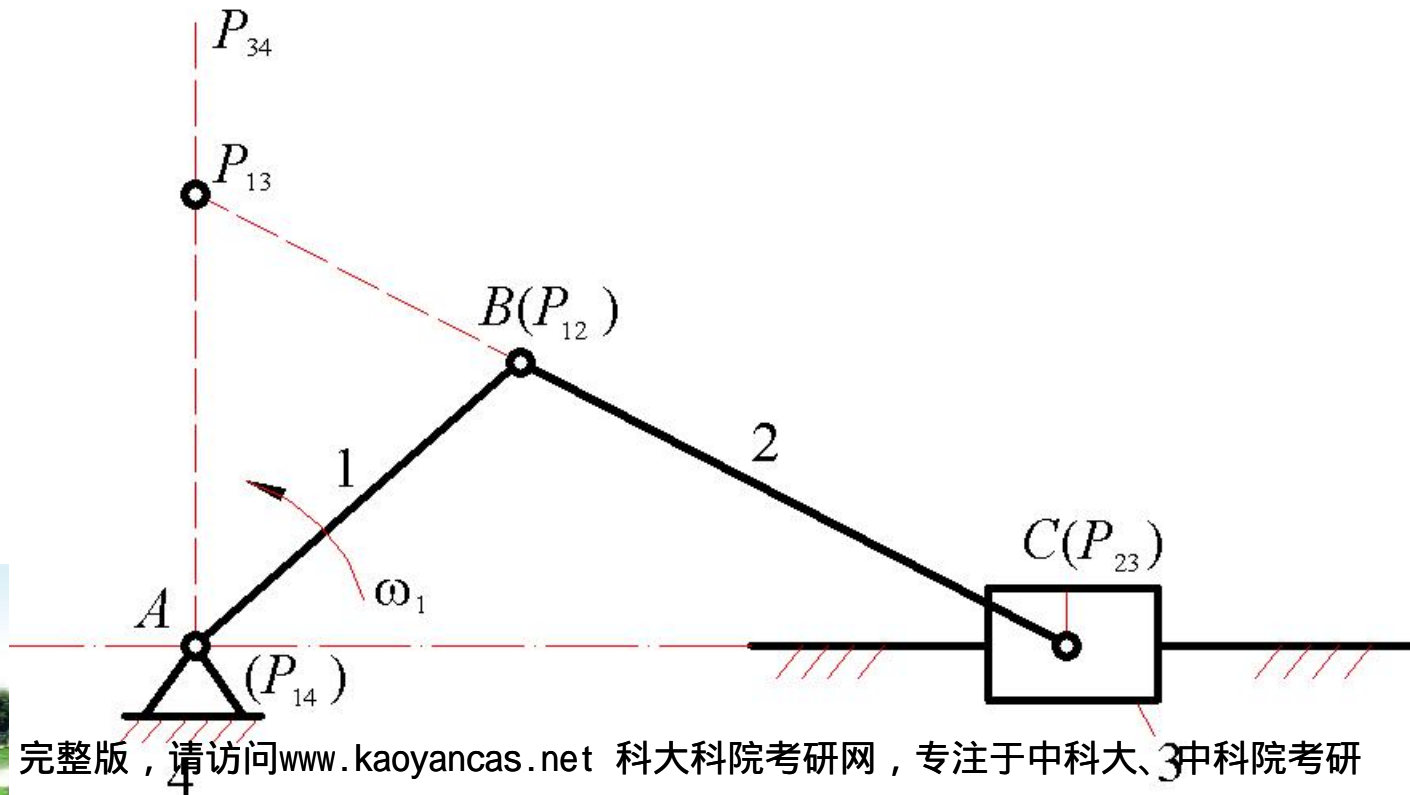
P_{24} 在 P_{12} 、 P_{14} 之间， ω_2 和 ω_4 方向相反。

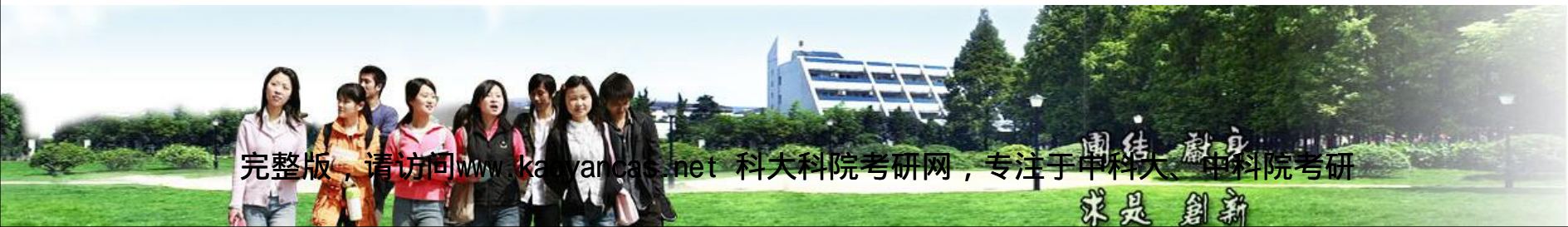
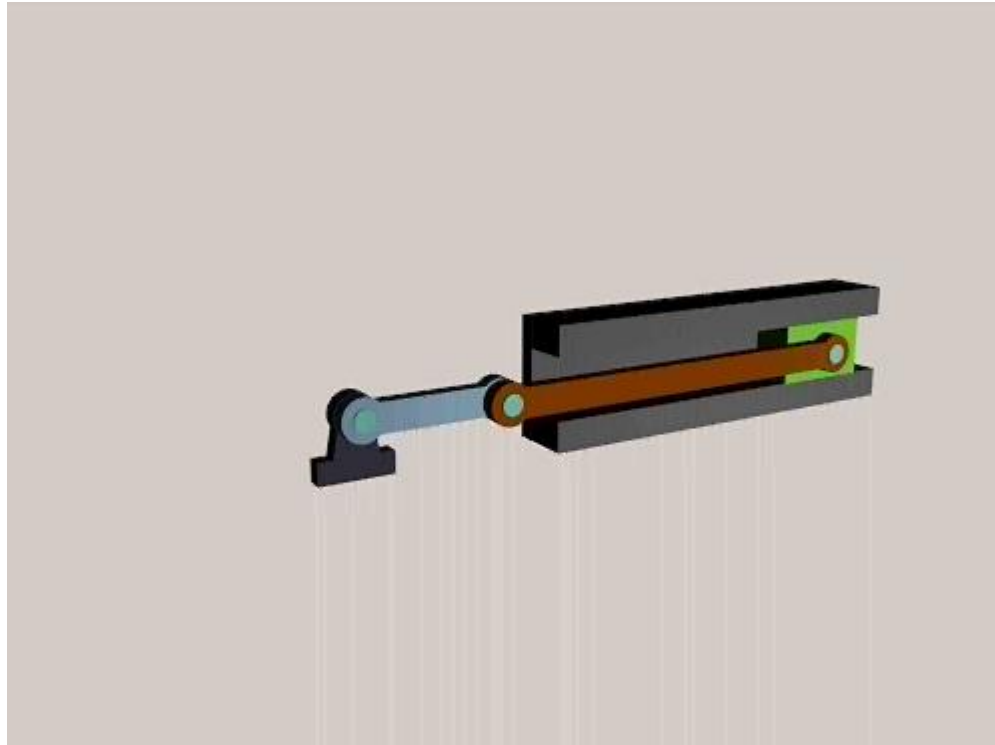


Example 2: For the following Slider-Crank

Mechanism, Given: l_{AB} , l_{BC} , φ , ω_1

- ① locate all instant centers for the mechanism ;
- ② the velocity of follower link 3 V_3 .





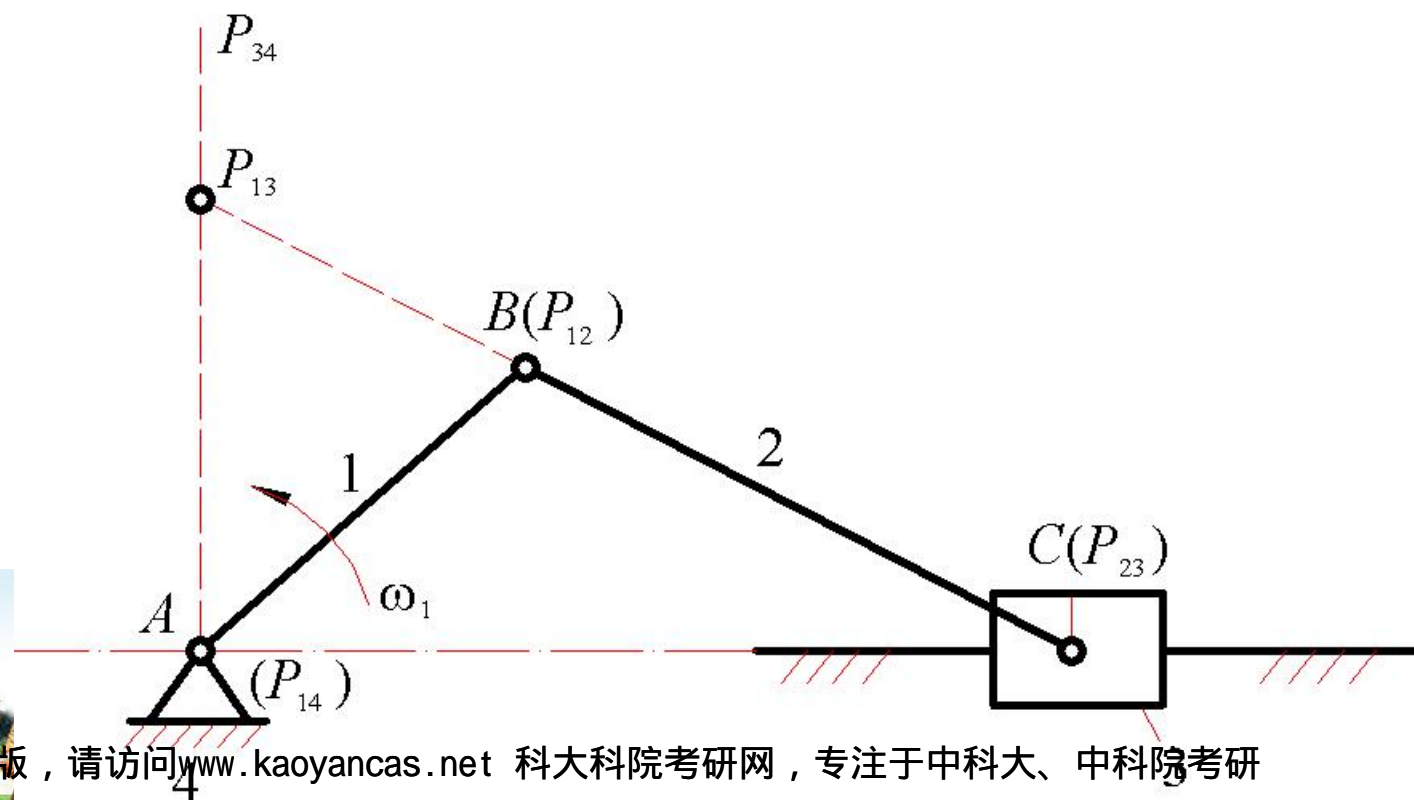


Solution:

(1) Find Instant center P_{13}

(2) Determine V_3

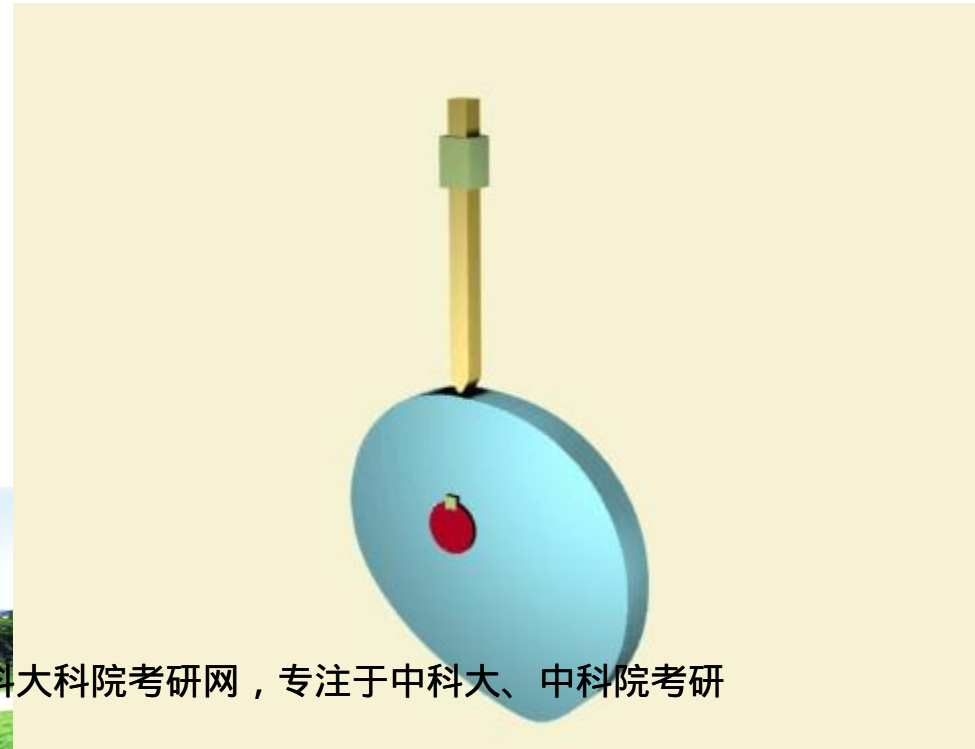
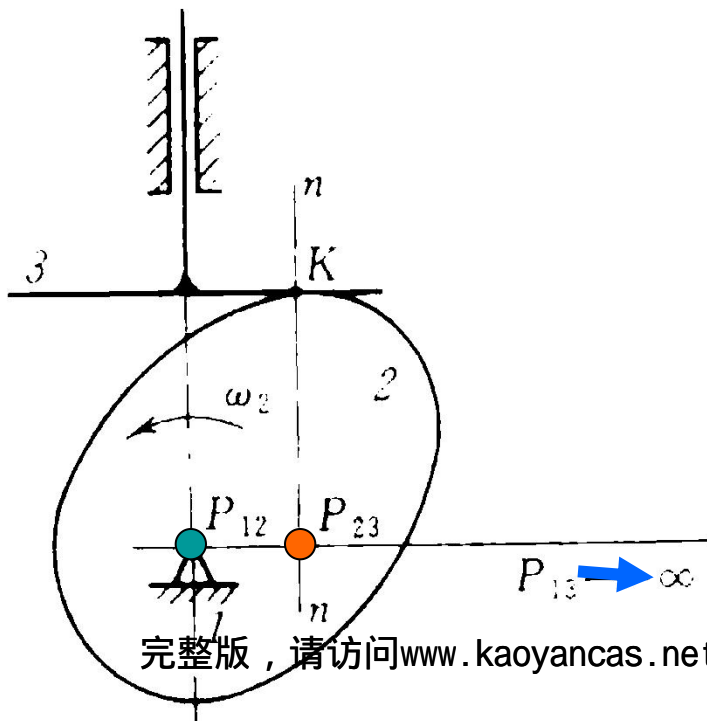
$$v_3 = v_{P_{13}} = \omega_1 \cdot l_{P_{13}P_{14}}$$





Example 3

In the cam mechanism as shown in the following fig. the cam 2 rotates anti-clockwise at a constant speed ω , Determine the velocity of the follower 2 for the position shown.



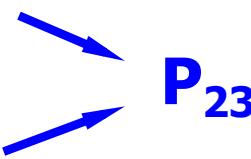


Solution:

(1) Find Instant center P_{23}

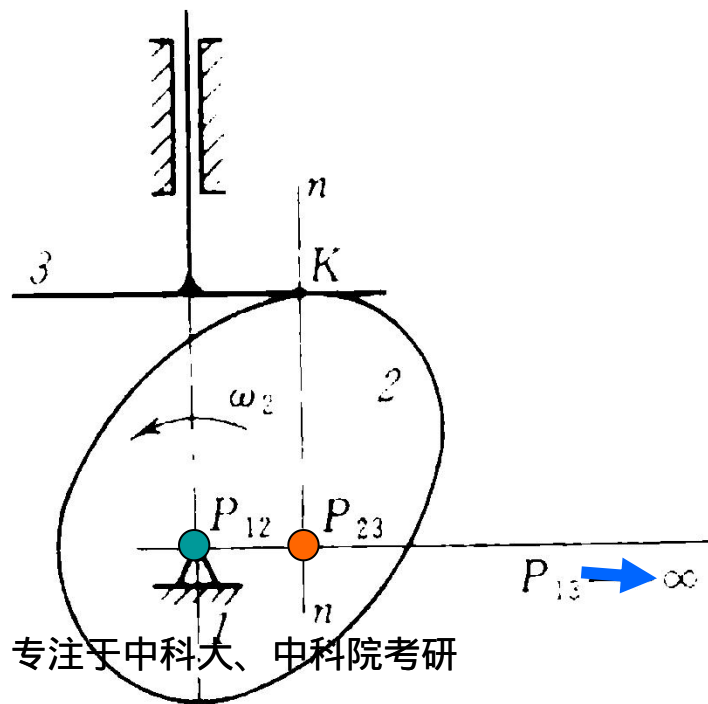
P_{23} 应在 P_{12} , P_{13} 的连线上

P_{23} 在接触点的公法线上



(2) Determine V_3

$$v_3 = l_{P_{12}P_{23}} \omega_2$$





3.2.6 Advantages and Disadvantages of the Method of Instant Centers

- ☀ **Excellent tool in simple mechanisms.**
- ☀ **difficult to find Instant Center in a complex mechanism**
- ☀ **it can not be used in acceleration analysis.**

§ 2-3 平面机构运动分析的相对运动图解法

相对运动图解法：

用**相对运动原理**列出各构件上点与点之间的相对运动**矢量方程式**，并用一定比例尺作**矢量多边形**，从而求构件上某点的速度、加速度或角速度、角加速度。



复习：相对运动原理

◎ 刚体的平面运动

刚体（构件）的平面运动分解为两个运动：

(1) 随基点的平动 (2) 绕基点的转动

刚体内任一点的运动可分解为随基点的平动和绕基点的转动。**只有同一构件上的点，才能应用基点法进行运动分析。**

基点法：

对于同一构件上的两点A和B，

A —— 基点， **B** —— 动点

$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \mathbf{v}_{BA}$$

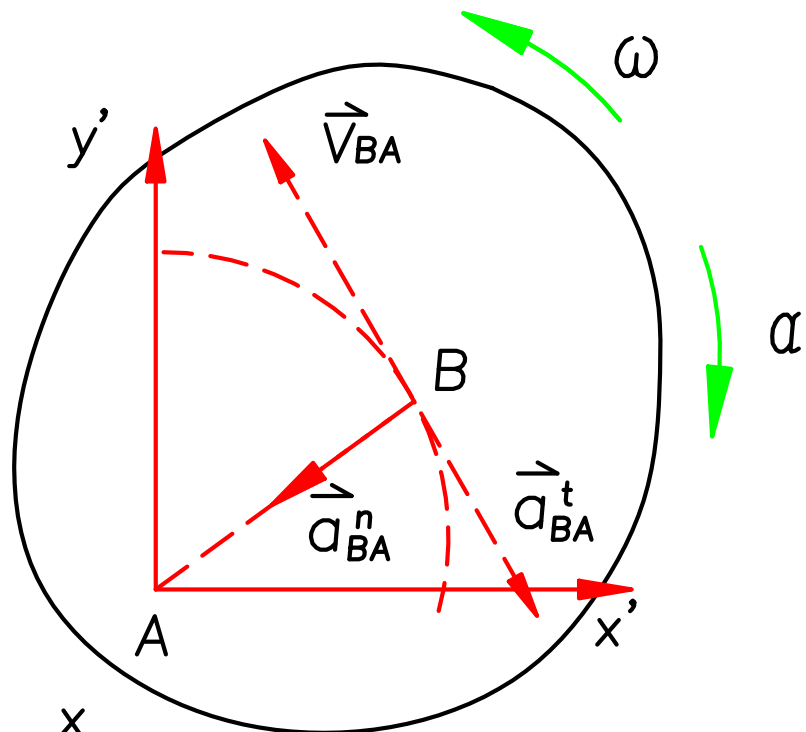
$$\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + \mathbf{a}_{BA} = \mathbf{a}_A + \mathbf{a}_{BA}^n + \mathbf{a}_{BA}^t$$

其中：

$$\left\{ \begin{array}{l} v_{BA} = l_{AB}\omega, \\ v_{BA} \text{ 方向: } \perp AB, \text{ 顺 } \omega \text{ 向。} \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{BA}^n = l_{AB}\omega^2, \\ a_{BA}^n \text{ 的方向: } B \rightarrow A. \end{array} \right.$$

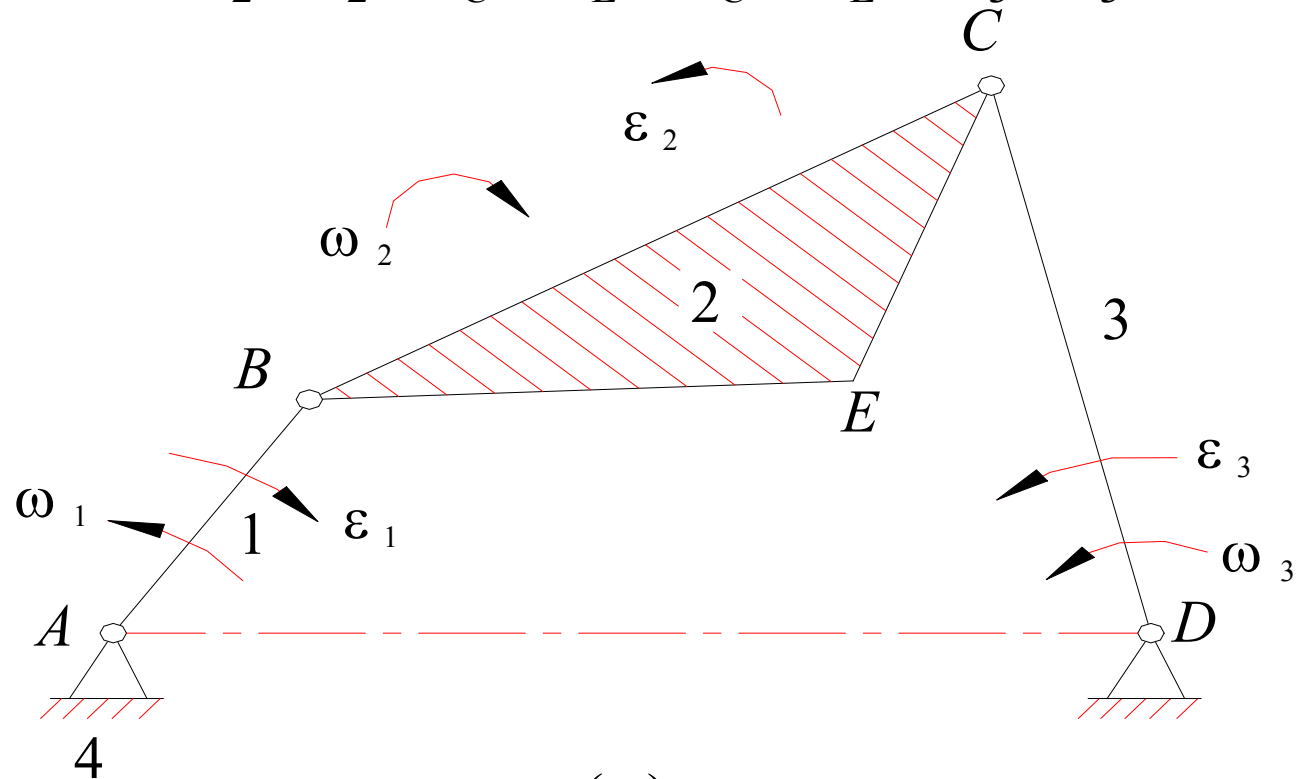
$$\left\{ \begin{array}{l} a_{BA}^t = l_{AB}\alpha, \\ a_{BA}^t \text{ 的方向: } \perp AB, \text{ 顺 } \alpha \text{ 向。} \end{array} \right.$$



一、在同一构件上点间的速度和加速度的求法（基点法）

已知：铰链四杆机构各杆长度、位置、 ω_1, ε_1

求： $\omega_2, \varepsilon_2, \vec{V}_C, \vec{V}_E, \vec{a}_C, \vec{a}_E, \omega_3, \varepsilon_3$



解：1、绘制机构简图

2、确定速度和角速度

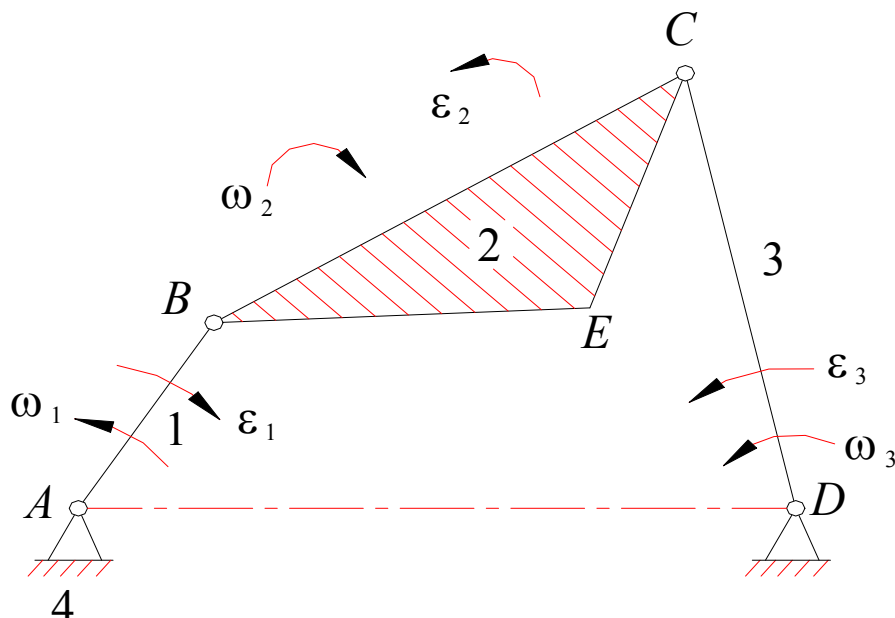
(1) 求C点：

B —— 基点， **C** —— 动点

$$\mathbf{v}_C = \mathbf{v}_B + \mathbf{v}_{CB}$$

方向： $\perp CD$ $\perp AB$ $\perp BC$

大小： ? $l_{AB}\omega_1$?

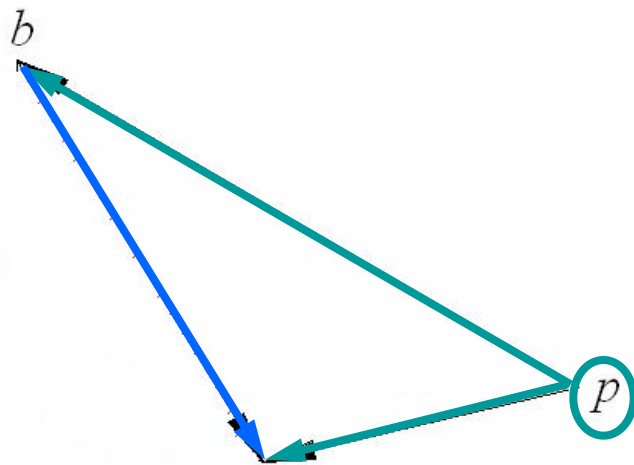


图解法：取速度比例尺 μ_v 作出速度图 **p-bc**：

$$v_c = \mu_v \cdot \overline{pc}$$

$$\omega_2 = v_{CB} / l_{CB} = \mu_v \overline{bc} / l_{CB} \quad (\searrow)$$

$$\omega_3 = v_c / l_{CD} = \mu_v \overline{pc} / l_{CD} \quad (\swarrow)$$



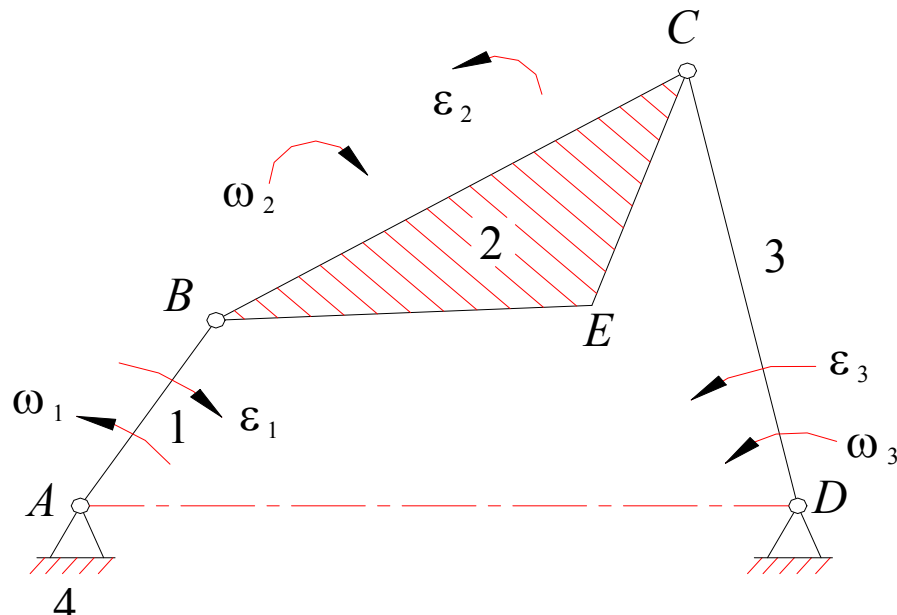
(2) 求E点:

B——基点，**E**——动点

$$v_E = v_B + v_{EB}$$

方向: ? $\perp AB$ $\perp EB$

大小: ? $l_{AB} \omega_1$ $l_{EB} \omega_2$

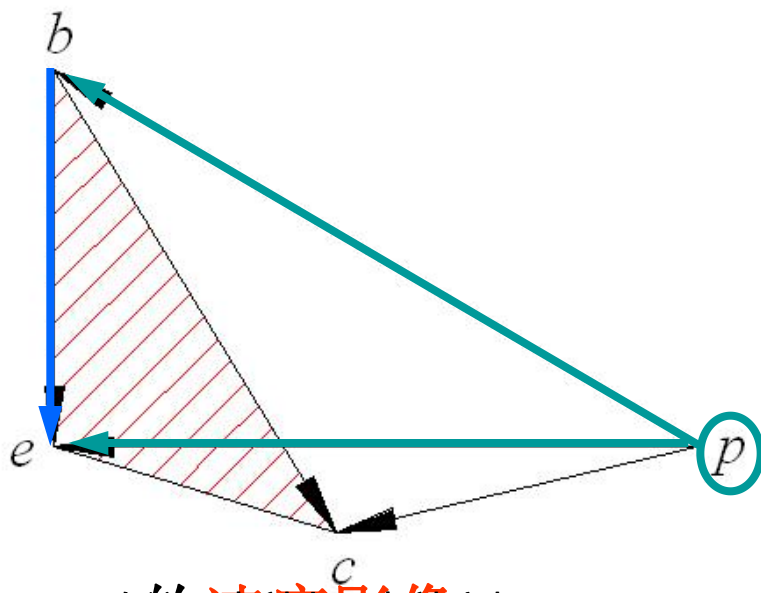


在速度图p-bc的基础上，过点b作 $be = v_{EB}/m_v$ ，得e点，则：

$$v_E = \mu_v \cdot pe$$

$P-bec$ —— 速度多边形

P —— 速度极点



b, c, e 完整版，请访问 www.kaoyancas.net 构件上相应点B、C、E的速度影像

说明：

(1) 在速度多边形中， $\triangle bce$ 和 $\triangle BCE$ 相似，且两三角形顶角字母**bce**和**BCE**的顺序相同，均为顺时针，图形**bce**为 **BCE**的**速度影像**。

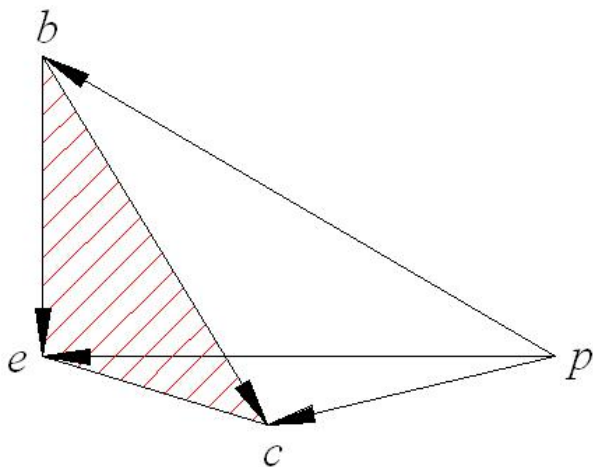
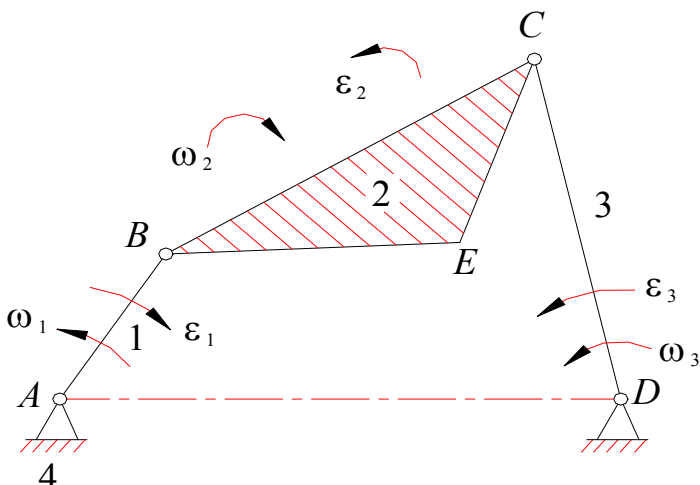
速度影像的用处：当已知一个构件上两个点的速度时，则该构件上其他任一点的速度可用速度影象与构件图形相似的原理求出。

注意：速度影像只能应用于同一构件上的各点。

(2) 在速度多边形中： $P \rightarrow$ 极点，表示该构件上速度为零的点。

绝对速度矢过速度极点 P ，方向由 P 指向该点。

相对速度矢脚注相反， $\vec{bc} \rightarrow \vec{Pc}$



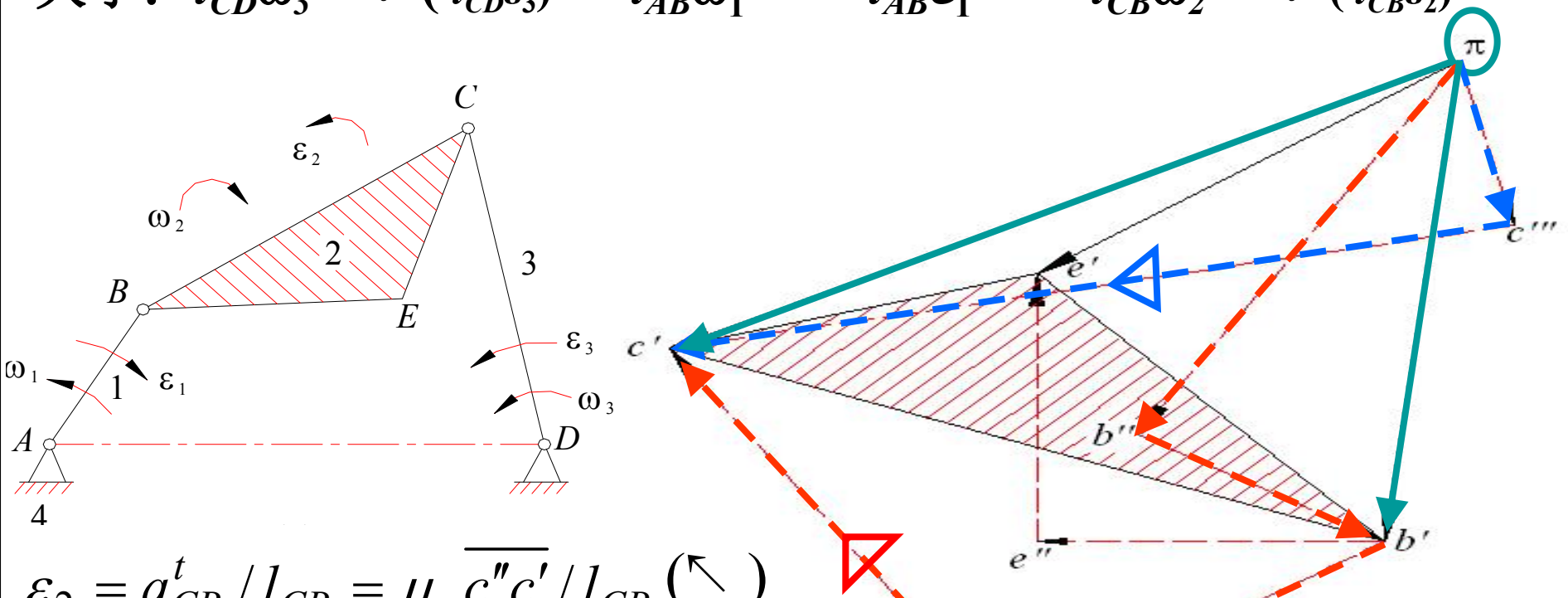
3、确定加速度和角加速度

$$\mathbf{a}_C = \mathbf{a}_B + \mathbf{a}_{CB}$$

$$\mathbf{a}_c^n + \mathbf{a}_c^t = \mathbf{a}_B^n + \mathbf{a}_B^t + \mathbf{a}_{CB}^n + \mathbf{a}_{CB}^t$$

方向： $C \rightarrow D \perp CD$ $B \rightarrow A \perp BA$ $C \rightarrow B \perp CB$

大小： $l_{CD}\omega_3^2$? ($l_{CD}\varepsilon_3$) $l_{AB}\omega_1^2$ $l_{AB}\varepsilon_1$ $l_{CB}\omega_2^2$? ($l_{CB}\varepsilon_2$)



$$\varepsilon_2 = a_{CB}^t / l_{CB} = \overline{\mu_a c'' c'} / l_{CB} (\swarrow)$$

$$\varepsilon_3 = a_c^t / l_{CD} = \overline{\mu_c''' c'} / l_{CD} (\swarrow)$$

$$\mathbf{a}_E = \mathbf{a}_B + \mathbf{a}_{EB}^n + \mathbf{a}_{EB}^t$$

? $\sqrt{\quad} \quad \mathbf{E} \rightarrow \mathbf{B} \quad \perp \mathbf{EB}$

? $\sqrt{\quad} \quad l_{EB} \omega_2^2 \quad l_{EB} \varepsilon_2$

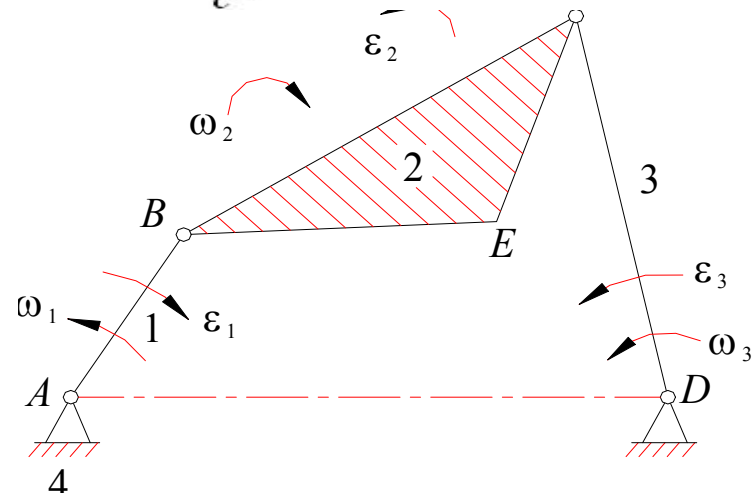
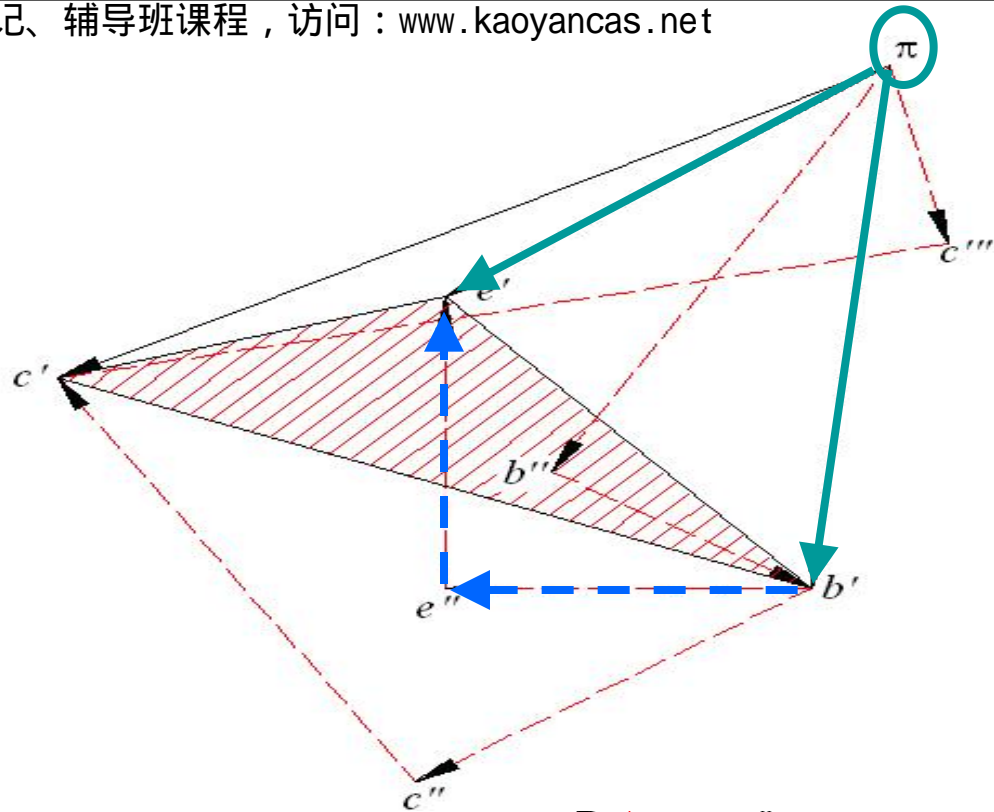
过 b' 点，作 $b'e'' = a_{EB}^n / u_a$ 得 e'' ；
过 e'' 作 $e''e' = a_{EB}^t / u_a$ ，得 e' 点：

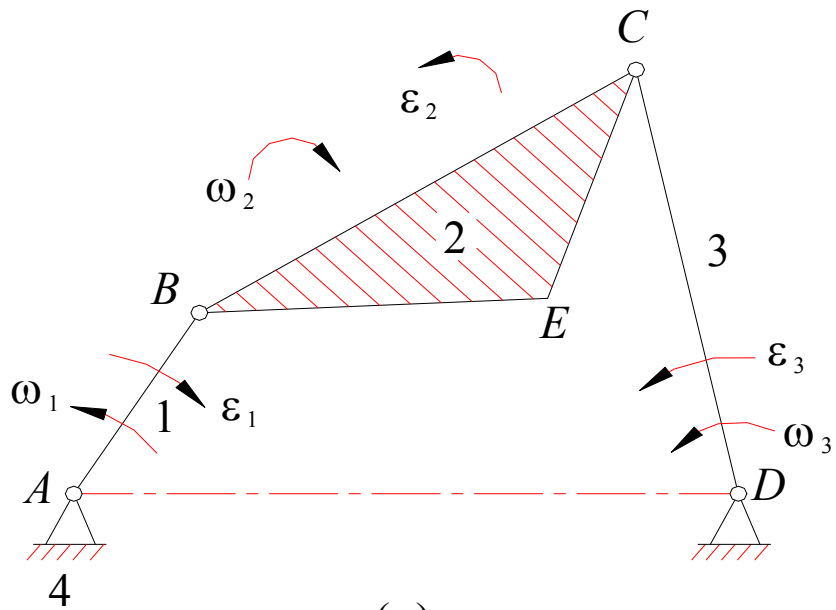
$$a_E = \mu_a \cdot \overline{\pi e'}$$

$\pi - b'c'e'$ —— 加速度多边形

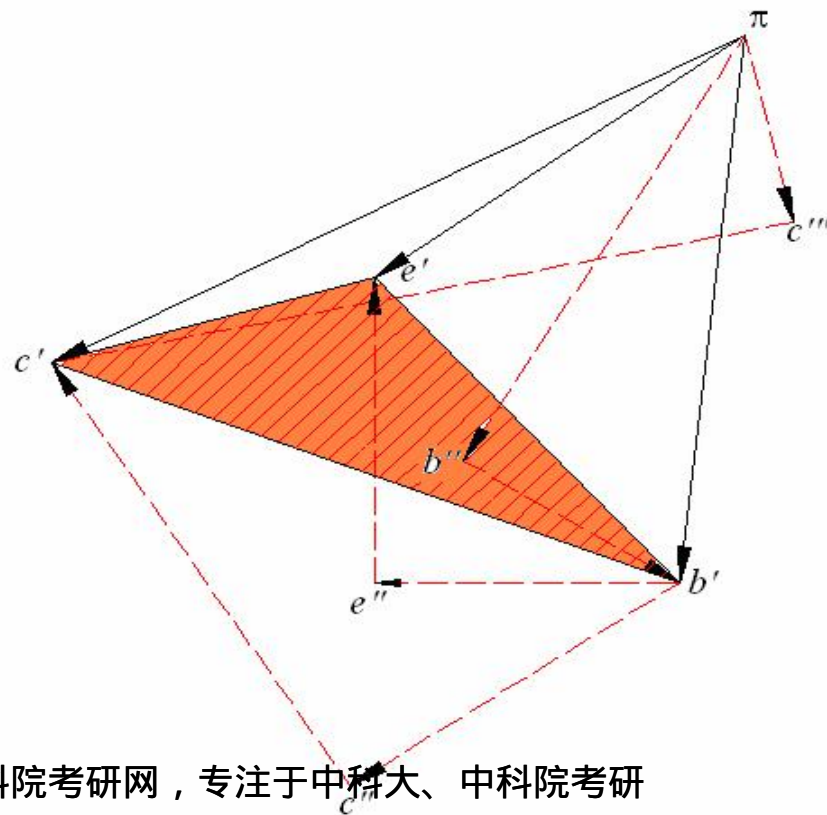
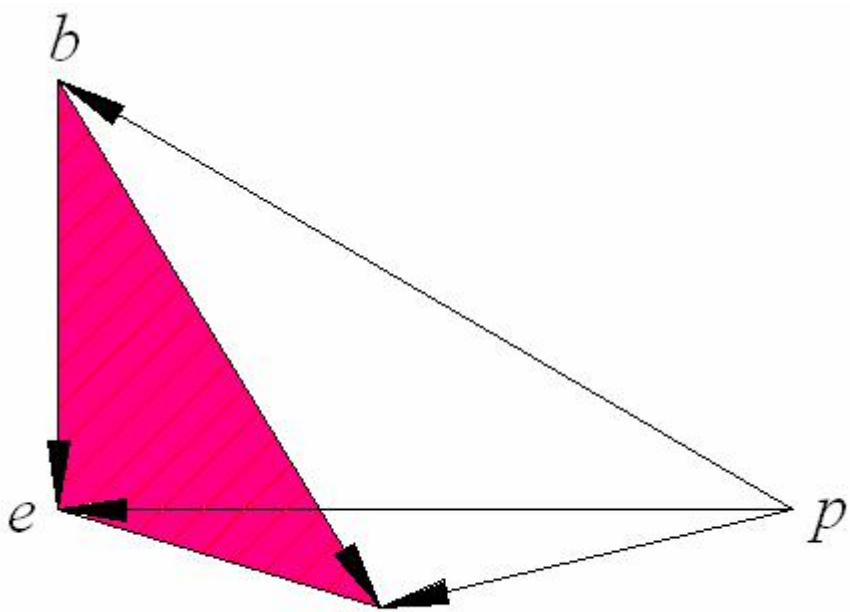
π —— 加速度极点

b', c', e' —— 构件上相应点 B, C, E 的加速度影像





😊 只有同一构件上的点，才能应用基点法进行运动分析。





复习：相对运动原理

◎ 点的合成运动

用点的合成运动原理分析点的运动时，必须选定两个参考系：静系、动系。

动点相对于静系的运动 —— 绝对运动

动点相对于动系的运动 —— 相对运动

动系相对于静系的运动 —— 牵连运动

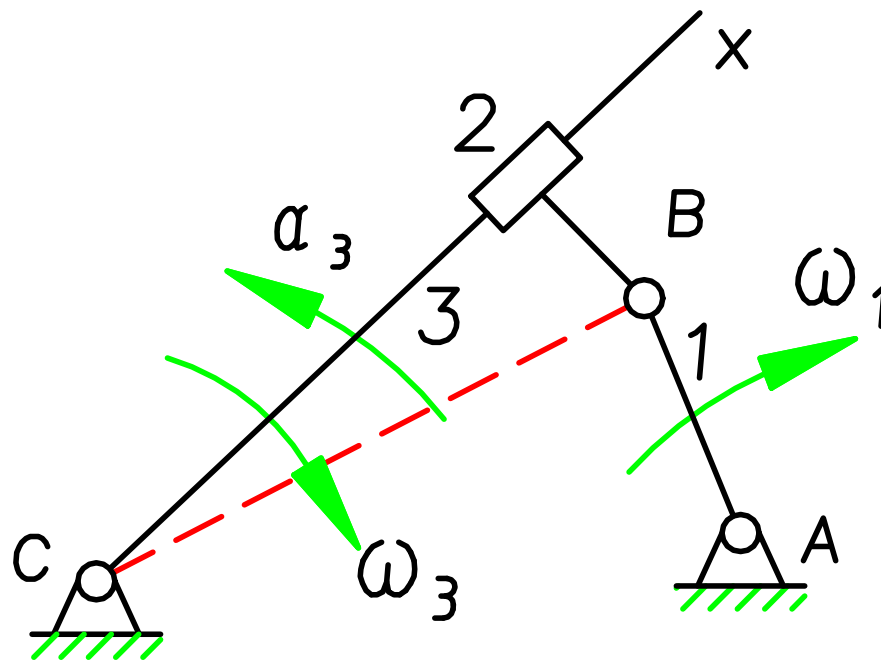
在动系上与动点相重合的那一点的速度和加速度 —— 动点的牵连速度和牵连加速度

$$\begin{array}{l}
 \text{动} \\
 \text{点} \\
 \text{运} \\
 \text{动}
 \end{array}
 \left\{ \begin{array}{l}
 \vec{V}_a = \vec{V}_e + \vec{V}_r \\
 \vec{a}_a = \vec{a}_e + \vec{a}_r \quad \text{—— 动系平动} \\
 \vec{a}_a = \vec{a}_e + \vec{a}_r + \vec{a}_t \quad \text{—— 动系转动}
 \end{array} \right.$$

二、组成移动副两构件的重合点间的速度和加速度的求法 (重合点法)

已知：机构位置、尺寸，构件1 等角速转动 ω_1

求： ω_3, α_3



注意：在重合点法中，应取已知运动的点所在的构件为动参考系，与动参考系组成移动副的另一构件上的未知运动的点为动点。

解： 1、绘制机构简图

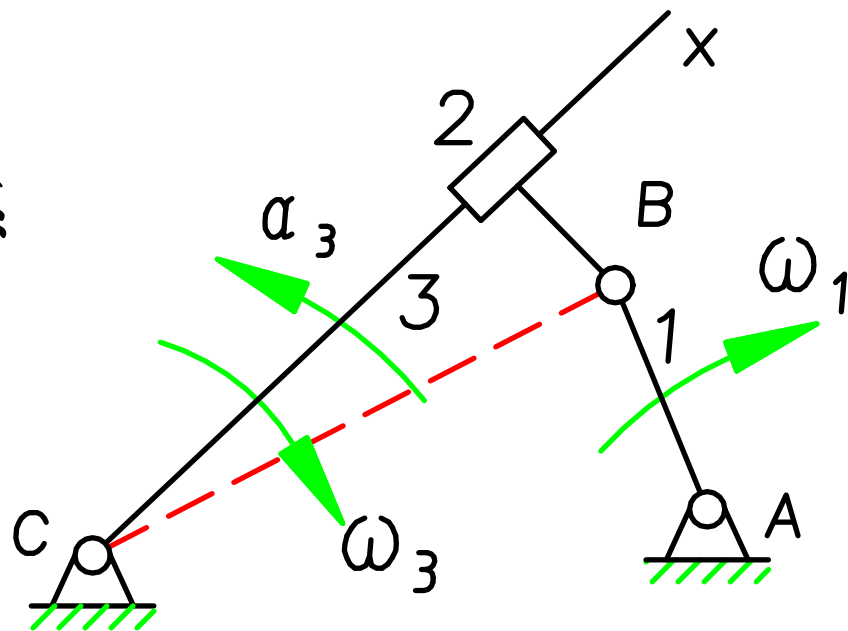
2、速度分析

B3 —— 动点， 滑块2 —— 动参考系

$$\mathbf{v}_{B3} = \mathbf{v}_{B2} + \mathbf{v}_{B3B2}$$

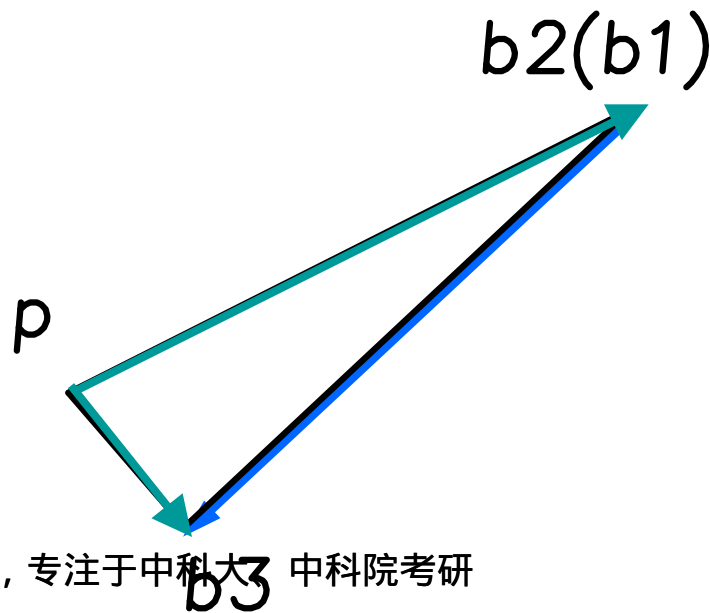
方向： $\perp CB$ $\perp AB$ $\parallel Cx$

大小： ? ($l_{CB}\omega_3$) $l_{AB}\omega_1$?



取合适的速度比例尺 μ_v ，出速度图，则：

$$\omega_3 = \mathbf{v}_{B_3} / l_{CB} = \mu_v \overline{pb_3} / l_{CB} \quad (\sphericalangle)$$



3、加速度分析

$$a_{B_3} = a_{B_3}^n + a_{B_3}^t = a_{B_2} + a_{B_3B_2}^k + a_{B_3B_2}^r$$

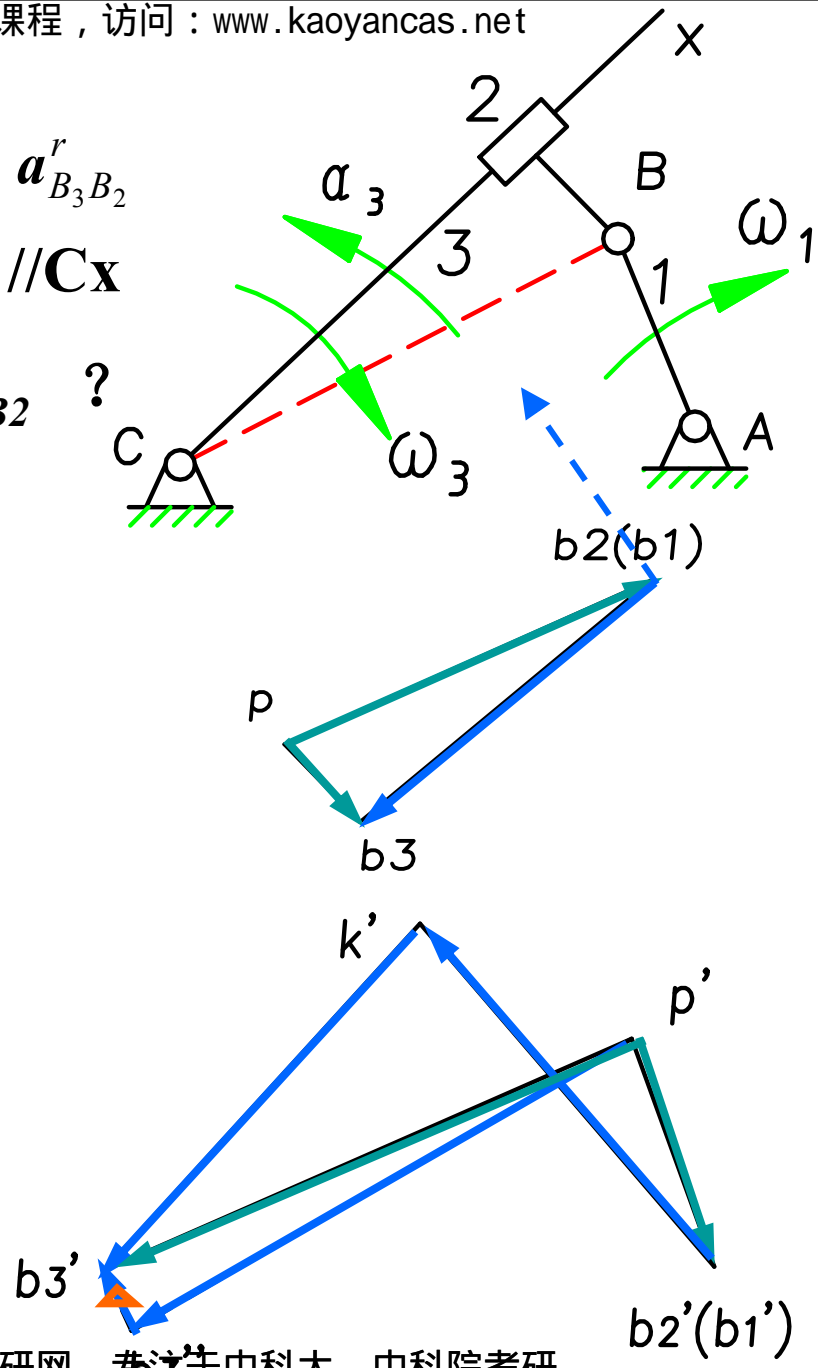
$B \rightarrow C \perp BC \quad B \rightarrow A \perp CX \parallel CX$

$$l_{BC}\omega_3^2 \quad ? \quad l_{AB}\omega_1^2 \quad 2\omega_2 v_{B_3B_2} \quad ?$$

哥氏加速度 $a^k_{B_3B_2}$ 的大小和方向：

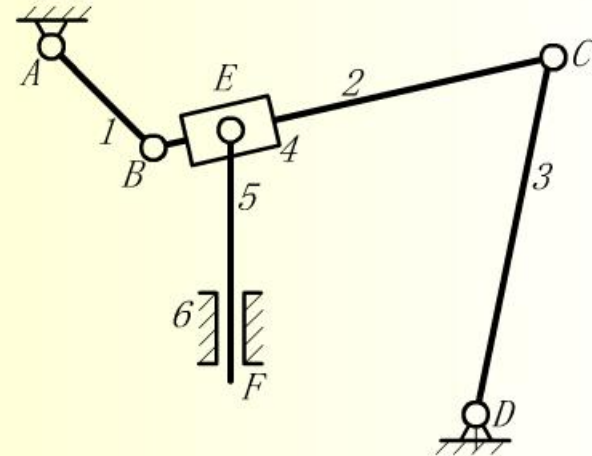
- 大小： $a^k_{B_3B_2} = 2\omega_e v_r = 2\omega_2 v_{B_3B_2}$
- $\omega_2 = \omega_3$;
- 方向：将相对速度矢 $v_r = v_{B_3B_2}$ 绕其起点沿牵连角度 $\omega_2 = \omega_3$ 的方向转过 90° 即为哥氏加速度的方向。

$$\alpha_3 = a_{B_3}^t / l_{CB} = \mu_a \overline{b_3'' b_3'} / l_{CB}$$





用图解法作柱塞唧筒六杆机构的速度和加速度分析



开始

上一步

下一步

结束

完整版，请访问www.kaoyancas.net 科大科院考研网，专注于中科大、中科院考研

§ 2-4 用解析法求机构的位置、速度和加速度（简介）

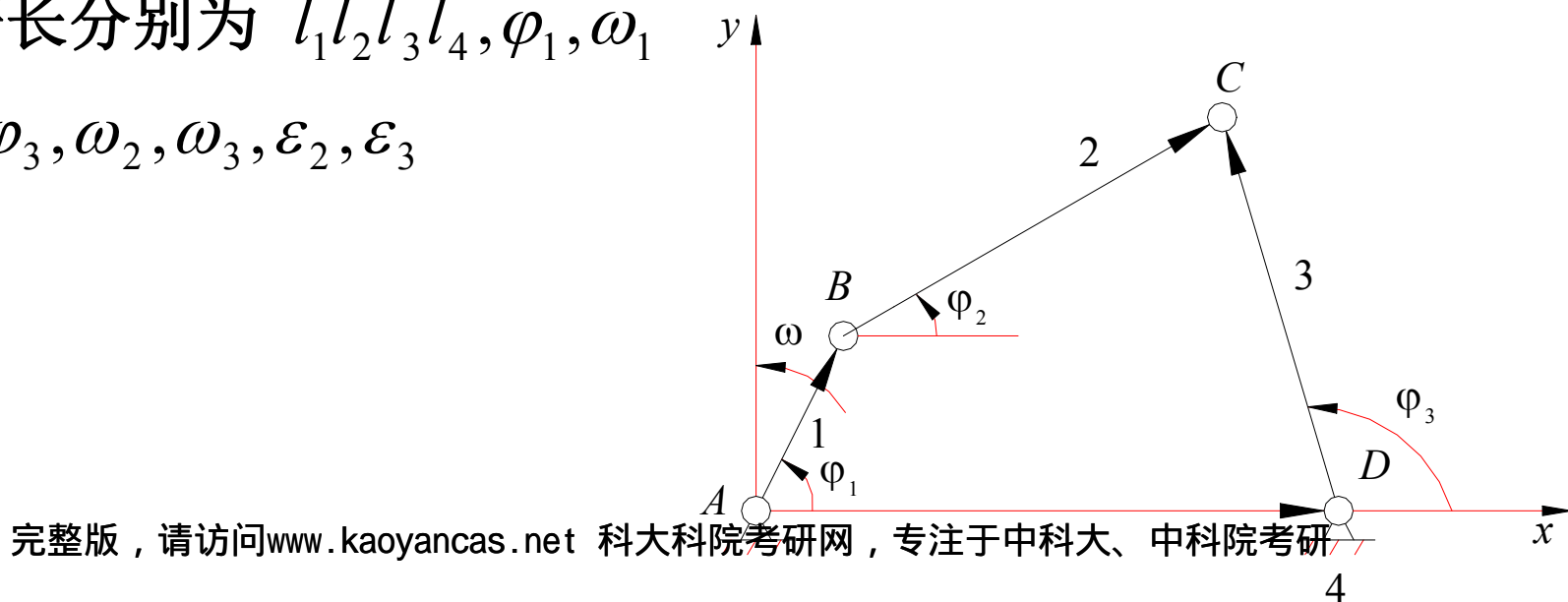
复数矢量法：是将机构看成一封闭矢量多边形，并用复数形式表示该机构的封闭矢量方程式，再将矢量方程式分别对所建立的直角坐标系取投影。

先复习：矢量的复数表示法：

$$\vec{a} = ae^{i\varphi} = a(\cos \varphi + i \sin \varphi) = a_x + ia_y$$

已知各杆长分别为 $l_1, l_2, l_3, l_4, \varphi_1, \omega_1$

求： $\varphi_2, \varphi_3, \omega_2, \omega_3, \varepsilon_2, \varepsilon_3$



解：1、位置分析，建立坐标系

$$\vec{l}_1, \vec{l}_2, \vec{l}_3, \vec{l}_4$$

封闭矢量方程式：

$$\vec{l}_1 + \vec{l}_2 = \vec{l}_4 + \vec{l}_3$$

以复数形式表示：

$$l_1 e^{i\varphi_1} + l_2 e^{i\varphi_2} = l_4 + l_3 e^{i\varphi_3} \quad (\mathbf{a})$$

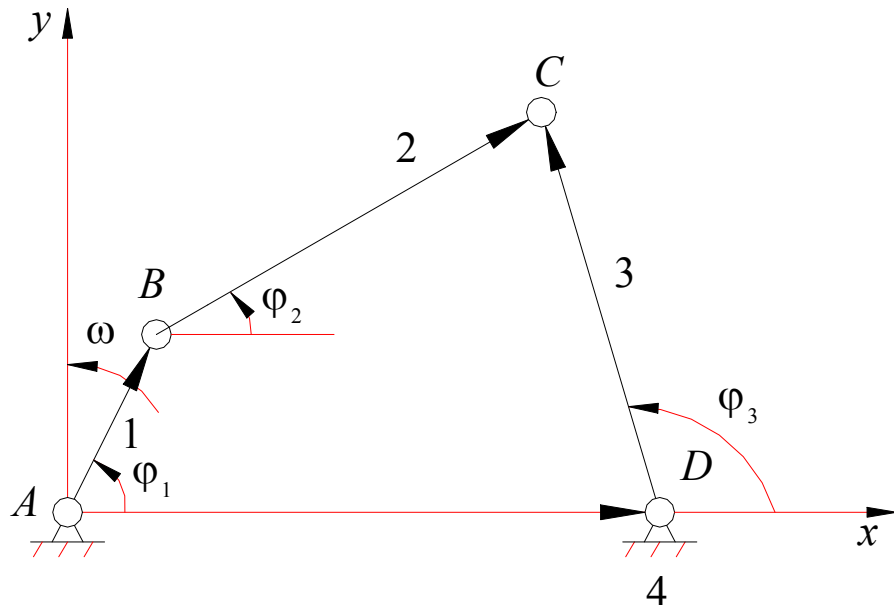
欧拉展开：

$$l_1 (\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1) + l_2 (\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2) = l_4 + l_3 (\cos \varphi_3 + i \sin \varphi_3)$$

整理后得：

$$l_1 \sin \varphi_1 + l_2 \sin \varphi_2 = l_3 \sin \varphi_3$$

$$l_1 \cos \varphi_1 + l_2 \cos \varphi_2 = l_4 + l_3 \cos \varphi_3$$



解方程组得：

$$\varphi_2 = f(\varphi_1)$$
$$\varphi_3 = f(\varphi_1)$$

2、速度分析：将式 (a) 对时间 t 求导得： $l_1 e^{i\varphi_1} + l_2 e^{i\varphi_2} = l_4 + l_3 e^{i\varphi_3}$

$$l_1 i \omega_1 e^{i\varphi_1} + l_2 i \omega_2 e^{i\varphi_2} = l_3 i \omega_3 e^{i\varphi_3} \quad (\text{b})$$

消去 ω_2 ，两边乘 $e^{-i\varphi_2}$ 得：

$$l_1 \omega_1 i e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)} + l_2 \omega_2 i e^{i(\varphi_2 - \varphi_2)} = l_3 \omega_3 i e^{i(\varphi_3 - \varphi_2)}$$

按欧拉公式展开，取实部相等，得：

$$\omega_3 = \omega_1 \cdot \frac{l_1 \sin(\varphi_1 - \varphi_2)}{l_3 \sin(\varphi_3 - \varphi_2)}$$



同理求得：

$$\omega_2 = -\omega_1 \frac{l_1 \sin(\varphi_1 - \varphi_3)}{l_2 \sin(\varphi_2 - \varphi_3)}$$

角速度为正表示逆时针方向，角速度为负表示顺时针方向。

3、加速度分析：

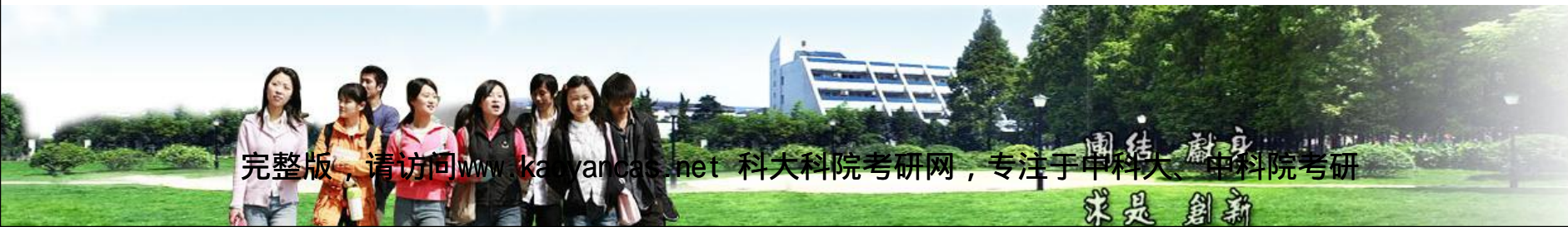
对 (b) 对时间求导。 $l_1 i \omega_1 e^{i\varphi_1} + l_2 i \omega_2 e^{i\varphi_2} = l_3 i \omega_3 e^{i\varphi_3}$

解析法在曲柄滑块机构和导杆机构中的应用，自己看书。



Attentions (this chapter):

- ☀ **The definition of Instant center**
- ☀ **How to locate the instant center in the mechanism**
- ☀ **Velocity analysis by the method of instant center**
- ☀☀ **相对运动图解法对机构进行运动分析**





Homework

1. Read book p26-31.
2. Exercise p39,3-2:Fig3-11:c),d),e).
- 3.中文书p32: 题2-1(a),(e)
- 4.中文书p32: 题2-2
- 5.中文书p33: 题2-6
- 6.中文书p34: 题2-9

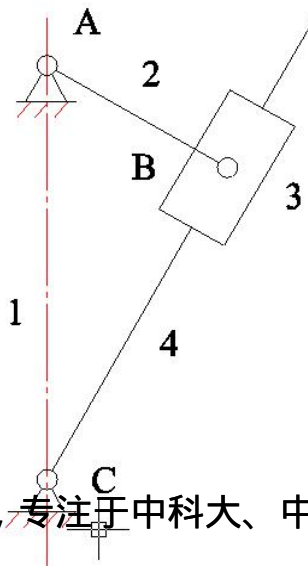
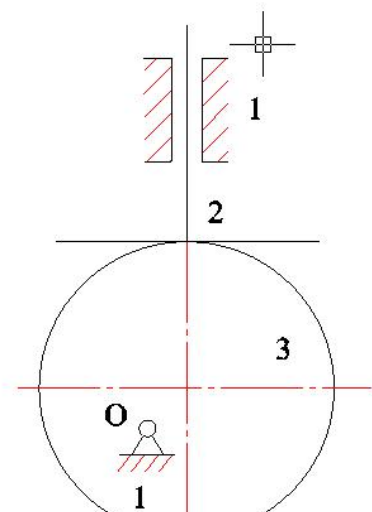
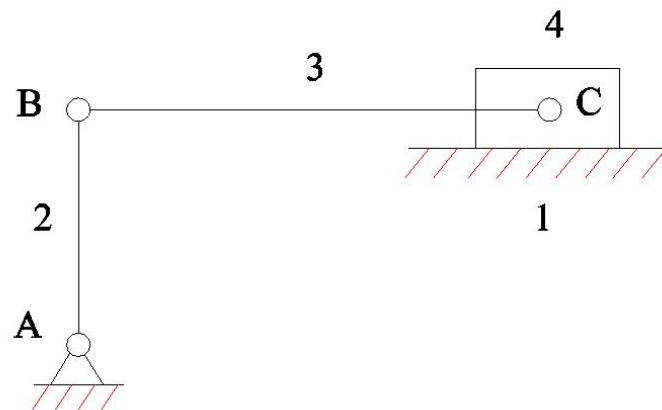
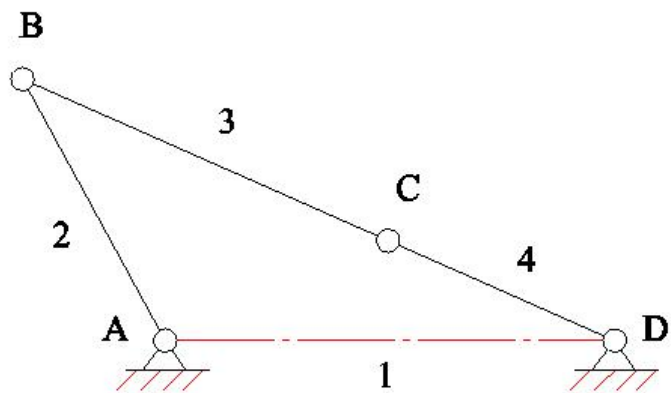


复习思考题

- 1、已知作平面相对运动两构件上两个重合点的相对速度及的方向，它们的相对瞬心 P_{12} 在何处？
- 2、当两构件组成滑动兼滚动的高副时，其速度瞬心在何处？
- 3、如何考虑机构中不组成运动副的两构件的速度瞬心？
- 4、利用速度瞬心，在机构运动分析中可以求哪些运动参数？
- 5、在平面机构运动分析中，哥氏加速度大小及方向如何确定？

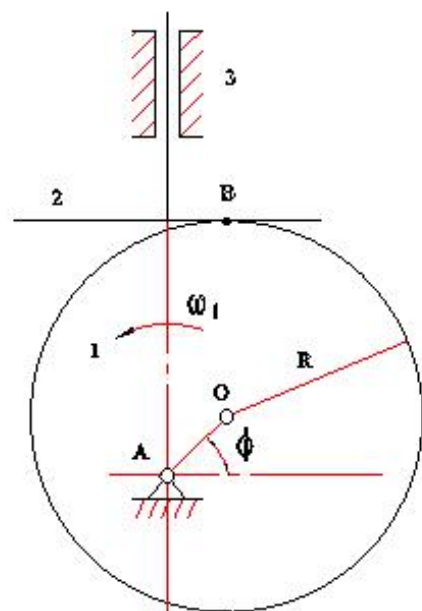
习题

1. 试求出下列机构中的所有速度瞬心。



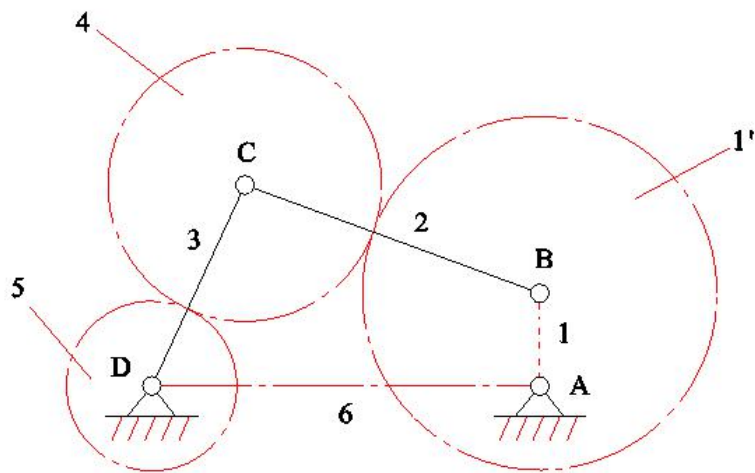


2、图示的凸轮机构中，凸轮的角速度 $\omega_1=10\text{s}^{-1}$ ， $R=50\text{mm}$ ， $l_{A0}=20\text{mm}$ ，试求当 $\phi=0^\circ$ 、 45° 及 90° 时，构件2的速度 v 。



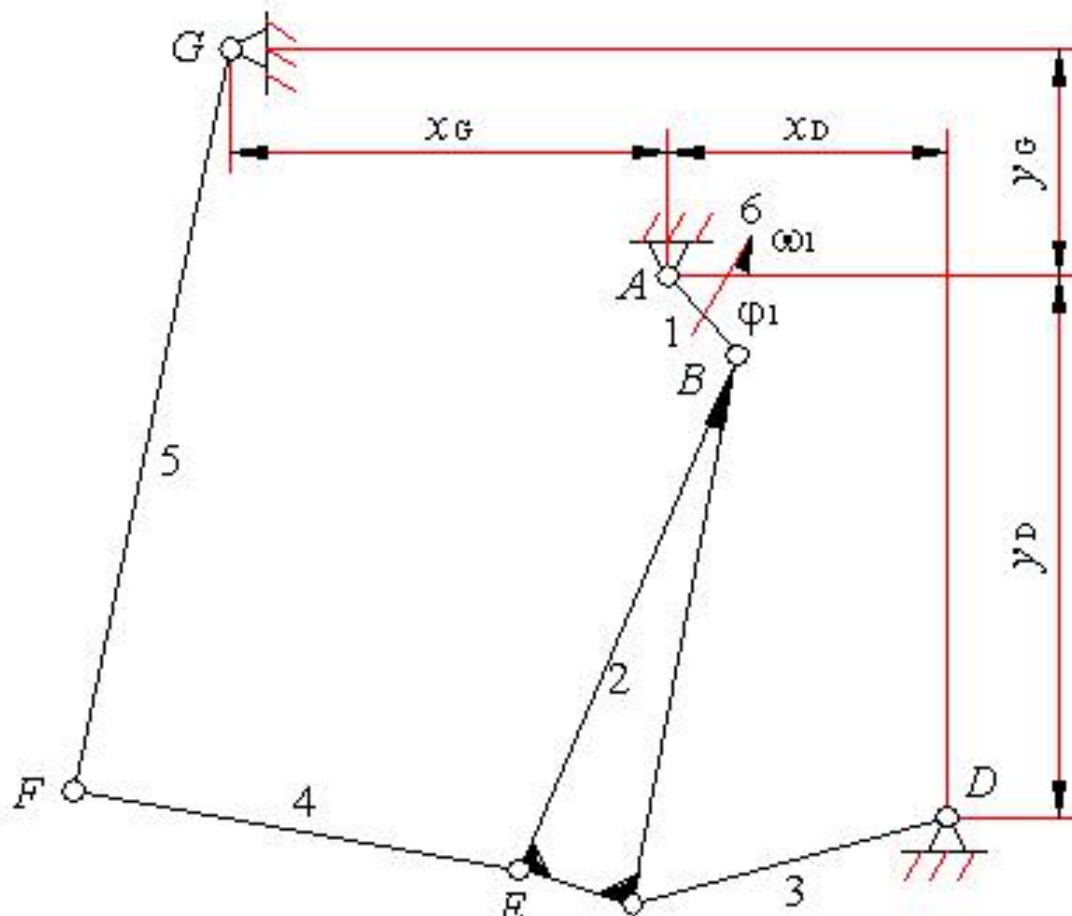


3、图示机构，由曲柄1、连杆2、摇杆3及机架6组成铰链四杆机构，轮1'与曲柄1固接，其轴心为B，轮4分别与轮1'和轮5相切，轮5活套于轴D上。各相切轮之间作纯滚动。试用速度瞬心法确定曲柄1与轮5的角速比 ω_1/ω_5 。



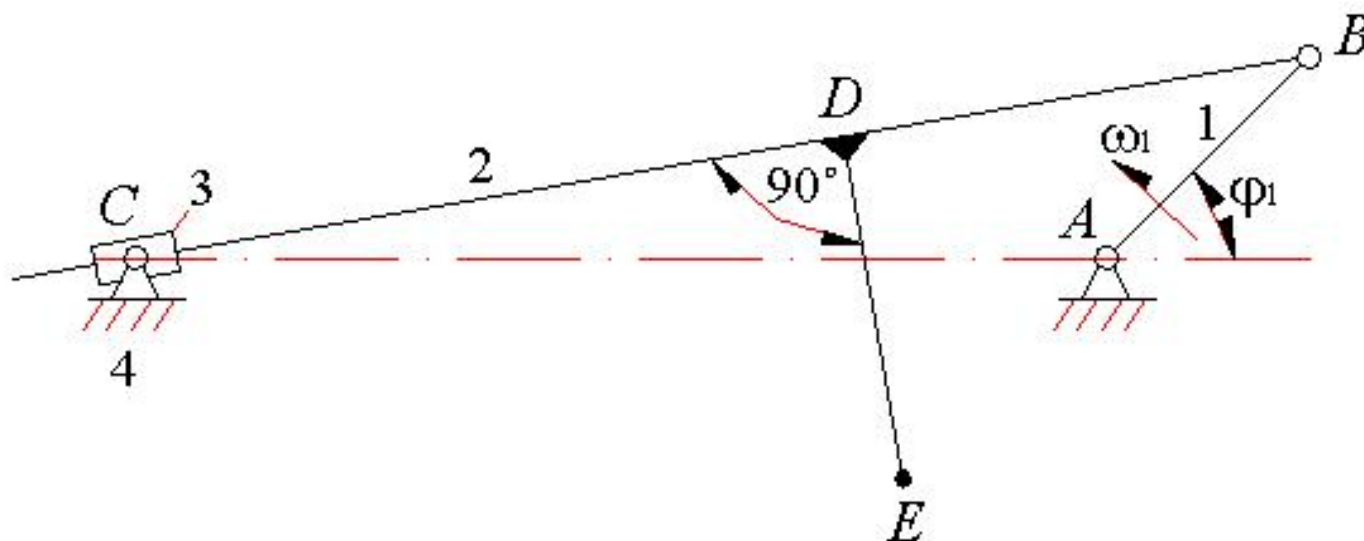


4、在图示的颞式破碎机中，已知： $x_D=260\text{mm}$ ， $y_D=480\text{mm}$ ， $x_G=400\text{mm}$ ， $y_G=200\text{mm}$ ， $l_{AB}=l_{CE}=100\text{mm}$ ， $l_{BC}=l_{BE}=500\text{mm}$ ， $l_{CD}=300\text{mm}$ ， $l_{EF}=400\text{mm}$ ， $l_{GF}=685\text{mm}$ ， $\varphi_1=45^\circ$ ， $\omega_1=30\text{rad/s}$ 逆时针。求 ω_5 、 ε_5 。



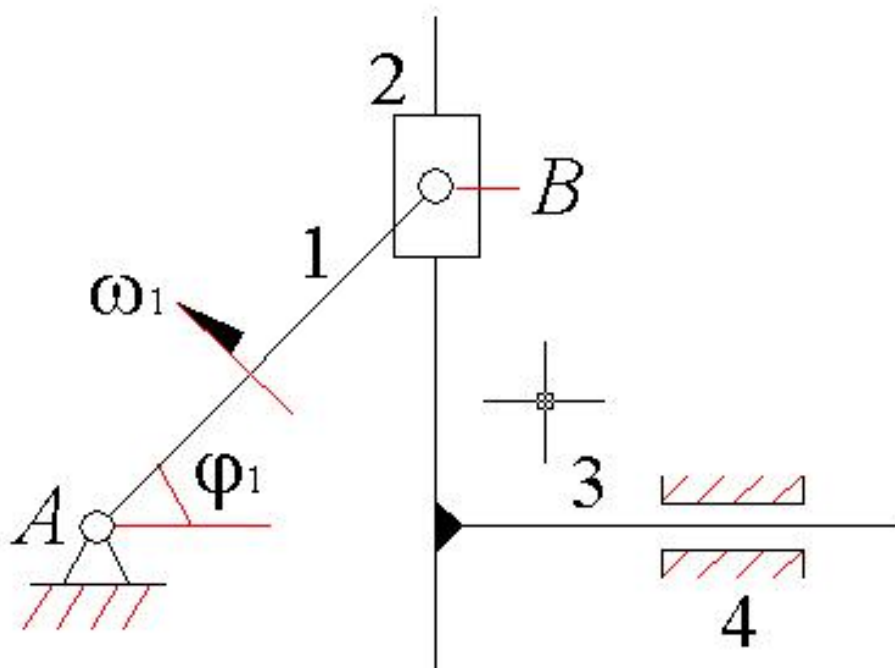


5、图示的曲柄摇块机构， $l_{AB}=30\text{mm}$ ， $l_{AC}=100\text{mm}$ ， $l_{BD}=50\text{mm}$ ， $l_{DE}=40\text{mm}$ ， $\theta_1=45^\circ$ ，等角速度 $\omega_1=10\text{rad/s}$ ，求点E、D的速度和加速度，构件3的角速度和角加速度。





6、图示正弦机构，曲柄1长度 $l_1=0.05\text{m}$ ，角速度 $\omega_1=20\text{rad/s}$ （常数），试分别用图解法和解析法确定该机构在 $\varphi_1=45^\circ$ 时导杆3的速度 v_3 与加速度 a_3 。





7、在图示机构中，已知 $l_{AE}=70\text{mm}$ ， $l_{AB}=40\text{mm}$ ， $l_{EF}=70\text{mm}$ ， $l_{DE}=35\text{mm}$ ， $l_{CD}=75\text{mm}$ ， $l_{BC}=50\text{mm}$ ， $\varphi_1=60^\circ$ ，构件1以等角速度 $\omega_1=10\text{rad/s}$ 逆时针方向转动，试求点C的速度和加速度。

