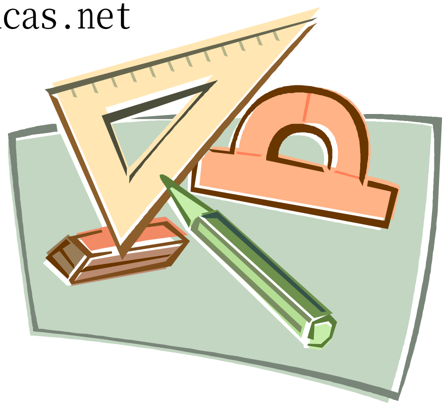


第八章 平面机构的力分析

本章重点：

运动副中摩擦力的确定，构件惯性力的确定，机构的动态静力分析。

本章难点：

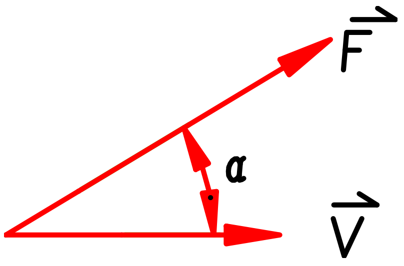
运动副中总反力的确定。

§8-1 机构力分析的任务、目的和方法

一、作用在机械上的力

1）驱动力——正功(输入功)，功率$P>0$ 或α为锐角。

$$P=\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{v}=Fv\cos\alpha>0$$



2）阻力——负功，功率$P<0$ 或α为钝角。

有效阻力：生产阻力,有效功（输出功）。

有害阻力：非生产阻力。

3）重力 —— 重心下降作正功，重心上升作负功 。

4）运动副反力——对机构为内力，对构件为外力。

切向反力(摩擦力)：负功。

法向反力(正压力)：不作功。

5）惯性力——由构件加速度引起的虚拟力。

注意：

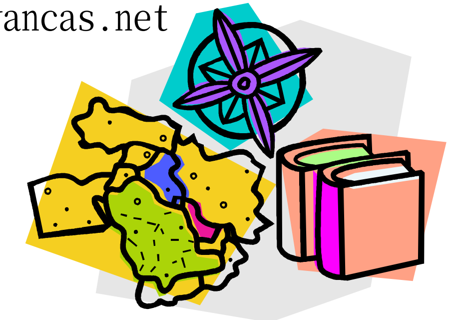
(1) 按力的功率的正负：以上力可归为以下两种:驱动力和阻抗力。

(2) 按力的作用位置：以上力可分为内力和外力:驱动力、阻力、重力对机构和构件都为外力。运动副反力对机构为内力，对构件都为外力。

(3) 惯性力是一种假想的力；当加速时，惯性力是假想阻力；当减速时，惯性力是假想驱动力；机构加惯性力后可认为处于静力平衡状态，可进行动态静力分析。

(4) 摩擦力不一定都是有害阻力；有的情况下，摩擦力成为驱动力。

二、机构力分析的任务和目的



1、确定运动副中的约束反力

运动副约束反力的确定对构件强度计算，确定机械效率及研究机械的动力性能等都是必需的。

2、确定平衡力（或平衡力矩）

平衡力(或平衡力矩)是机构在已知外力作用下，为使机构能按给定的运动规律运动，必须加于机构上的未知外力(或外力矩)。

平衡力(或平衡力矩)的确定可用于选择原动机的最小功率，或确定机械能克服的最大生产阻力等。

三、机构动力分析的方法

动态静力分析法：

将构件惯性力系作为假想的力系加于构件上，则作用于构件上的惯性力系、约束反力系和给定外力系构成一个平衡力系，进而可按静力学的方法求解。

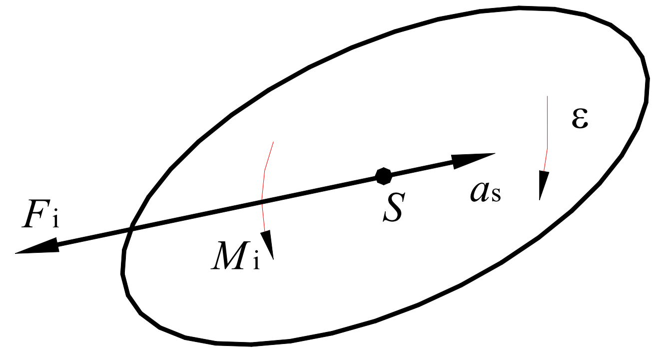
动态静力分析法的理论基础是达朗贝尔原理。

§8-2 构件惯性力的确定

一、作平面复杂运动的构件

设构件的质心为S，质量为m，质心S的加速度为a_s，构件的角加速度为ε，J_s为构件对过质心S且与运动平面相垂直的质心轴的转动惯量。则构件惯性力系向质心S简化的结果为:

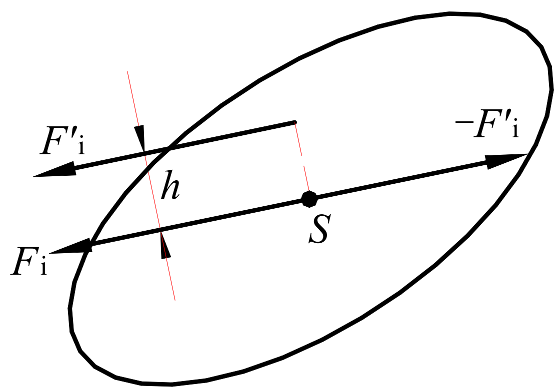
$$\begin{cases} \text{惯性力(主矢)：} & F_i = -ma_s \\ \text{惯性力矩(主矩)：} & M_i = -J_s\varepsilon \end{cases}$$

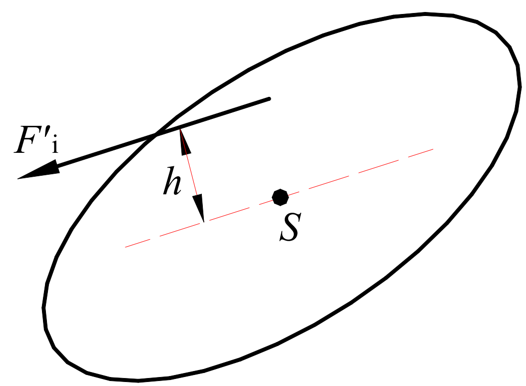


用一对力偶 $-F_i'$ 、F_i'来代替 M_i：

$$|F_i'| = |F_i|$$

$$h = \frac{M_i}{F_i'} = \frac{M_i}{F_i}$$



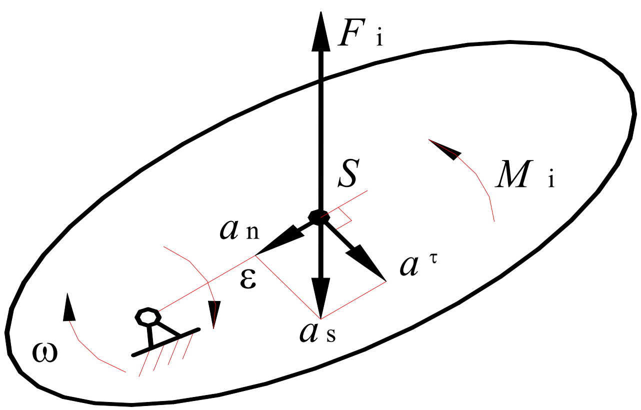


偏移方向：Fi'对S的力矩与 Mi一致。

这样 F_i 和 M_i 可合成为一总惯性力 F_i' 。

二、定轴转动的构件

定轴转动			F_i	M_i
	轴线通过质心	匀速	0	0
		变速	0	$-J_s\,\varepsilon$
	轴线不通过质心	匀速	$-ma_n$	0
		变速	$-ma_s$	$-J_s\,\varepsilon$



$$\vec{a}_s = \vec{a}_t + \vec{a}_n$$

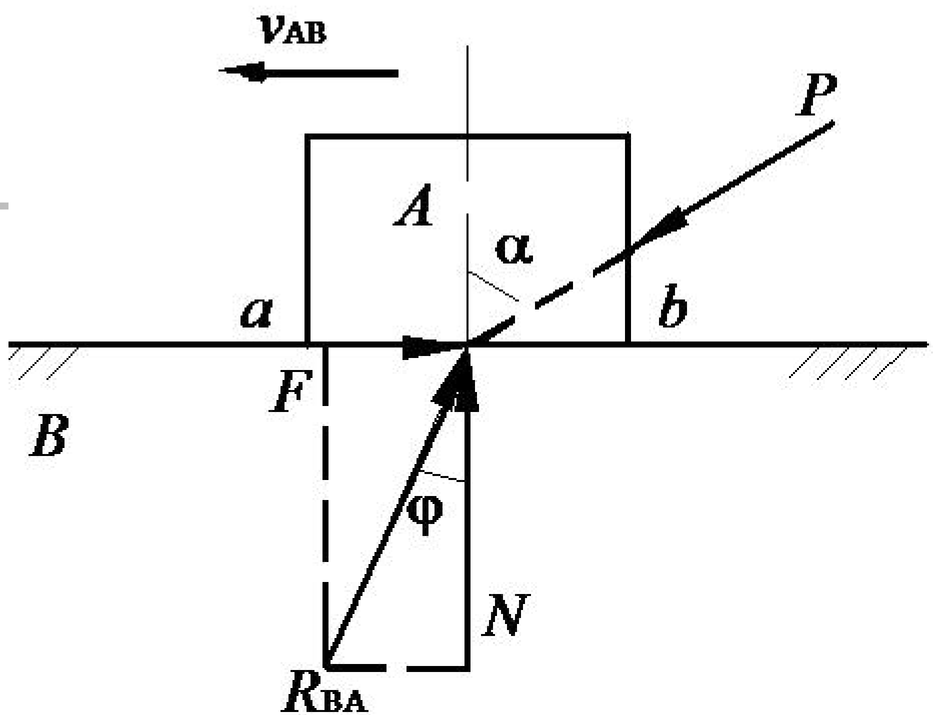
三、平动的构件

$$M_i = 0 \qquad F_i = -ma_s$$

§8-3　运动副反力的确定

一、移动副中的摩擦及其反力

1、平面移动副



滑块A在力P作用下以V_{AB}运动， A受平面B的支反力N和摩擦力F的作用。

摩擦力F与V_{AB}相反，大小根据滑动摩擦定律：

$$F = fN$$

$$\frac{F}{N} = f = tg\varphi$$ ——摩擦系数

$$\varphi = arctgf$$ ——摩擦角

平面B对滑块A的总反力R_{BA}：

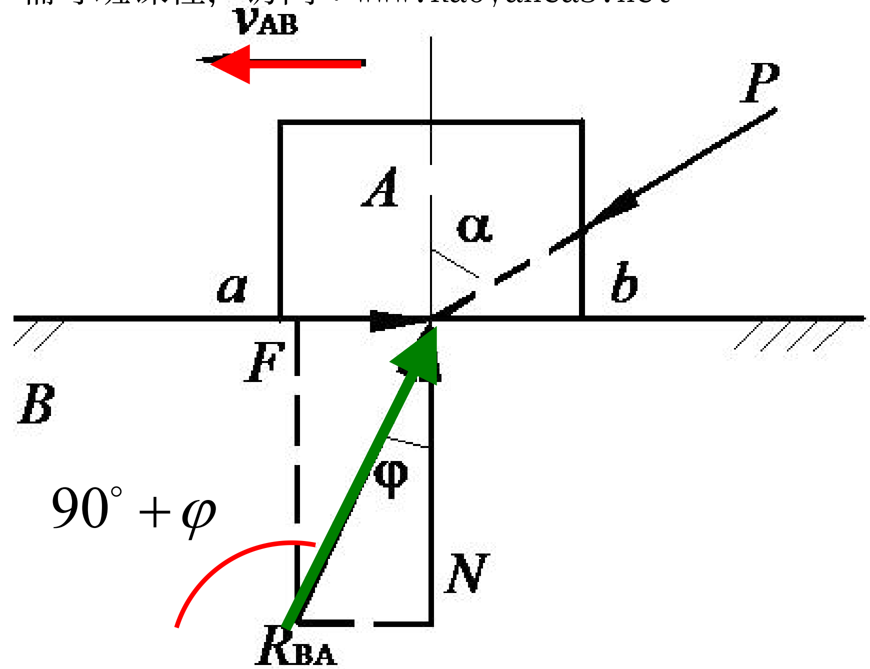
$$\vec{R}_{BA} = \vec{N} + \vec{F}$$

确定R_{BA}：

（力的三要素：点、方向、大小）

①方向：R_{BA}与V_{AB}成 90°+φ

②大小：



根据滑块A的平衡：

$$\Sigma Y = R_{BA}\cos\varphi - P\cos\alpha = 0 \longrightarrow R_{BA} = P\frac{\cos\alpha}{\cos\varphi}$$

$$\Sigma X = P\sin\alpha - R_{BA}\sin\varphi = P\sin\alpha(1 - \frac{t}{t}$$

不管驱动力多大，由于摩擦力的作用而使机构不能运动的现象称为自锁。

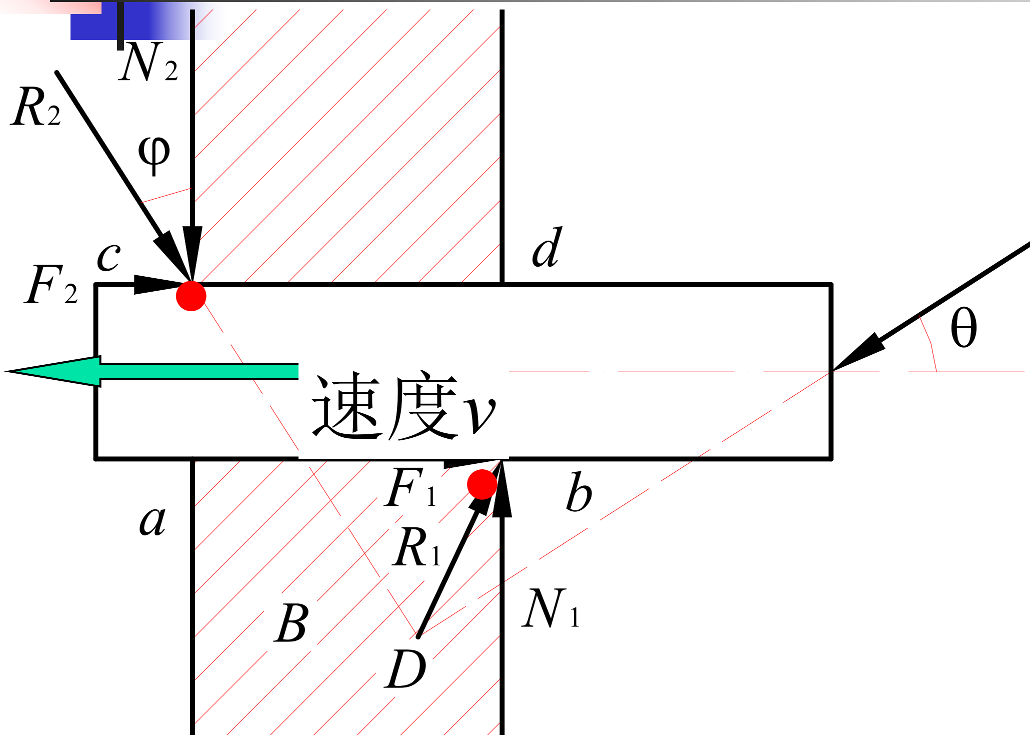
（1） $\alpha > \varphi, \Sigma X > 0$ A加速运动。

（2） $\alpha < \varphi, \Sigma X < 0$ A减速直至静止，若A原来不动，自锁。

（3） $\alpha = \varphi, \Sigma X = 0$ A匀速或静止，自锁临界状态

如P作用线在接触面之外，则滑块A除了滑动外，还有转动，确定R_{BA}：

如果材料很硬，可近似认为两反力集中在*b*、*c*两点。



在*b*处：

$$\vec{R}_1 = \vec{N}_1 + \vec{F}_1$$

$$F_1 = fN_1$$

在*c*处：

$$\vec{R}_2 = \vec{N}_2 + \vec{F}_2$$

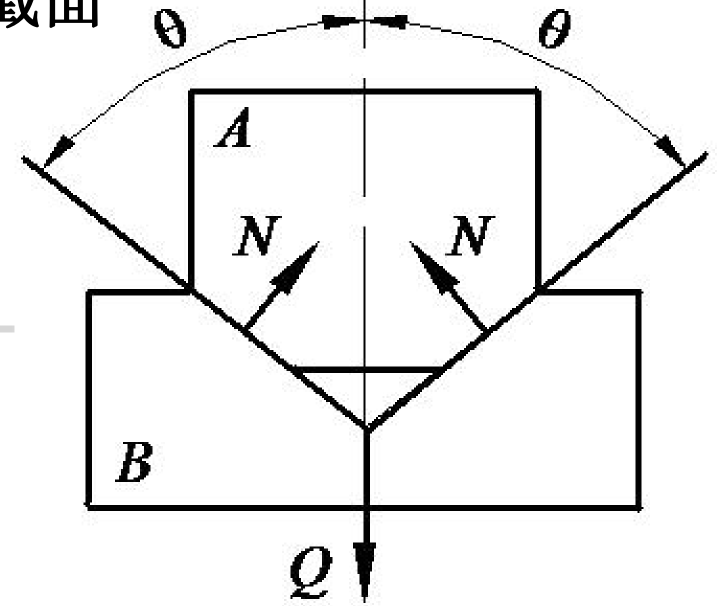
$$F_2 = fN_2$$

若滑块A处于平衡，则由三力交汇原理，力**P**、**R**$_1$、**R**$_2$交于一点！

2、楔形面移动副反力

$$2N\sin\theta = Q \quad \Rightarrow \quad N = \frac{Q}{2\sin\theta}$$

横截面



$$F_f = 2fN = \frac{f}{\sin\theta}Q = f_v Q$$

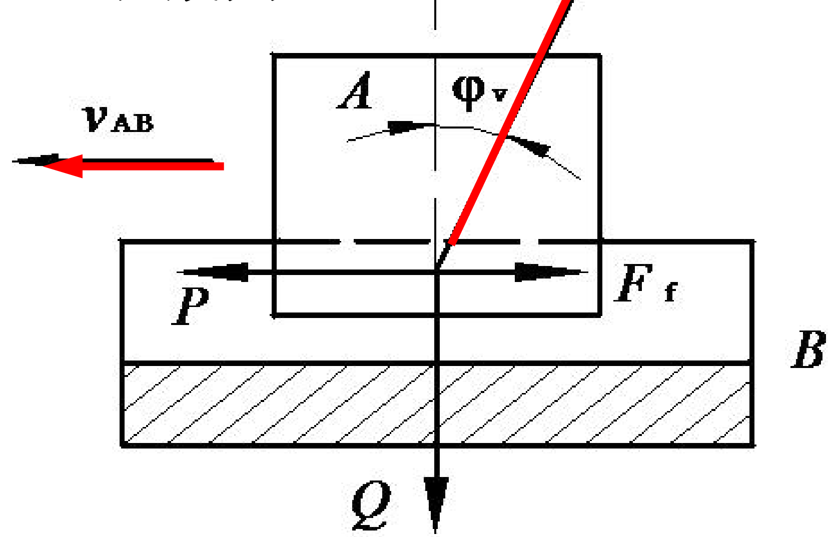
$$f_v = \frac{f}{\sin\theta} = tg\varphi_v$$

f_v ——当量摩擦系数

$$\varphi_v = arctg\frac{f}{\sin\theta} = arctgf_v$$

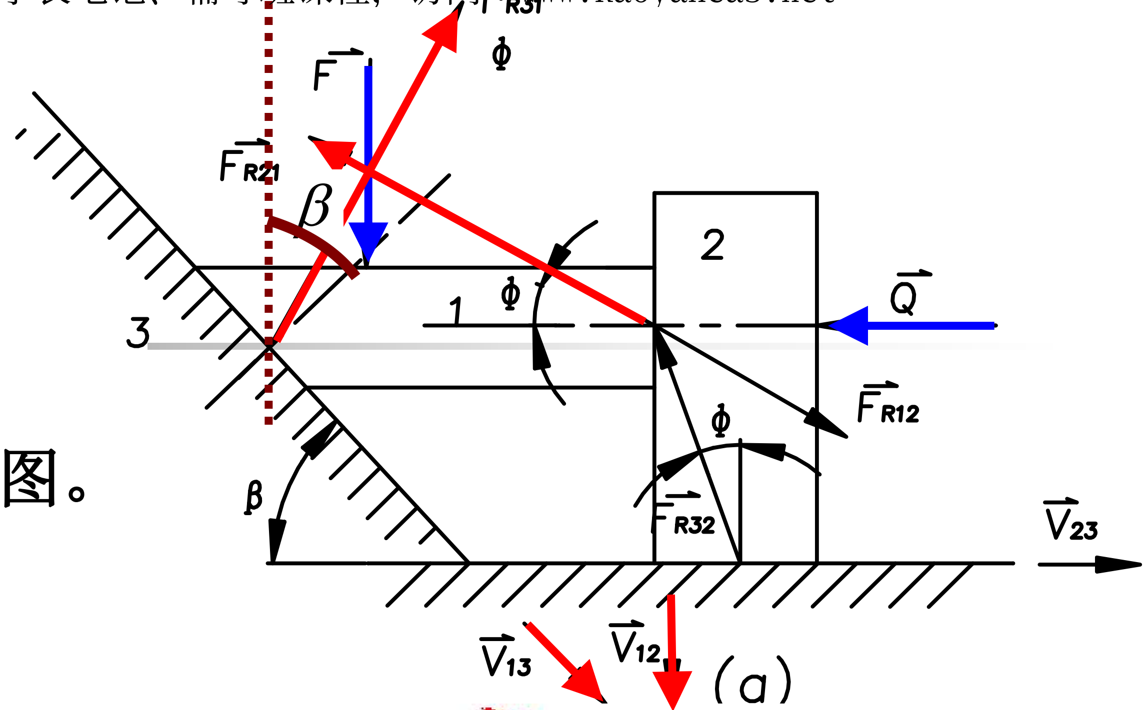
φ_v ——当量摩擦角

纵截面



与平滑块相似，楔形滑块所受运动副总反力R_{BA}与V_{AB}成90+φ_v角。

例1：已知各接触面间的摩擦角为 ϕ，求驱动力F 和生产阻力Q 间的关系式。

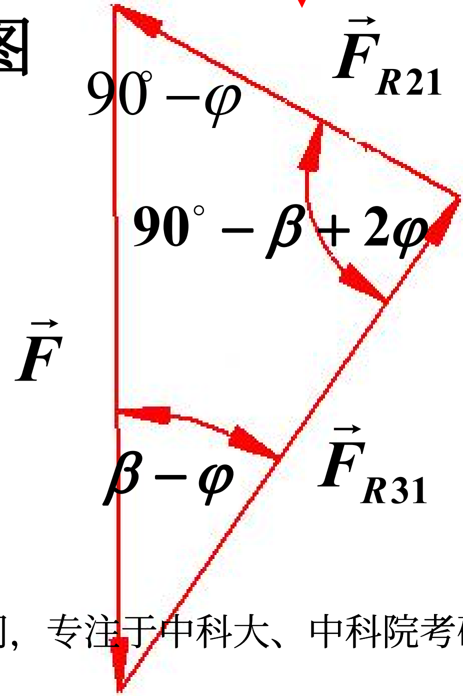


解:1）受力分析：

画出楔块1和滑块2的示力图。

2）以楔块1为示力体：

$\vec F + \vec F_{R21} + \vec F_{R31} = 0$，作力多边形图

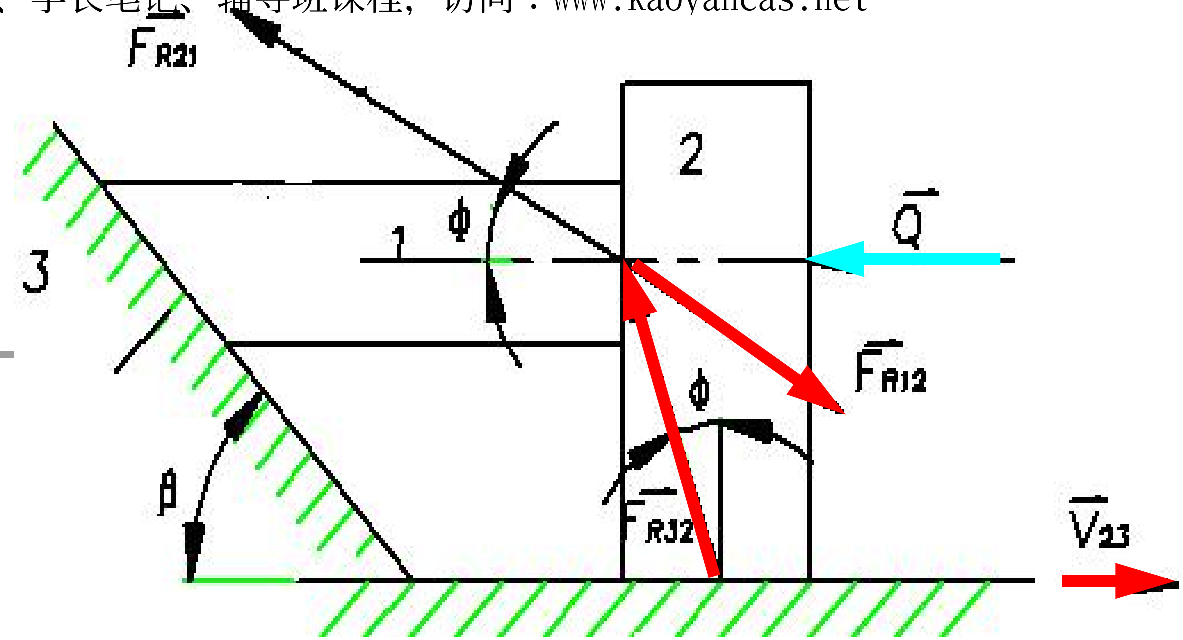


由正弦定理可得：

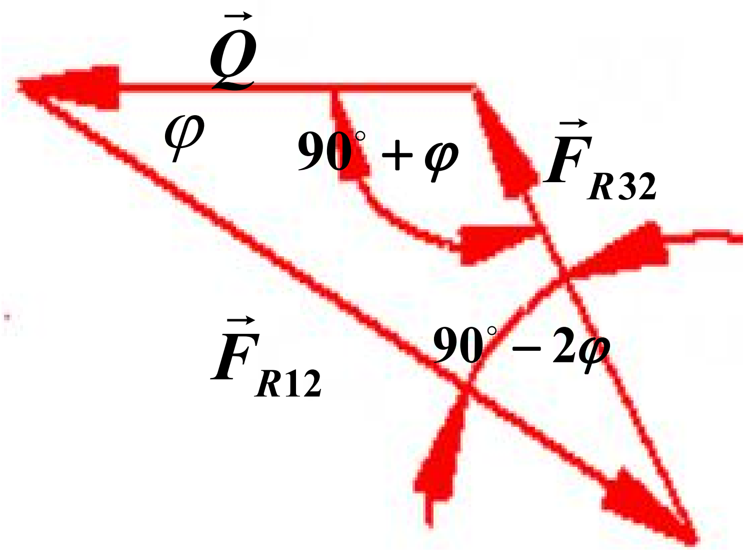
$$F = \frac{\cos(\beta - 2\varphi)}{\sin(\beta - \varphi)} F_{R21}$$

3）以滑块2为示力体

$$\vec{Q}+\vec{F}_{R32}+\vec{F}_{R12}=0$$



作力多边形图



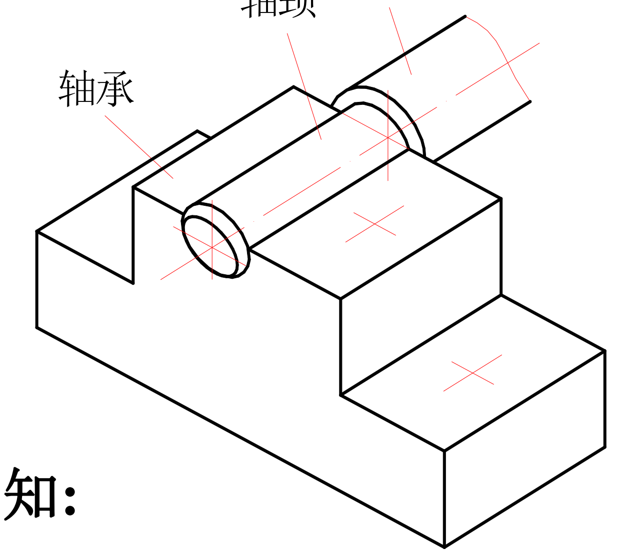
由正弦定理可得：

$$F_{R12}=\frac{\cos\varphi}{\cos(2\varphi)}Q$$

$$F=\frac{\cos(\beta-2\varphi)}{\sin(\beta-\varphi)}F_{R21}$$ 由 $F_{R21}=F_{R12}$ 得：

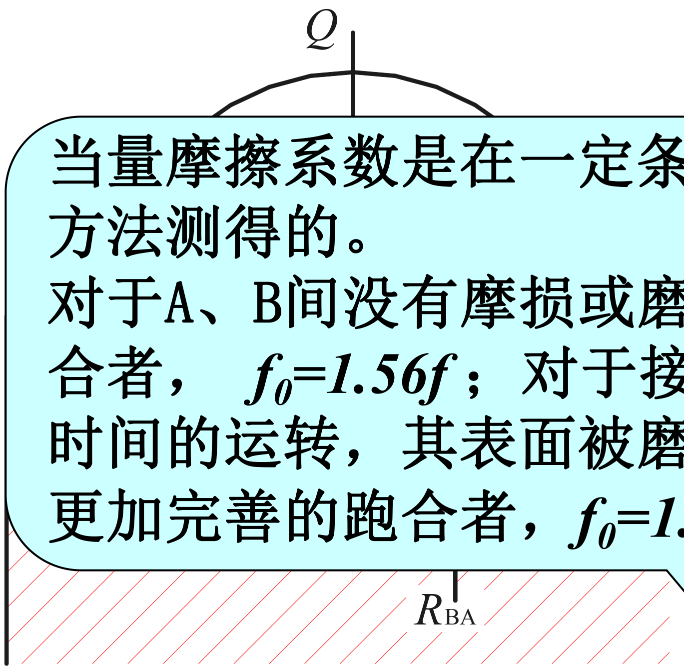
$$F=\frac{\cos(\beta-2\varphi)\cos\varphi}{\sin(\beta-\varphi)\cos(2\varphi)}Q$$

二、转动副中的运动副反力



1、径向轴颈的反力

A在Q、M作用下以ω$_{AB}$角速度转动，那么在接触面上分布有沿径向的支承力和沿切向的摩擦力，它们的总合力为R$_{BA}$。



当量摩擦系数是在一定条件下用试验的方法测得的。
对于A、B间没有摩损或磨损极少的非跑合者， f_0=1.56f；对于接触面经过一段时间的运转，其表面被磨成平滑，接触更加完善的跑合者，f_0=1.27f

根据力平衡条件可知：

$$R_{BA} = -Q$$

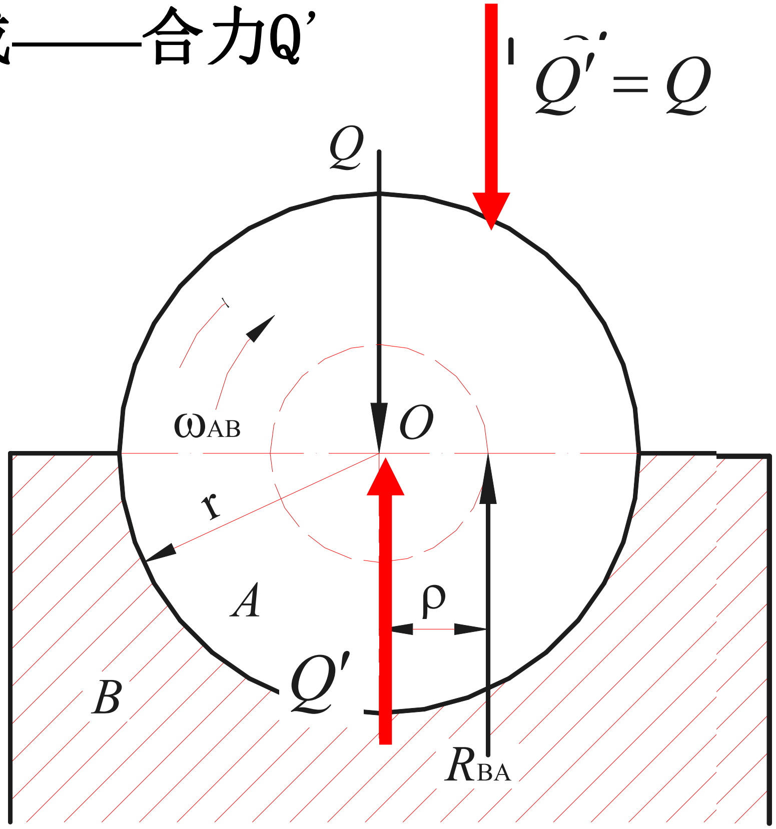
阻止轴颈转动的力偶矩M$_f$：

$$_{BA}\cdot\rho = F_f\cdot r = f_0 Q\cdot r$$

$$\rho = \frac{_f}{R_{BA}} = \frac{M_f}{Q} = f_0 r$$

f_0 ——径向轴颈的当量摩擦系数

根据力偶等效定律，*M*和*Q*合并成——合力Q’



$$Q' = Q$$

$$\rho' = \frac{M}{Q}$$

驱动力矩

$$M = Q'\rho' = Q\rho'$$

$$M_f = R_{BA}\rho = Q\rho$$

驱动力矩

（1）$\rho' < \rho, M < M_f$ **A作减速至静止，原来静止，自锁**

（2）$\rho' = \rho, M = M_f$ **A匀速转动，或保持静止。自锁临界状态**

（3）$\rho' > \rho, M > M_f$ **A加速运动**

由 $\rho = f_0 r$ 式知：

ρ 只与f_0，r有关，Q变向时，R_{BA}变向，但相对轴心始终偏移距离 ρ

即R_{AB}与以O为圆心，以为半径的圆相切，与摩擦角作用相同，此圆决定了总反力作用线的位置，称摩擦圆

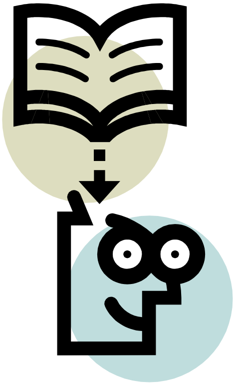
确定总反力R_{AB}的方向：

1、总反力与摩擦圆相切

2、总反力引起的力矩是阻止相对运动的

R_{BA}引起的力矩与ω_{AB}方向相反

3、利用平衡条件（二力共线，三力共点）

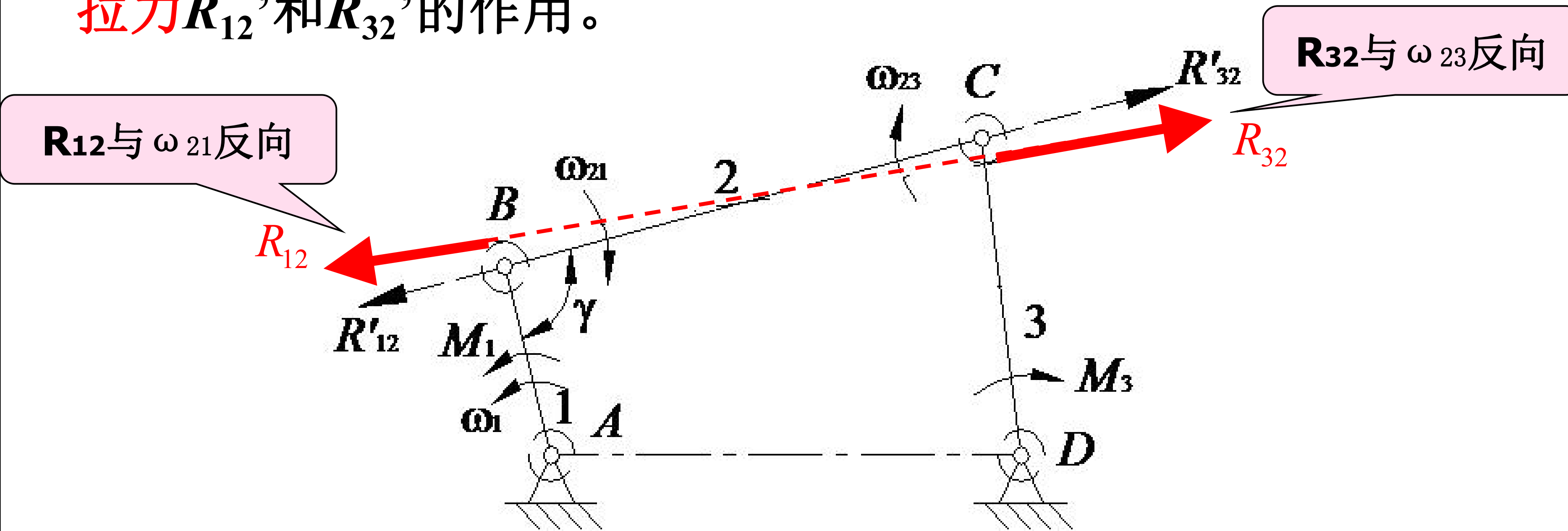


例2：在图所示的铰链四杆机构中，设曲柄1为原动件，M_1为驱动力矩，M_3为生产阻力矩；不计重力和惯性力。

试画出杆1、2和3的示力图。图中虚线小圆为摩擦圆。

解：1）以连杆2为示力体

连杆2为二力杆，若不计摩擦力，则杆2受一对过B、C的拉力R_{12}'和R_{32}'的作用。



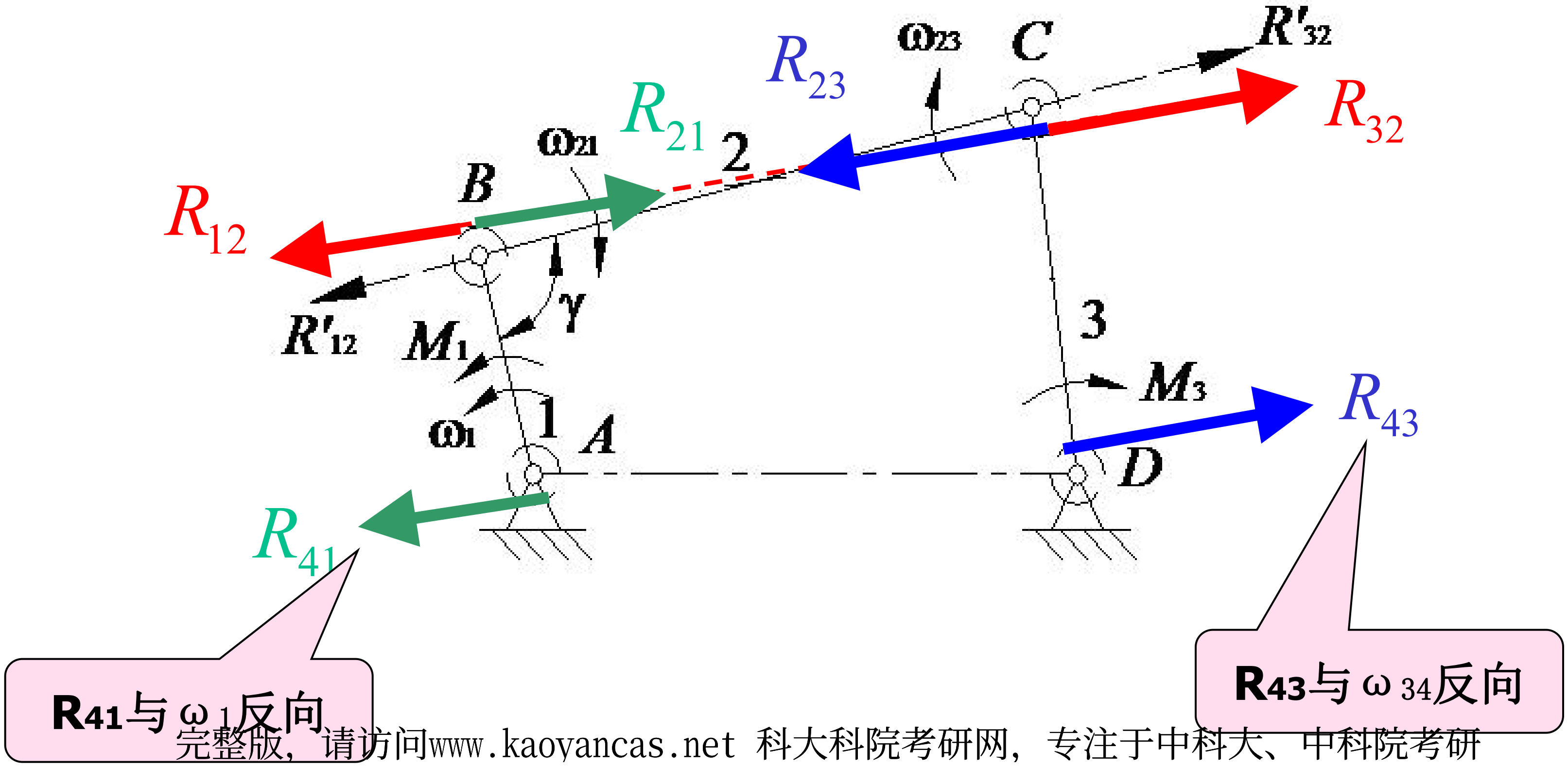
设想：在当前位置，杆1沿ω_1方向作微小转动，以确定相对转向ω_{21}和ω_{23}进而可知总反力R_{12}和R_{32}沿B、C两摩擦圆的一条内公切线。

2）以连架杆3为示力体

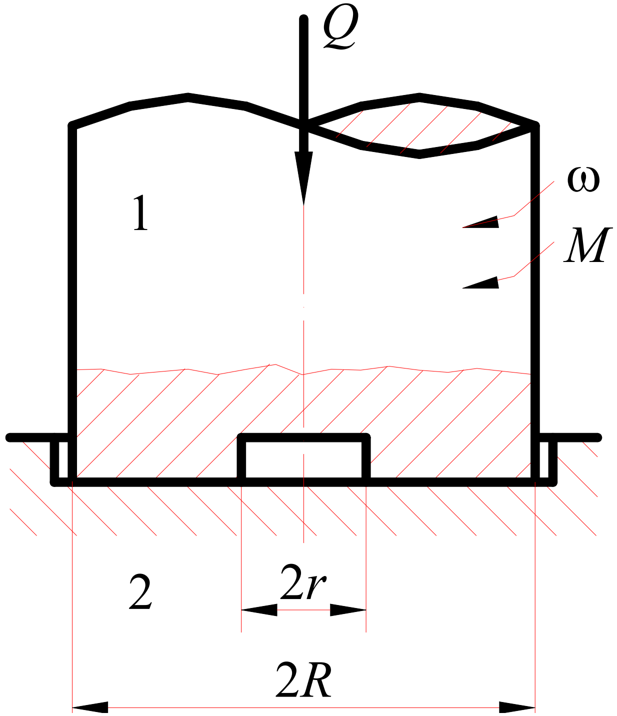
根据$\boldsymbol{R}_{23}=-\boldsymbol{R}_{32}$、转向$\omega_{34}=\omega_3$及$\boldsymbol{R}_{43}=-\boldsymbol{R}_{23}$，可知$\boldsymbol{R}_{43}$必切于摩擦圆$D$的上方。

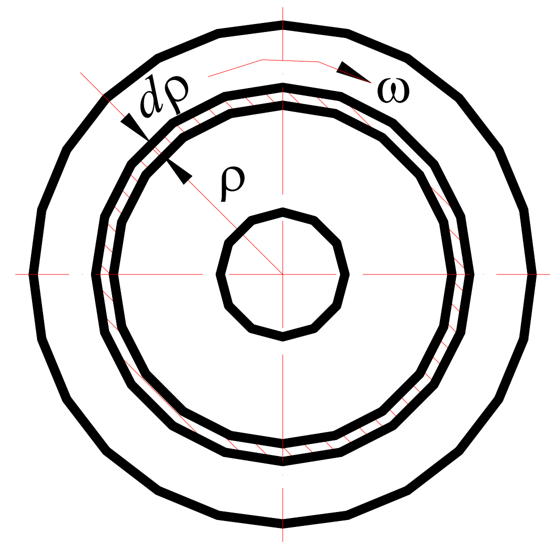
3）以曲柄1为示力体

同理可知$R_{41}=-R_{21}$，且切于摩擦圆A的下方。



2 、止推轴颈的摩擦力





止推轴颈的摩擦力矩：

$$M_f = fQr' \qquad r'\text{——当量摩擦半径}$$

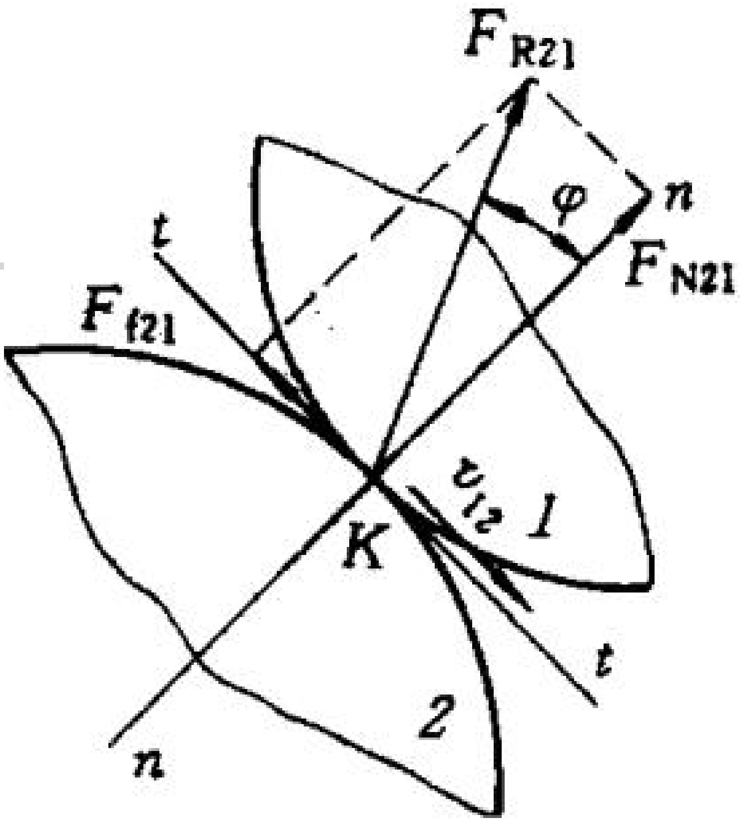
非跑合止推轴颈： $$r' = \frac{2}{3}\left(\frac{R^3 - r^3}{R^2 - r^2}\right)$$

跑合止推轴颈： $$r' = (R + r)/2$$

三、高副中摩擦力的确定

平面高副中存在滚动摩擦力和滑动摩擦力，滚动摩擦力较小，一般可不计。

滑动摩擦力和总反力的确定方法与移动副中摩擦力和总反力的确定方法相同。



关键：正确确定接触点处的相对移动速度的方向。

§8-4　机构的动态静力分析

目的：

1、确定运动副反力

2、确定机械的平衡力（力矩）

为保证机构按给定的运动规律运动，必须施加驱动力（力矩）与已知外力相平衡，这种未知力（力矩）称为平衡力。

计算理论：动态静力法

根据达朗贝尔原理，假想地将惯性力加在产生该力的构件上，构件在惯性力和其他外力的作用下，认为是处于平衡状态，因此可以用静力计算的方法进行计算。

一、不考虑摩擦的机构动态静力分析

机构动态静力分析步骤：

1）对机构进行运动分析：确定在已知机构位置各构件的惯性力和惯性力矩，并将其与已知其它各力及力矩加到相应构件上。

2）从已知的驱动力或生产阻力所作用的构件开始，对外力全部已知的构件计算其运动副反力（考虑反力、惯性力、重力、驱动力、生产阻力的平衡）。

3）计算平衡力及其所作用构件的运动副反力（解方程（图解法），力多边形）。

计算各运动副反力时，应知道需求解的未知量的数目。

不考虑摩擦时，转动副中的反力应通过中心，大小、方向待定。

移动副中的反力应⊥移动方向，大小、作用点待定。

平面高副沿高副接触点法线方向，大小待定。

∴要确定一个平面低副中的反力，必须求解两个未知量。

要确定一个平面高副中的反力，必须求解一个未知量。

构件组静定条件:

设所取的构件组有n个构件，对每个构件可写出三个平衡方程：

$$\sum F_x = 0, \sum F_y = 0 , \sum M = 0$$

构件组一共可写出3n个平衡方程式

未知量数目：　$2P_L+P_H$

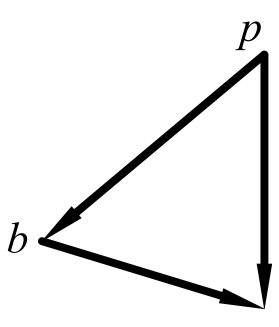
例题8-3

静定条件：　$3n = 2P_L + P_H$

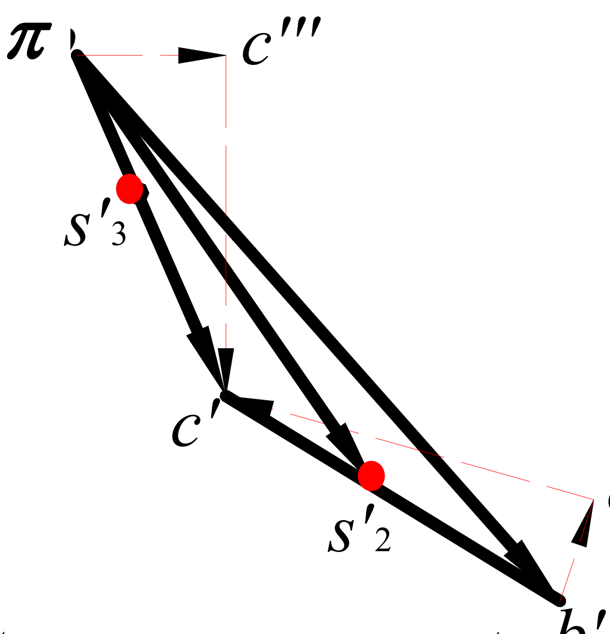
例：鄂式破碎机中，已知各构件的尺寸、重力及其对本身质心轴的转动惯量，以及矿石加于活动鄂板2上的压力Ft。设构件1以等角速度ω_1转动，其重力可以忽略不计。

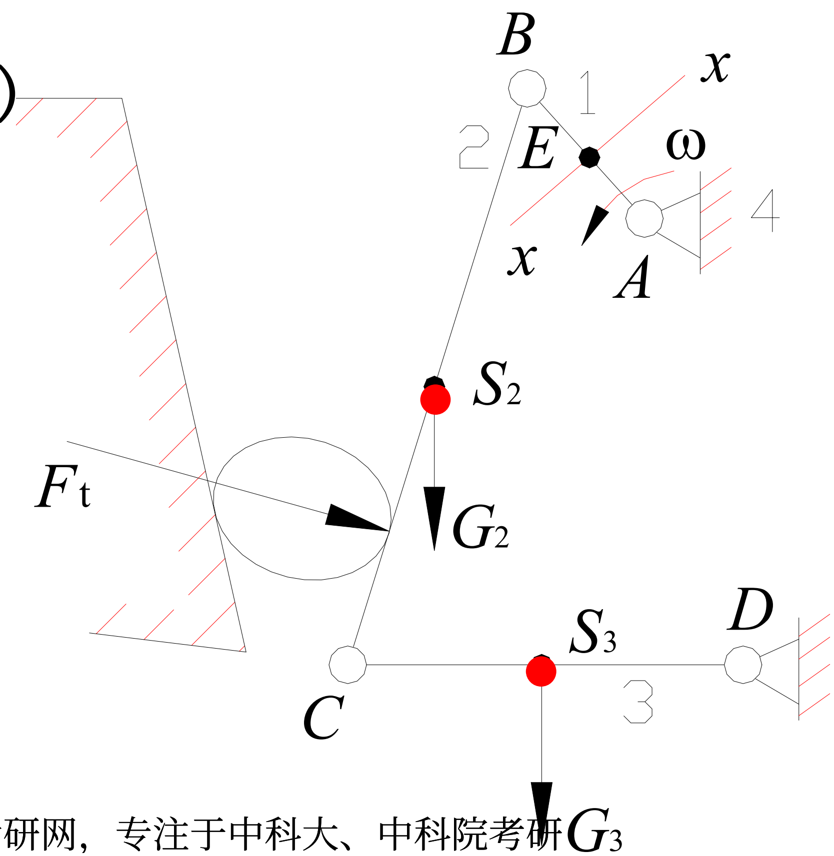
求:作用在其上E点沿已知方向x-x的平衡力F_b以及各运动副中的反力。

解：(1)作机构运动简图($\mu_{1,}$)，速度多边形(μ_v)，加速度多边形图(μ_a)



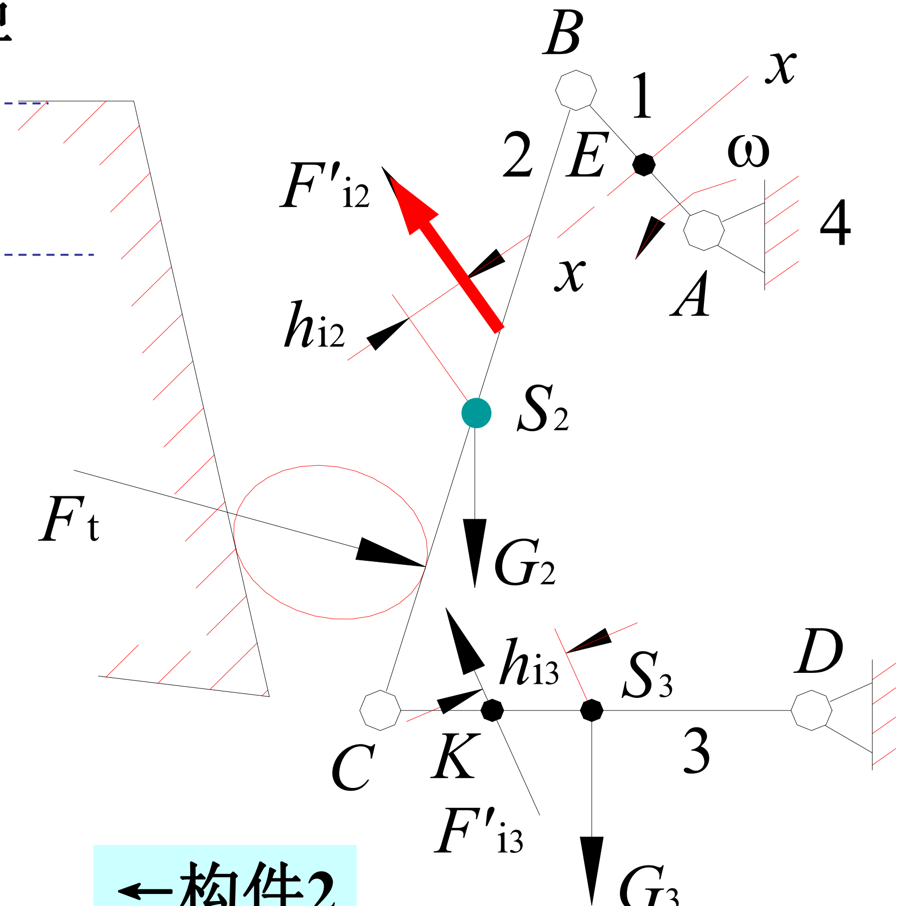
$$v_C = v_B + v_{CB}$$





$$a_C^n + a_C^t = a_B^n + a_{CB}^n + a_{CB}^t$$

(2) 确定各构件的惯性力和惯性力矩

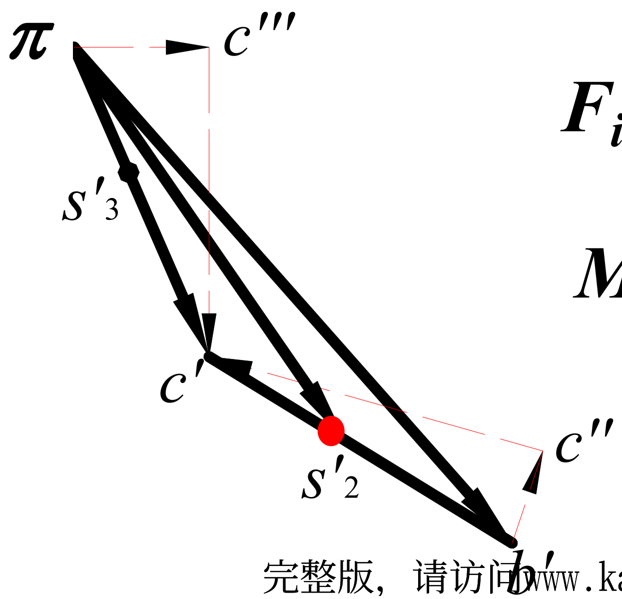


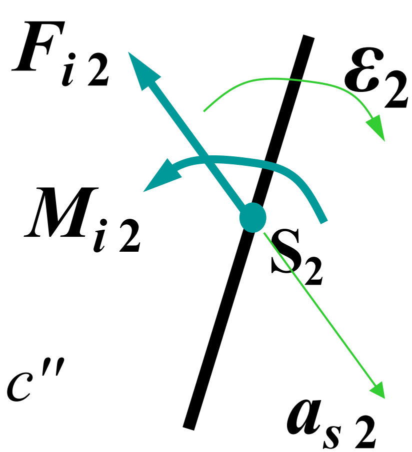
构件 1：不计惯性力

构件 2：

$$F_{i2} = -m_2 a_{s2} = -\frac{G_2}{g}\mu_a \overline{pS_{2'}}$$

$$M_{i2} = -J_{S2}\varepsilon_2 = -J_{S2}\frac{a^t_{CB}}{l_{CB}} = -J_{S2}\frac{\mu_a C''C'}{l_{CB}}$$





←构件2

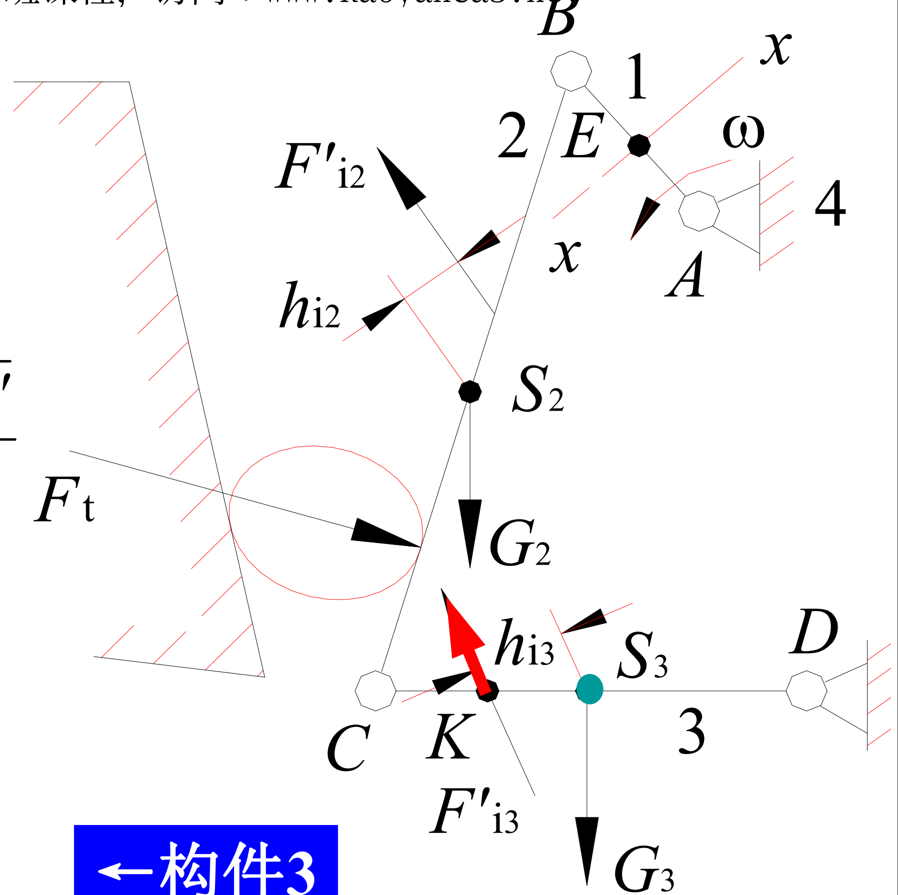
将质心S_2的合作用在构件2上的合并成一个总惯性力：F'_{i2}

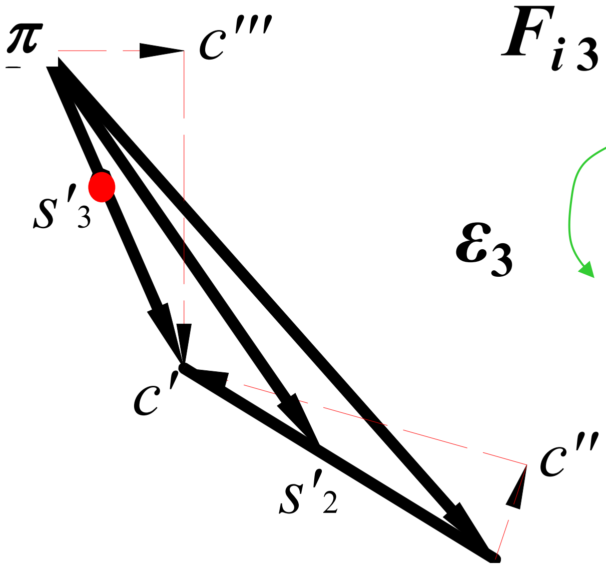
距离质心S_2：$h_{i2} = \dfrac{M_{i2}}{F_{i2}}$

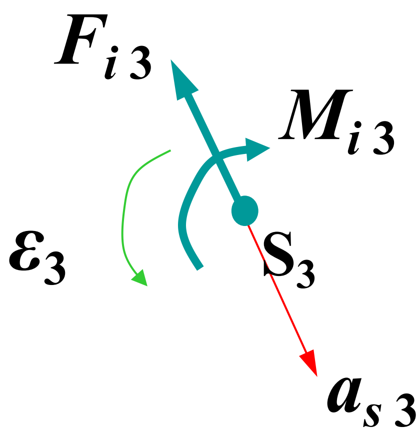
构件3：

$$F_{i3}=-m_3a_{S3}=-\frac{G_3}{g}\mu_a\overline{ps_3'}$$

$$M_{i3}=-J_{S3}\varepsilon_3=-J_{S3}\frac{a_C^t}{l_{CD}}=-J_{S3}\frac{\mu_a\overline{C'''C'}}{l_{CD}}$$







←构件3

将质心S_3的合作用在构件3上的合并成一个总惯性力：F_{i3}'

距离质心S_3：$h_{i3}=\dfrac{M_{i3}}{F_{i3}}$

（3）确定各运动副反力及平衡力

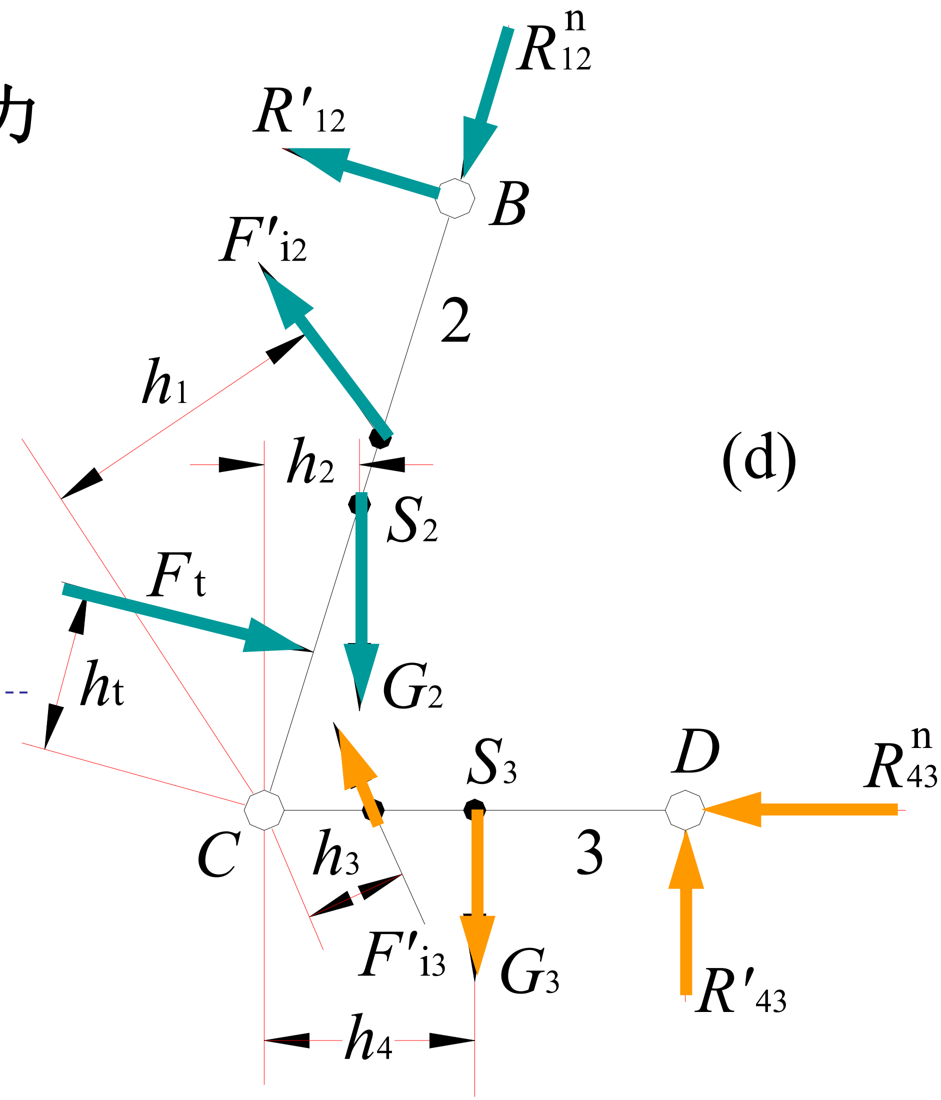
a）求杆组2，3各运动副中的反力

由构件 2：$\sum M_C = 0$

$$G_2h_2 + F_th_t - F'_{i2}h_1 - R^t_{12}l_{CB} = 0$$

$$\rightarrow \quad R^t_{12} = \frac{G_2h_2 + F_th_t - F'_{i2}h_1}{l_{CB}}$$

R^t_{12} 为正，则指向同假设，否则相反。



由构件3：$\sum M_C = 0$

$$G_3h_4 - F'_{i3}h_3 - R^t_{43}l_{CD} = 0$$

$$\rightarrow \quad R^t_{43} = \frac{G_3h_4 - F'_{i3}h_2}{l_{CD}}$$

R^t_{12}，R^t_{43} 求出后,根据杆组2，3平衡由 $\sum F = 0$ 得:

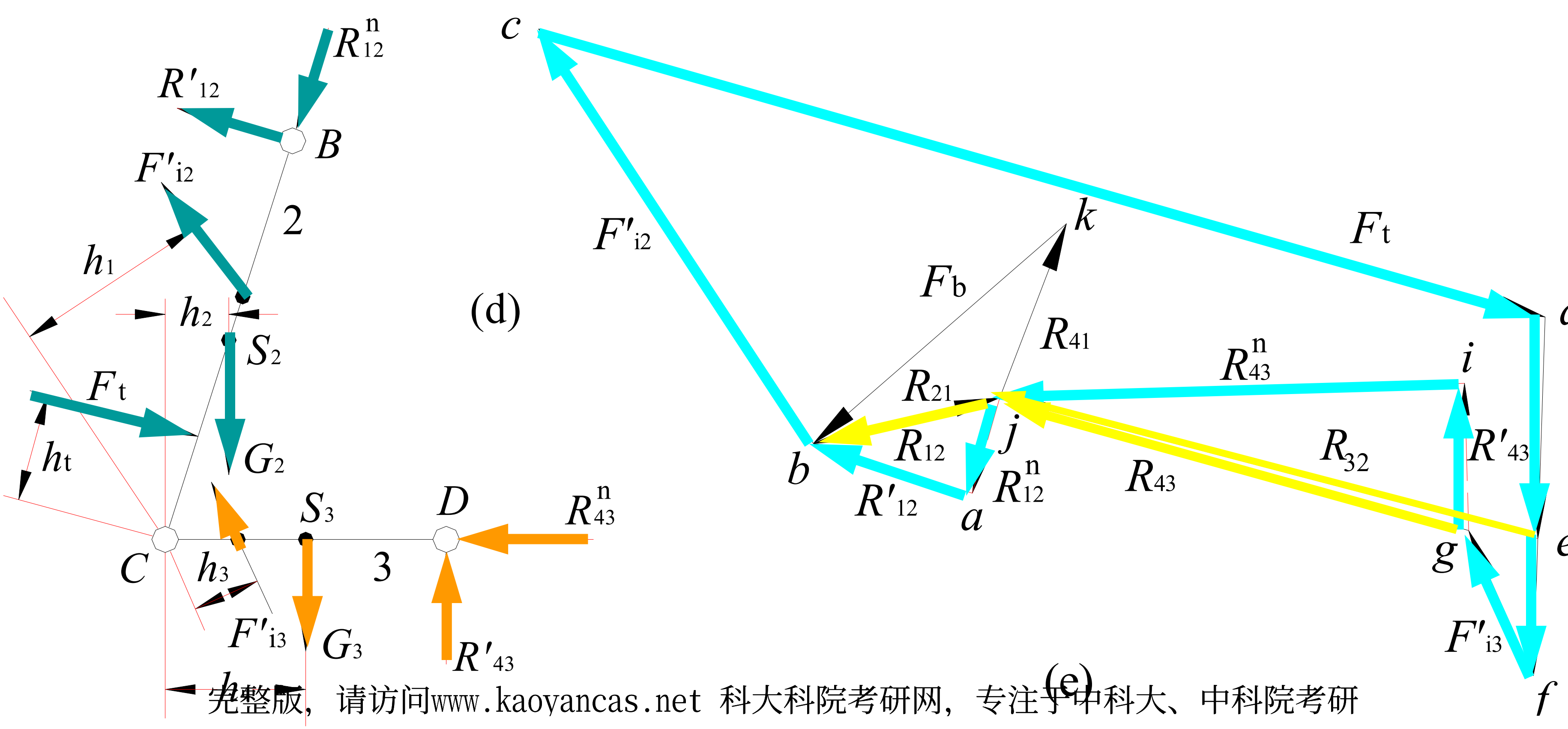
$$\underline{R^n_{12}} + \underline{\underline{R^t_{12}}} + \underline{\underline{F'_{i2}}} + \underline{\underline{F_t}} + \underline{\underline{G_2}} + \underline{\underline{G_3}} + \underline{\underline{F'_{i3}}} + \underline{\underline{R^t_{43}}} + \underline{R^n_{43}} = 0$$

$$\underline{\vec{R}_{12}^{n}} + \underline{\underline{\vec{R}_{12}^{t}}} + \underline{\underline{\vec{F}_{i2}'}} + \underline{\underline{\vec{F}_{t}}} + \underline{\underline{\vec{G}_{2}}} + \underline{\underline{\vec{G}_{3}}} + \underline{\underline{\vec{F}_{i3}'}} + \underline{\underline{\vec{R}_{43}^{t}}} + \underline{\vec{R}_{43}^{n}} = 0$$

作力多边形（μ F），可得：$R_{12} = \mu_F \overline{jb}$ $R_{43} = \mu_F \overline{gj}$

又由构件2的平衡条件：$\vec{R}_{12} + \vec{F}_{i2}' + \vec{F}_{t} + \vec{G}_{2} + \vec{R}_{32} = 0$

作力多边形，可得：$R_{32} = \mu_F \overline{ej}$

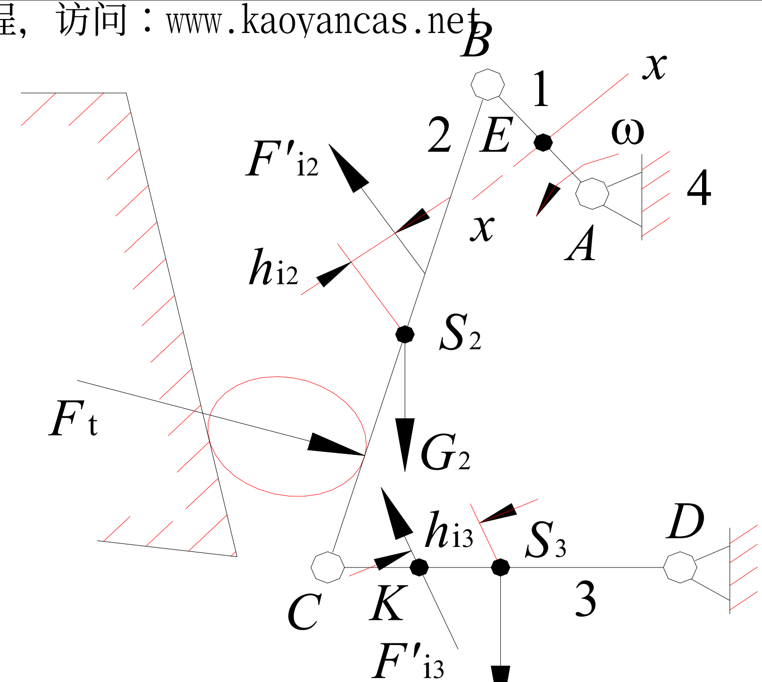


b）求构件1平衡力及反力

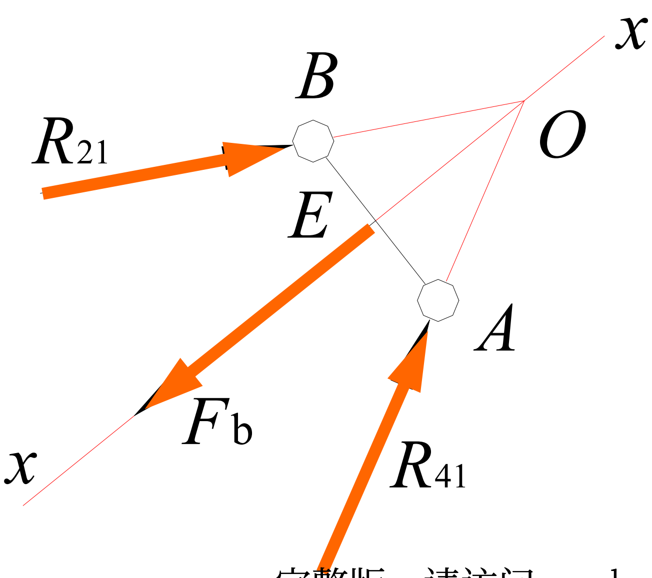
∵ $R_{21}=-R_{12}$

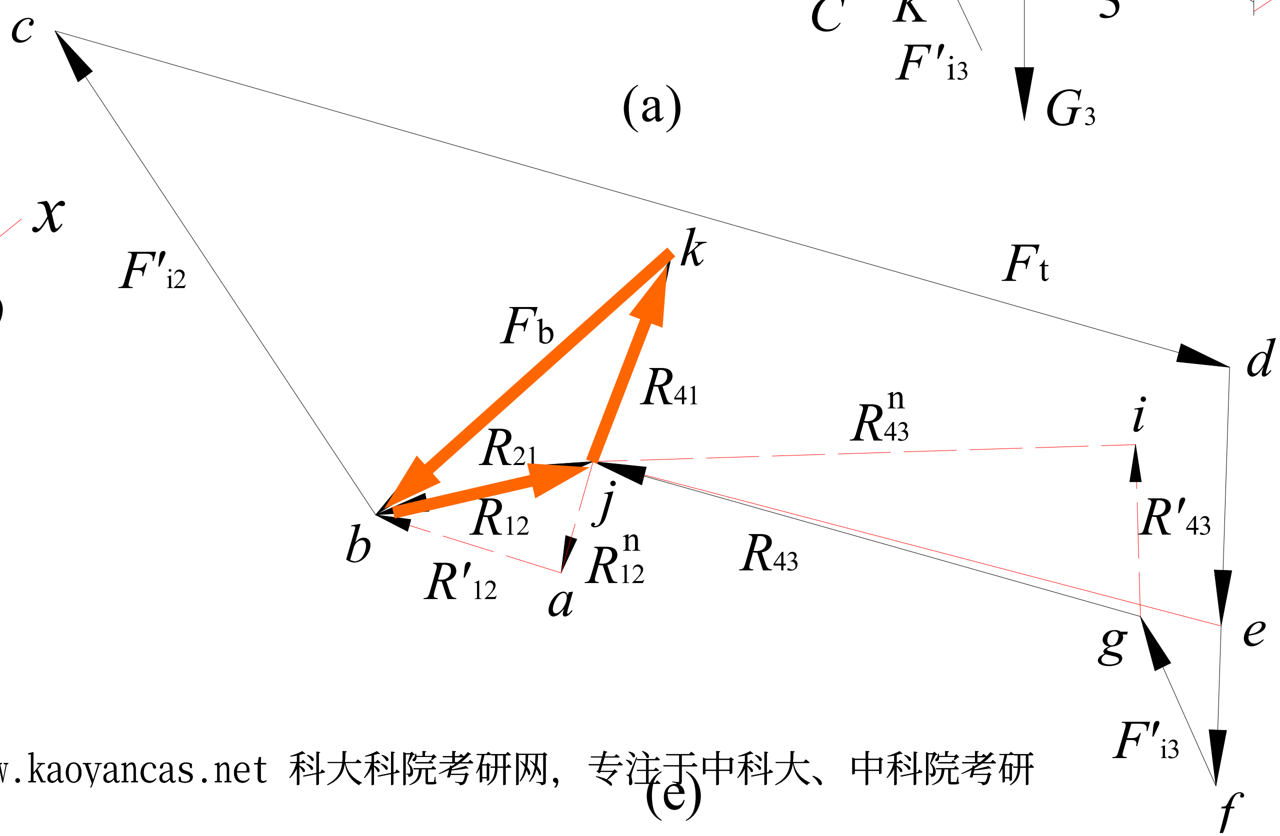
则：$\underline{\vec{F}_b}+\underline{\underline{\vec{R}_{21}}}+\underline{\vec{R}_{41}}=0$

由力图可求出：F_b和 R_{41}。



(a)





(e)

§ 8-5　速度多边形杠杆法

进行机构力分析时，有时仅需知道应加于其上的平衡力和平衡力矩，而不必求各运动副反力。

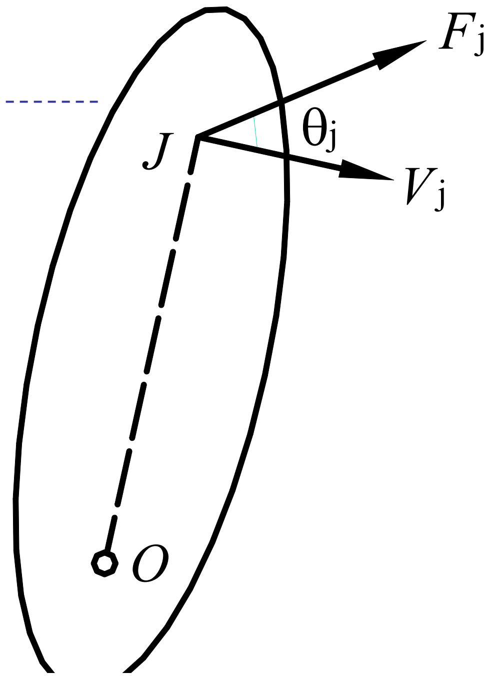
或平衡力加在不与机架相连的构件上，需先求平衡力再求运动副反力。

宜用**速度多边形杠杆法**求解！

一、虚位移原理

虚位移原理：具有理想约束力学体系，其平衡的充要条件是所有主动力在任意虚位移中所作元功之和等于零。

设F_j为……惯性力)，d……速度，θ_j为F_j……F_j所作的微小功和功……



对整个机构由虚位移原理得：

$$\sum dA_j = \sum F_j dS_j \cos\theta_j = 0$$

$$\sum P_j = \sum \frac{dA_j}{dt} = \sum F_j v_j \cos\theta_j = 0$$

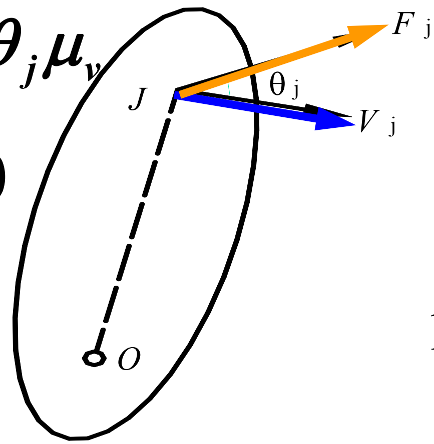
二、速度多边形杠杆法

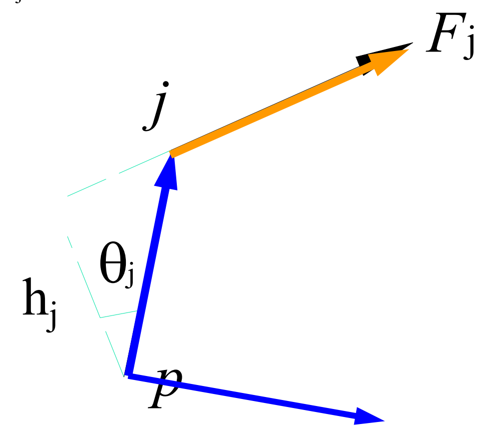
从任意极点P，以比例尺μ_v作线段pj代表v_j，再绕极点旋转90°，将F_j平移到点 j，则力F_j的功率：

$$\sum P_j = \sum F_j v_j \cos\theta_j = \sum F_j \overline{pj} \cos\theta_j \mu_v$$

$$\sum F_j \overline{pj} \cos\theta_j \mu_v = \sum F_j h_j \mu_v = 0$$

$$\sum F_j h_j = 0$$





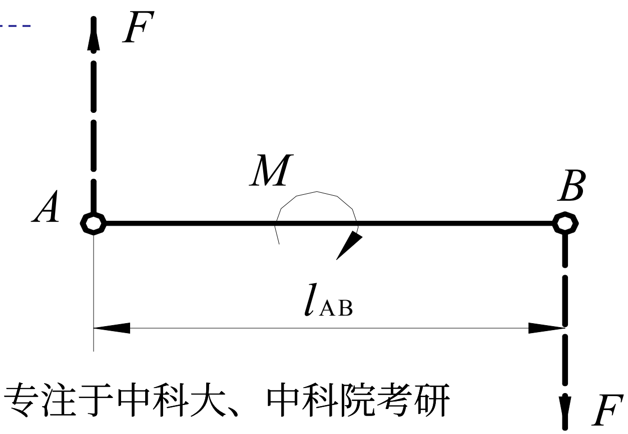
h_j为F_j对极点p的力臂

∴作用在构件上的所有外力对转向速度多边形极点的力矩之和为零！

外力矩处理方法：

转化为构件上两选定点A、B处两个力构成的力偶：

$$F = \frac{M}{l_{AB}}$$

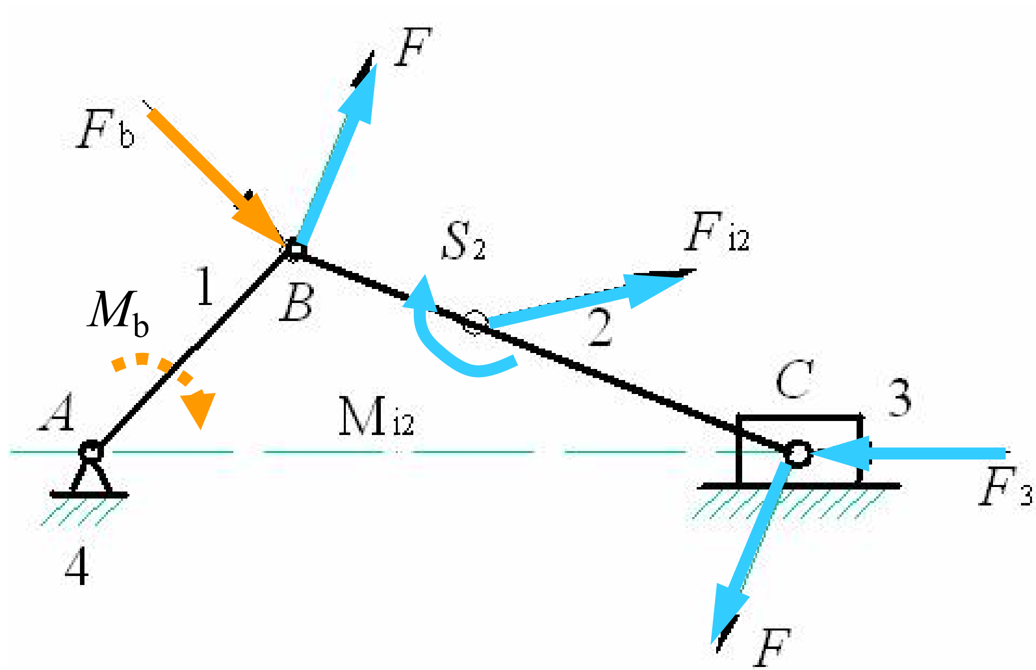


注意点：

1、可以不转速度多边形，将力转90°后，平移到速度多边形上。

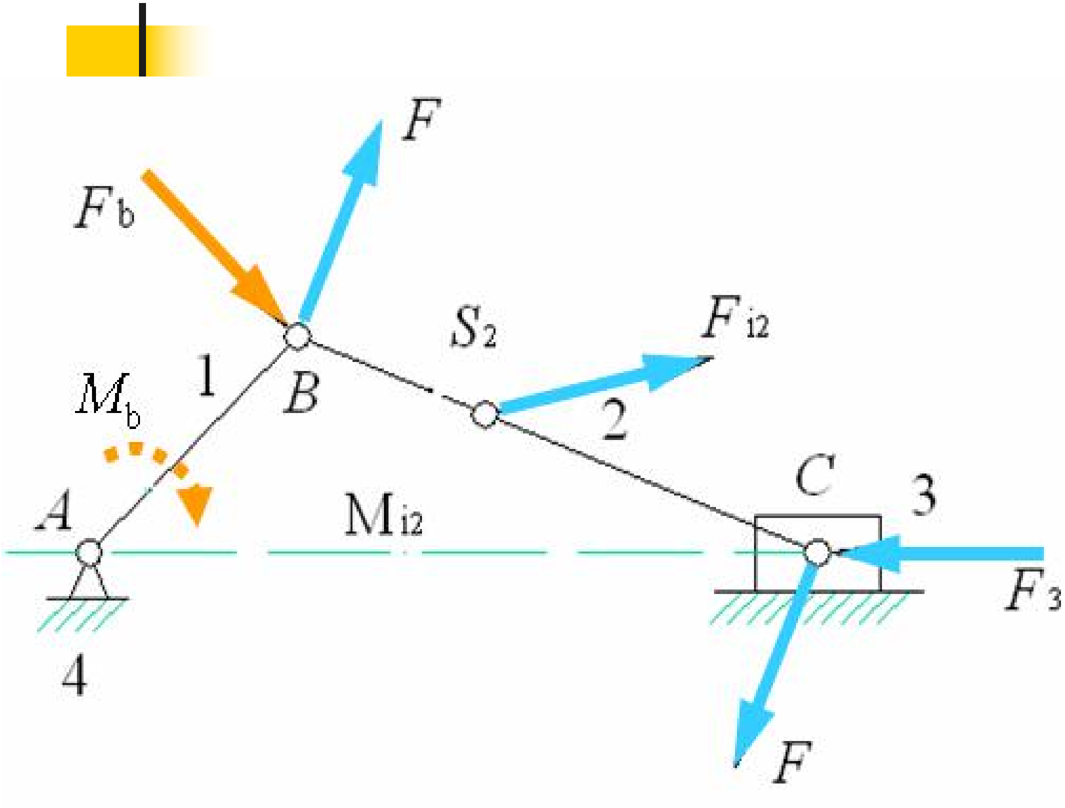
2、力转动或速度转动时方向必须要一致。

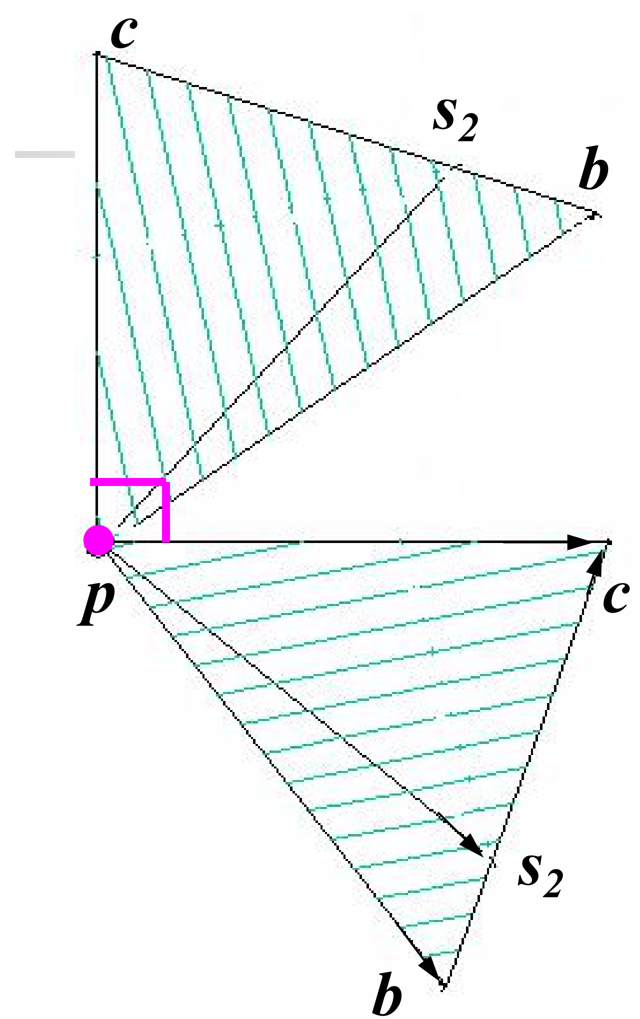
例8-7：已知连杆2质心处的惯性力F_{i2}和惯性力矩M_{i2}，加于活塞上的外力F_3。求曲柄销上的切向平衡力F_b或平衡力矩M_b。



解：1) 将M_{i2}化成作用于B,C两点的一个力偶F： $F = M_{i2} / l_{BC}$

2）以比例尺μ_v作转向速度多边形$pbcs_2$；

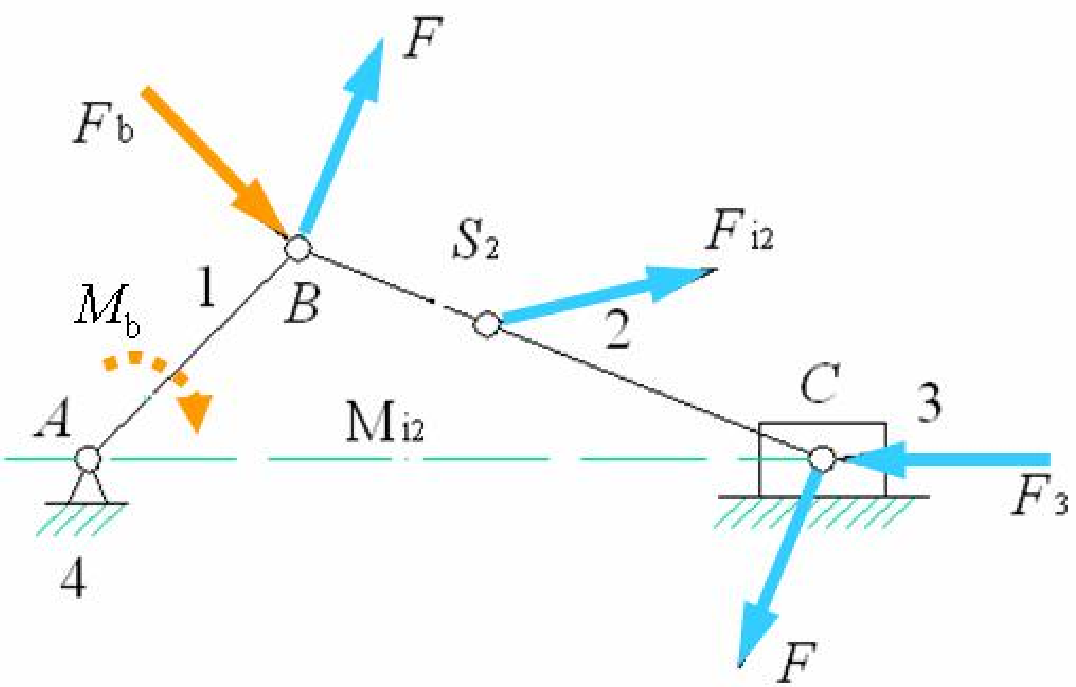


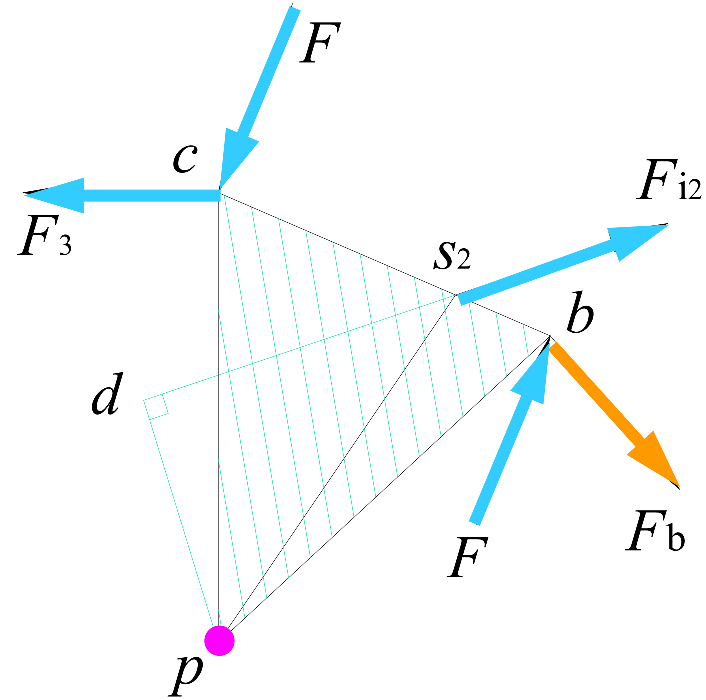


3) 将各力平移到转向速度多边形上对应点 ,对p点取矩,得：

$$F_{i2}\,\overline{pd}+F_b\,\overline{pb}-F\,\overline{cb}-F_3\,\overline{pc}=0$$

$$F_b=\frac{F\,\overline{cb}+F_3\,\overline{pc}-F_{i2}\,\overline{pd}}{pb}\qquad \text{或}\qquad M_b=F_b l_{AB}$$





本 章 要 点

1）作用于机构上的力，力分析的任务和方法

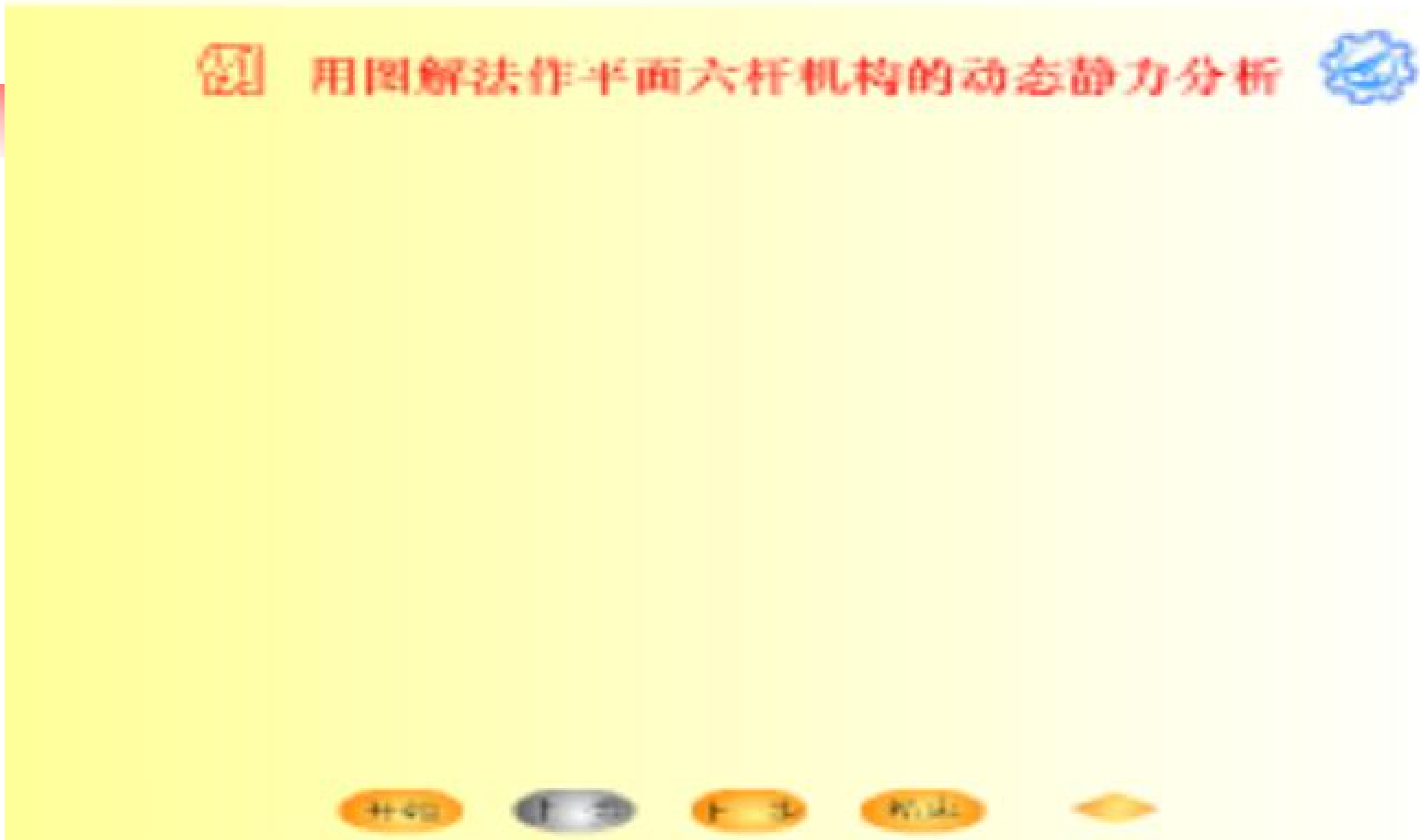
2）移动副和平面高副中摩擦力与总反力的确定

转动副中摩擦力矩和总反力的确定

3）惯性力和惯性力矩的确定方法

4）简单机构的动态静力分析方法

5） 速度多边形杠杆法



$F_{I2} = m_2 a_{C2} = (G_2/g)\mu_a p'S'_2$

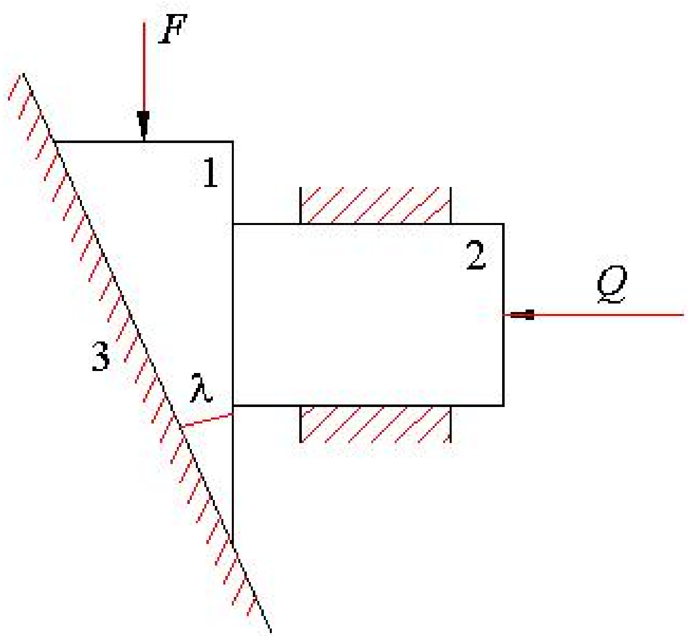
$M_{I2} = J_{C2}\alpha_2 = J_{C2} a^t_{CB}/l_2$

复习思考题

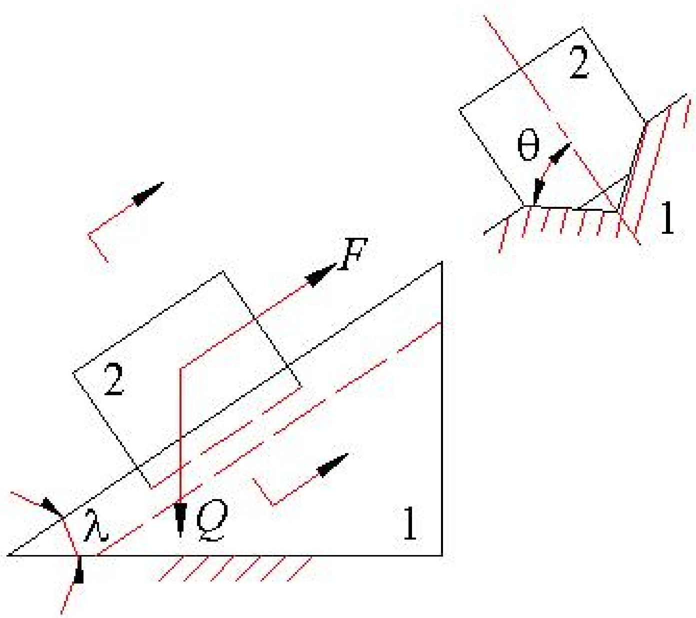
1、作用在机械系统上的内力和外力各有哪些？
2、何谓机构的静力计算和机构的动态静力计算？
3、何谓摩擦圆？怎样确定径向轴颈转动副中总反力作用线位置及方向？
4、何谓摩擦角？如何确定移动副中总反力的方向？
5.5、当一径向轴颈以相同方向按等速、加速或减速转动时，在载荷不变的情况下，其上作用的摩擦力矩是否一样？为什么？
6、何谓自锁？从受力观点分析，移动副在什么条件下自锁？
7、何谓自锁？从受力观点分析，径向轴颈转动副在什么条件下自锁？

习题

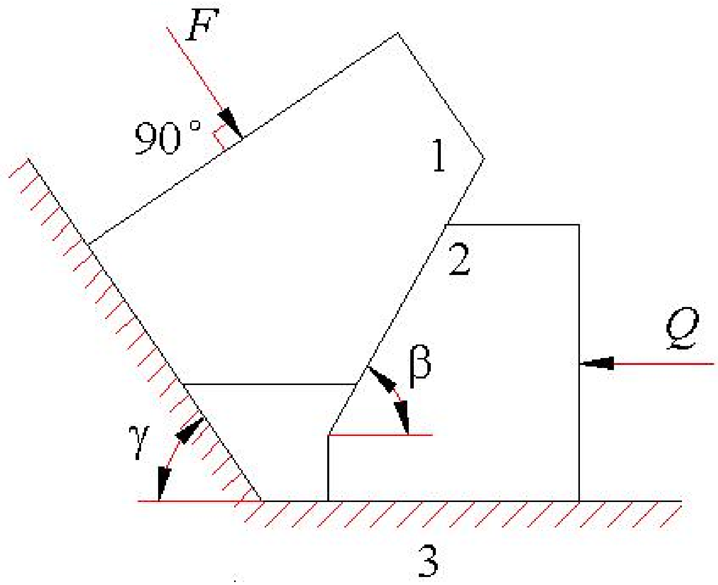
1、如图示斜面机构，已知：f（滑块1、2与导槽3相互之间摩擦系数），=arctg$f$，λ（滑块1的倾斜角）、Q（工作阻力，沿水平方向），设不计两滑块质量，试确定该机构等速运动时所需的铅重方向的驱动力F。



2、图示楔形滑块2沿倾斜角为λ的V形槽面1滑动。已知：λ=35°，*θ*=60°，*f*=0.13，载荷*Q*=1000N。试求滑块等速上升时所需驱动力*F*的大小，并分析滑块以*Q*为驱动力时是否自锁。



3、图示楔块机构中，已知：$\gamma=\beta=60°$，Q=1000N，各接触面摩擦系数f=0.15。如Q为有效阻力，试求所需的驱动力F。



4、图示机构中，如已知转动副A、B的轴颈半径为r及当量摩擦系数f_0，且各构件的惯性力和重力均略去不计，试作出各运动副中总反力的作用线。